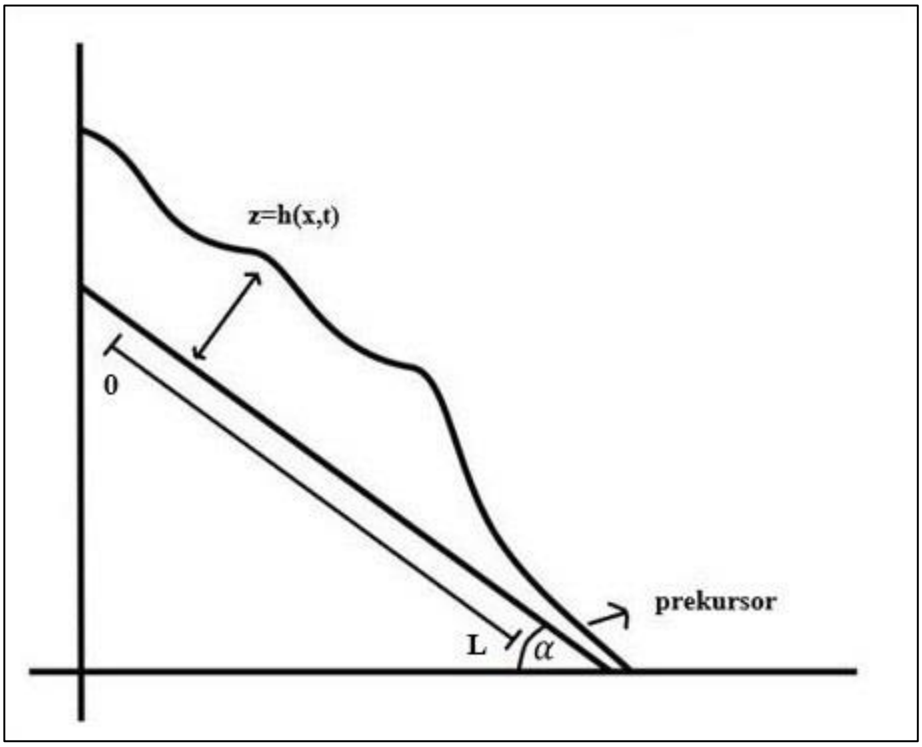
BAB III
MODEL LAPISAN TIPIS FLUIDA PADA BIDANG MIRING



Gambar 3.1 Model dari fluida lapisan tipis yang mengalir pada bidang miring.

Secara umum kajian pada karya tulis ini terdiri dari tahapan mengamati fenomena fluida lapisan tipis di dunia nyata, merumuskan masalah, mengkontruksi persamaan pembangun, membuat model fluida lapisan tipis pada bidang miring, menentukan nilai awal dan syarat batas, menyusun penyelesaian model, yaitu solusi numerik dengan melakukan diskritisasi, simulasi, validasi, dan menarik kesimpulan.

3.1 Mengontruksi Model Fluida Lapisan Tipis pada Bidang Miring

Misalkan terdapat fluida lapisan tipis di atas permukaan miring. Fluida yang dikaji berada pada suatu daerah tertentu, dinyatakan dalam rentang $[0, L]$. Ketinggian fluida pada titik $x \in [0, L)$ di waktu t dinotasikan $z = h(x, t)$ dan laju fluidayang searah sumbu x di waktu t dinotasikan $u(x, t)$, laju fluidayang searah sumbu z di waktu t dinotasikan $w(x, t)$ α merupakan kemiringan bidang dan g merupakan gaya gravitasi. Ilustrasi terdapat pada gambar (3.1) Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada pemodelan ini sebagai berikut

1. Fluida memiliki kekekalan tinggi sehingga fluida mengalir merayap atau bergerak perlahan
2. Fluida bersifat tidak mampat
3. Suhu dan faktor angin diabaikan
4. Topografi dari bidang miring bersifat tidak bergelombang
5. Gaya yang terlibat pada model ini diasumsikan hanya gaya gravitasi

Persamaan fluida lapisan tipis pada bidang miring dikontruksi melalui pendekatan lubrikasi yang diperoleh dari penskalaan beberapa persamaan pembangun yakni persamaan navier stokes (persamaan 2.32 dan 2.33) dan hukum persamaan kontinuitas (persamaan 2.7) sebagai berikut

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}{\partial z} + \sin\alpha = 0 \tag{2.32}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \cos\alpha = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.7}$$

Kondisi pada batas dari fluida tersebut terdiri atas

i. pada $z = 0$ berlaku (no slip) kecepatan fluida sama dengan nol atau dapat ditulis $u = 0$
ii. pada $z = h$ berlaku perubahan kecepatan terhadap ketinggian sama dengan nol atau dapat ditulis $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $p = 0$,
iii. kondisi batas fluida dan udara berlaku persamaan kinematik 2.25 $w = \frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x}$.

Persamaan (2.32) dan (2.33) adalah persamaan pembangun tetapi belum dapat mencerminkan secara eksplisit untuk ketinggian $h(x, t)$. Berikut akan dipaparkan persamaan perubahan ketinggian fluida lapisan tipis pada bidang miring.

Hasil pengintegralan persamaan (2.33) dengan kondisi batas $p = 0$ pada $h = z$ adalah

$$p = \cos\alpha\,(h - z) \tag{3.1}$$

Subtitusi persamaan (3.1) ke persamaan (2.33)

$$-\frac{\partial(\cos\alpha\,(h-z))}{\partial x}+\frac{Q\,\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}{\partial z}+\sin\alpha=0 \qquad (3.2)$$

Lalu dengan mengintegralkan dari z=0 sampai z=h dengan kondisi batas $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ pada $z=h$ didapatkan

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\tan\alpha-\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\lambda}K^{\lambda}(h-z)^{\lambda} \qquad (3.3)$$

dimana $K\equiv Q\cos\alpha>0$

Persamaan 3.3 dapat diintegralkan terhadap z dengan kondisi u=0 pada z=0 lalu diperoleh

$$u=\left(\tan\alpha-\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\lambda}K^{\lambda}\frac{h^{\lambda}-1}{\lambda+1}\left[1-\left(1-\frac{z}{h}\right)^{\lambda+1}\right] \qquad (3.4)$$

Didefinisikan rata-rata u dengan $\bar{u}=h^{-1}\int_0^h u\,dz$

$$\bar{u}=k\left(\tan\alpha-\frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\lambda}h^{\lambda+1} \qquad (3.5)$$

dimana $k\equiv K^{\lambda}/(\lambda+2)>0$

Selanjutnya dari persamaan (2.7) akan dicari perubahan ketinggian fluida lapisan tipis pada bidang miring.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

lalu integralkan terhadap z dengan batas $z=0$ sampai $z=h$.

$$\Leftrightarrow -w=\int_0^h\frac{du}{dx}dz$$

Dengan aturan integral Leibniz :

$$\frac{d}{dx}\int_0^h u(x,t)dz=\int_0^h\frac{du}{dx}dz+u(x,t)\frac{\partial h}{\partial x}+u(x,t)\frac{\partial 0}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^h u(x,t)dz=-w+u(x,t)\frac{\partial h}{\partial x}+u(x,t)\frac{\partial 0}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^h u(x,t)dz = -\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{d}{dx}\int_0^h u(x,t)dz = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} = 0 \tag{3.6}$$

Subtitusikan persamaan 3.5 pada 3.6 lalu akan didapatkan model ketinggian fluida lapisan tipis pada bidang miring

$$\frac{\partial h}{\partial t} + k\frac{\partial\left(\left(\tan\alpha - \frac{\partial h}{\partial x}\right)^{\lambda} h^{\lambda+2}\right)}{\partial x} = 0 \tag{3.7}$$

3.2 Nilai Awal dan Syarat Batas

Dalam kajian ini digunakan profil kondisi nilai awal fungsi eksponen untuk memulai aliran. Kondisi awal fungsi ini dapat digambarkan dengan suatu fungsi

$$h(x,0) = 0{,}5e^{-0{,}25(x-4)^2} + 0{,}1 \tag{3.8}$$

dan syarat batas yang digunakan pada model lapisat tipis fluida pada bidang miringnya adalah

$$\frac{\partial h(0,t)}{\partial x} = 0 \text{ dan } h(10,t) = 0{,}1 \tag{3.9}$$

Syarat batas pada model ini menggambarkan bagian awal dan akhir gelombang. Syarat pertama menunjugan pada tiap awal gelombang pada t berapapungelombang pada $x = 0$ memiliki gradien 0. Selanjutnya syarat batas bagian akhir menunjukan prekursor (dapat dilihat pada gambar 3.1), prekursor merupakan aliran tipis yang mengalir terlebih dahulu dibanding aliran lainnya. Prekursor pada model ini dipilih 0,1.