# BAB III
# REGRESI PADA DATA SIRKULAR

Variabel dalam suatu regresi secara umum terdiri atas variabel bebas (*independent variable*) dan variabel terikat (*dependent variable*). Jenis data pada variabel-variabel tersebut bisa berupa data linear atau data sirkular. Melihat jenis data yang diolah dalam variabel suatu regresi, maka pembahasan regresi akan meliputi 4 pokok bahasan, yaitu :

1. Regresi linear linear (*linear linear regression*)

   Regresi ini membahas dimana baik variabel bebas maupun variabel terikatnya berupa data linear.
2. Regresi sirkular sirkular (*circular circular regression*)

   Pada regresi ini membahas dimana baik variabel bebas maupun variabel terikatnya berupa data sirkular.
3. Regresi linear sirkular (*circular linear regression*)

   Regresi ini membahas dimana variabel terikatnya berupa data linear sedangkan variabel bebasnya berupa data sirkular.
4. Regresi sirkular linear (*linear circular regression*)

   Regresi ini membahas dimana variabel bebasnya berupa data linear sedangkan variabel terikatnya berupa data sirkular.

Pada pembahasan di sini akan dibahas salah satu dari regresi di atas, yaitu regresi sirkular sirkular dimana baik variabel bebas maupun variabel terikatnya berupa data sirkular. Selanjutnya penamaan regresi sirkular sirkular akan disingkat menjadi regresi sirkular saja.

## 3.1 Model Regresi Sirkular

Beragam model regresi sirkular diusulkan diantaranya oleh Downs dan Mardia dalam Rambli dkk. (2010) yang memberikan model regresi berupa pemetaan khusus yang mendefinisikan suatu relasi satu-satu variabel bebas dan variabel terikat dengan modelnya adalah sebagai berikut :

$$\tan\frac{1}{2}(v-\beta)=\omega\tan\frac{1}{2}(u-\alpha)$$

dimana :

$v$ : variabel terikat

□ : variabel bebas

$\omega$ : parameter kemiringan dalam interval tutup $[-1,1]$

$\alpha, \beta$ : parameter lokasi sudut

Sementara Kato dkk. (2008) membawanya ke suatu bidang kompleks dengan model sebagai berikut :

$$v=v(x;\beta_0,\beta_1)=\beta_0\frac{x+\beta_1}{1+\bar{\beta}_1x}, x\in\Omega$$

dimana $\beta_0$ dan $\beta_1$ merupakan parameter kompleks dengan $\beta_0 \in \Omega$ dan $\beta_1 \in \mathbb{C}$.

Selain model-model di atas, masih banyak model-model lain yang diusulkan diantaranya ada yang membawa model regresi sirkular ke suatu persamaan lingkaran. Dalam pembahasan ini, model yang akan digunakan adalah model yang diusulkan oleh Sarma dan Jammalamadaka (1993) dalam jurnalnya yang berjudul *Circular Regression*. Sarma dan Jammalamadaka (1993) membawa modelnya kedalam ekspektasi bersyarat vektor $e^{i\beta}$ jika diberikan $\alpha$, yaitu $E\left(e^{i\beta}|\alpha\right)$. Penjabaran model dari Sarma dan Jammalamadaka dijelaskan sebagai berikut.

Misalkan $(\alpha,\beta)$ mempunyai fungsi kepadatan peluang gabungan $f=(\alpha,\beta), 0<\alpha,\beta\leq 2\pi$. Untuk memprediksi $\beta$ jika diberikan $\alpha$, dengan memperhatikan regresi atau ekspektasi bersyarat dari vektor $e^{i\beta}$ diberikan $\alpha$, yaitu :

$$E\left(e^{i\beta}|\alpha\right)=\rho(\alpha)e^{i\mu(\alpha)}=g_1(\alpha)+ig_2(\alpha)$$

$\mu(\alpha)$ merepresentasikan arah rata-rata bersyarat $\beta$ diberikan $\alpha$ dan $0\leq\rho(\alpha)\leq 1$ konsentrasi bersyarat yang mengarah ke arah rata-rata. Persamaan di atas ekuivalen dengan

$$E(\cos\beta\,|\alpha)=g_1(\alpha)$$

$$E(\sin\beta\,|\alpha)=g_2(\alpha)$$

dimana $\beta$ ditentukan oleh

$$\mu(\alpha)=\hat{\beta}=\arctan\frac{g_2(\alpha)}{g_1(\alpha)}$$

Untuk menentukan $g_1(\alpha)$ dan $g_2(\alpha)$ akan diaproksimasi dengan suatu fungsi melaui ekspansi deret Fourier, yaitu :

$$g_1(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha)$$

$$g_2(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} (C_k \cos k\alpha + D_k \sin k\alpha)$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk model linear umum yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\cos\beta = \sum_{k=0}^{m} (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha) + \epsilon_1$$

$$\sin\beta = \sum_{k=0}^{m} (C_k \cos k\alpha + D_k \sin k\alpha) + \epsilon_2$$

dimana $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ merupakan vektor galat dengan arah rata-rata **0** dan matriks kovarian **Σ** tidak diketahui.

### 3.2 Penaksiran Koefisien Regresi

#### 3.2.1 Penaksiran Koefisien

Dari model yang sudah didapatkan akan ditaksir koefisien-koefisien dari model regresi, yaitu $(A_k, B_k, C_k, D_k), k = 0,1, \dots, m$.

Misalnya $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ menyatakan sampel acak berukuran $n$. Persamaan untuk data observasi dapat dinyatakan sebagai

$$Y_{1i} = \cos\beta_i = \sum_{k=0}^{m} (A_k \cos k\alpha_i + B_k \sin k\alpha_i) + \epsilon_{1_i}$$

$$Y_{2i} = \sin\beta_i = \sum_{k=0}^{m} (C_k \cos k\alpha_i + D_k \sin k\alpha_i) + \epsilon_{2\,.}$$

dimana $i = 1,2, \dots, n$.

Selanjutnya, akan ditaksir koefisien-koefisien $(A_k, B_k, C_k, D_k), k = 0,1, \dots, m$. Perhatikan untuk $k = 0$, maka akan diperoleh suku-suku $B_0 = D_0 = 0$ karena $\sin 0 = 0$.

Misalkan

$Y_{1i} = \cos \beta_i \,, i = 1,2,..,n.$

$Y_{2i} = \sin \beta_i \,, i = 1,2,..,n.$

$\underline{Y}^{(1)} = (Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n})'$

$\underline{Y}^{(2)} = (Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2n})'$

$\underline{\epsilon}^{(1)} = (\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{1n})'$

$\underline{\epsilon}^{(2)} = (\epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \dots, \epsilon_{2n})'$

Kemudian dibentuk matrik $X$

$$X_{n\,x\,(2m+1)} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha_1 & \cos 2\alpha_1 & \dots & \cos m\alpha_1 & \sin \alpha_1 & \dots & \sin m\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cos \alpha_n & \cos 2\alpha_n & \dots & \cos m\alpha_n & \sin \alpha_2 & \dots & \sin m\alpha_2 \end{bmatrix}$$

dan parameter $\underline{\lambda}$, yaitu

$$\underline{\lambda}^{(1)} = (A_0, A_1, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m)'$$

$$\underline{\lambda}^{(2)} = (C_0, C_1, \dots, C_m, D_1, D_2, \dots, D_m)'$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai

$$\underline{Y}^{(1)} = X\underline{\lambda}^{(1)} + \underline{\epsilon}^{(1)}$$

$$\underline{Y}^{(2)} = X\underline{\lambda}^{(2)} + \underline{\epsilon}^{(2)}$$

Jika dinyatakan dalam vektor tunggal, maka diperoleh

$$\underline{Y}^* = X^*\underline{\lambda}^* + \underline{\epsilon}^*$$

dimana

$$\underline{Y}^{*\prime} = \left(\underline{Y}^{(1)\prime} \;\; \vdots \;\; \underline{Y}^{(2)\prime}\right)$$

$$\underline{\epsilon}^{*\prime} = \left(\underline{\epsilon}^{(1)\prime} \;\; \vdots \;\; \underline{\epsilon}^{(2)\prime}\right)$$

$$X^* = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda}^{*\prime} = \left(\underline{\lambda}^{(1)\prime} \;\; \vdots \;\; \underline{\lambda}^{(2)\prime}\right)$$

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dan dengan asumsi $X$ mempunyai rank penuh $(2m + 1 < n)$, maka akan diperoleh

$$\hat{\underline{\lambda}}^{(1)} = (X'X)^{-1}\underline{Y}^{(1)}$$

$$\hat{\underline{\lambda}}^{(2)} = (X'X)^{-1}\underline{Y}^{(2)}$$

### 3.2.2 Galat Baku (*Standard Error*)

Dalam suatu analisis regresi, galat baku mencerminkan standar deviasi yang mengukur variasi titik-titik di atas dan di bawah garis populasi. Nilai galat baku ini dibutuhkan terutama untuk keperluan inferesia. Sekarang akan ditaksir matriks kovarian $\boldsymbol{\Sigma}$ yang nilai-nilainya berisi nilai galat baku. Matriks kovarian $\boldsymbol{\Sigma}$ dapat ditaksir sebagai berikut.

Misalkan $R_0(i,j) = \underline{Y}^{(i)'}\underline{Y}^{(i)} - \underline{Y}^{(i)'}X(X'X)^{-1}X'\underline{Y}^{(i)}$ dan $\boldsymbol{R_0} = \left(R_0(i,j)\right)_{i=1,2}$.

Maka $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = [\mathrm{n} - 2(\mathrm{m}+1)]^{-1}\boldsymbol{R_0}$ merupakan penaksir tak bias dari $\boldsymbol{\Sigma}$.

Bukti :

Akan dibuktikan entri dari $\boldsymbol{R_0}$ sebagai berikut.

$$R_0(i,j) = \underline{Y}^{(i)'}\underline{Y}^{(i)} - \underline{Y}^{(i)'}X(X'X)^{-1}X'\underline{Y}^{(j)}$$

$$= \underline{Y}^{(i)'}(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}^{(j)}$$

Dengan sifat $X'X(X'X)^{-1}X' = X'$, akan disubstitusikan $X\beta$ tanpa mengubah nilai dari $R_0(i,j)$.

$$R_0(i,j) = \left(\underline{Y}^{(i)} - X\beta\right)'((I - X(X'X)^{-1}X')\left(\underline{Y}^{(i)} - X\beta\right)$$

$$E\left(R_0(i,j)\right) = \sigma^2 tr(I - X(X'X)^{-1}X')$$

$$= n\sigma^2 - \sigma^2 tr((X'X)^{-1}(X'X))$$

Karena $tr\left((X'X)^{-1}(X'X)\right) = R(X'X) = 2(m+1)$, maka

$$E\left(R_0(i,j)\right) = (n - (m+1))\sigma^2$$

$\therefore \mathrm{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}\right) = \mathrm{E}([\mathrm{n} - 2(\mathrm{m}+1)]^{-1}\boldsymbol{R_0}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$

## 3.3 Penentuan $\boldsymbol{m}$

### 3.3.1 Gagasan Awal

Masalah dalam pencocokan regresi polinomial adalah menentukan derajat $m$ suatu polinomial. Salah satu gagasan mendasar yang diberikan oleh Sarma dan Jammalamadaka (1993) untuk menentukan $m$ adalah dengan menambahkan kolom ke $(m+1)$ polinomial, kemudian dievaluasi hasilnya apakah meningkatkan jumlah kuadrat galat atau tidak. Berikut penjabarannya.

$$[\cos(m+1)\,\alpha_1, \cos(m+1)\,\alpha_2, \dots, \cos(m+1)\,\alpha_n]' \text{ dan}$$

$$[\sin(m+1)\,\alpha_1, \sin(m+1)\,\alpha_2, \dots, \sin(m+1)\,\alpha_n]'$$

Kemudian vektor kolom diatas dan matriks $X$ dibentuk menjadi matriks *augment* sebagai berikut

$$X_{(1)} = [X \quad \vdots \quad W]P, W = \begin{bmatrix} \cos(m+1)\alpha_1 & \sin(m+1)\,\alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos(m+1)\,\alpha_n & \sin(m+1)\,\alpha_n \end{bmatrix}$$

$P$ merupakan matrik permutasi yang cocok untuk menyimpan dua kolom dari $W$ kedalam kolom ke $(m+1)$ dan $(2m+3)$. Modelnya sekarang menjadi

$$\underline{Y}^{(1)} = X_{(1)}\underline{\lambda}_{(1)}^{(1)} + \underline{\epsilon}^{(1)}$$

$$\underline{Y}^{(2)} = X_{(1)}\underline{\lambda}_{(1)}^{(2)} + \underline{\epsilon}^{(2)}$$

dimana $\underline{\lambda}_{(1)}^{(1)}$ dan $\underline{\lambda}_{(1)}^{(2)}$ merupakan matriks vektor baru berukuran $(2m+3)+1$. Selanjutnya, kuadrat terkecilnya akan menjadi

$$\underline{\lambda}_{(1)}^{(i)} = \left[X'_{(1)}X_{(1)}\right]^{-1} X'_{(1)}\underline{Y}^{(i)}$$

Sekarang perhatikan

$$\begin{aligned} X'_{(1)}X_{(1)} &= P'[X \quad \vdots \quad W]'[X \quad \vdots \quad W]P \\ &= P'\begin{bmatrix} X' \\ \dots \\ W' \end{bmatrix}' [X \quad \vdots \quad W]P \\ &= P'\begin{bmatrix} X'X & X'W \\ W'X & W'W \end{bmatrix} P \end{aligned}$$

dengan menggunakan invers matriks partisi diperoleh

$$\begin{bmatrix} X'X & X'W \\ W'X & W'W \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (X'X)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (X'X)^{-1} & X'W \\ -I & -I \end{bmatrix} H^{-1} \begin{bmatrix} (X'X)^{-1} & X'W \\ -I & -I \end{bmatrix}'$$

dimana $H = W'W - W'X'(X'X)^{-1}X'W = W'(I-M)W$ tulis $M = X(X'X)^{-1}X'$ sehingga kuadrat terkecil dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)} &= P'\left[X'_{(1)}X_{(1)}\right]^{-1} PP' \begin{bmatrix} X' \\ \dots \\ W' \end{bmatrix} \underline{Y}^{(i)} \\ &= P' \begin{bmatrix} (X'X)^{-1}X'\underline{Y}^{(i)} - (X'X)^{-1}X'N(I-M)\underline{Y}^{(i)} \\ H^{-1}W'(I-M)\underline{Y}^{(i)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dimana $N = WH^{-1}W'$

Selanjutnya, jumlah kuadrat galat akan menjadi

$$\underline{Y}^{(i)'}\underline{Y}^{(i)} - \underline{Y}^{(i)'}(X \quad : \quad W)\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} = \underline{Y}^{(i)'}(I-M)\underline{Y}^{(i)} - \underline{Y}^{(i)'}(I-M)N(I-M)\underline{Y}^{(i)}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa ada pengurangan $R_0(i,j)$ dengan penambahan suku

$$\underline{Y}^{(i)'}(I-M)N(I-M)\underline{Y}^{(i)} \geq 0$$

Kemudian tulis ruas kiri pertidaksamaan di atas sebagai $S_i$ sehingga menjadi

$$S_i = \underline{Y}^{(i)'}(I-M)N(I-M)\underline{Y}^{(i)}$$

Untuk memutuskan apakah perlu menambahkan suku ke $(m+1)$, harus dihitung terlebih dahulu persamaan di atas. Jika menghasilkan nilai yang besar, maka akan diputuskan untuk memasukkan suku ke $(m+1)$.

### 3.3.2 Uji Asimtot untuk menentukan $m$

Penentuan $m$ dapat ditentukan berdasarkan $S_i = \underline{Y}^{(i)'}(I-M)N(I-M)\underline{Y}^{(i)}$. Rumus ini akan menentukan apakah suku ke $(m+1)$ perlu dimasukkan kedalam model atau tidak. Namun, untuk ukuran sampelnya cukup besar, diperlukan suatu rumusan yang lebih efisien, dalam hal ini dapat menggunakan uji asimtot.

**Proposisi**

Misalkan $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ dan asumsikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{X'X}{n}\right] = Q$, terhingga dan tidak singular. Maka

1. $\frac{X'\underline{\epsilon}^{(i)}}{\sqrt{n}} \to N(0, \sigma_i^2 Q)$
2. $\sqrt{n}\left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right) \to N(0, \sigma_i^2 Q^{-1})$

Bukti :

1. Untuk penyederhanaan, kasus hanya akan diambil untuk satu *regressor*. Pembuktian akan menggunakan bantuan teorema Lindeberg Feller tanpa bukti.

**Teorema Lindeberg Feller**

Misalkan $X_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ vaiabel acak yang saling bebas dengan $E(X_i) = \mu_i$ dan $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Misalkan $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$ variansi dari jumlah parsial

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang memenuhi syarat Lindeberg, yaitu

$$\frac{1}{S_n^2}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2 1_{\{|X_i|>\varepsilon s_n\}}) \to 0$$

maka $\frac{S_n}{s_n} \to N(0,1)$

Perhatikan untuk kasus hanya satu *regressor*, untuk penyederhanan. Maka $Z_n \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\varepsilon_i$ merupakan suatu skalar. Misalkan $G_i$ merupakan fungsi kepadatan peluang dari $X_i\varepsilon_i$ dan misalkan

$$S_n^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} V(X_i\varepsilon_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Dalam kasus skalar ini, $Q = \lim n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Dengan teorema Linberg Feller, diperlukan syarat perlu dan cukup sehingga $Z_n \to N(0, \sigma^2 Q)$ yaitu

$$\frac{1}{S_n^2}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2 1_{\{|X_i|>\varepsilon s\_\}}) = \lim \frac{1}{S_n^2}\sum_{i=1}^{n} \int_{|\omega|>\varepsilon S_n} \omega^2 dG_i(\omega) = 0$$

untuk setiap $\varepsilon$>0. Substitusi $G_i(\omega) = F(\frac{\omega}{|X_i|})$ ke persamaan di atas sehingga diperoleh

$$\lim \frac{n}{S_n^2}\sum_{i}^{n} \frac{X_i^2}{n} \int_{\left|\frac{\omega}{X_i}\right|>\frac{\varepsilon S_n}{|X_i|}} \left(\frac{\omega}{X_i}\right)^2 dF\left(\frac{\omega}{|X_i|}\right) = 0$$

Karena $\lim S_n^2 = \lim n\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{n} = n\sigma^2 Q$ maka $\lim \frac{n}{S_n^2} = (\sigma^2)^{-1}$ yang mana terbatas dan merupakan skalar tak nol. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$\lim n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \delta_{i,n} = 0$$

dimana $\delta_{i,n} \equiv \int_{\left|\frac{\omega}{X_i}\right|>\frac{\varepsilon S_n}{|X_i|}} \left(\frac{\omega}{X_i}\right)^2 dF\left(\frac{\omega}{|X_i|}\right)$. Perhatikan bahwa $\lim \delta_{i,n} = 0$ untuk semua $i$ dan suatu $\varepsilon$ yang ditetapkan karena $|X_i|$ terbatas ketika $\lim S_n = \infty$

(Sehingga ukuran himpunan $\left|\frac{\omega}{X_i}\right| > \frac{\varepsilon S_n}{|X_i|}$ menuju 0 secara asimtot. Karena $\lim n^{-1} X_i^2$ terbatas dan $\lim \delta_{i,n} = 0$ untuk setiap $i$, maka $\lim n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \delta_{i,n} = 0$.

2. $\sqrt{n}\left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right) = \left[\frac{X'X}{n}\right]^{-1} \frac{X'\epsilon^{(i)}}{\sqrt{n}}$ karena $\lim \left[\frac{X'X}{n}\right]^{-1} = Q^{-1}$, $\frac{X'\epsilon^{(i)}}{\sqrt{n}} \to N(0, \sigma_i^2 Q^{-1})$ dan $Var\left(\left[\frac{X'X}{n}\right]^{-1} \frac{X'\epsilon^{(i)}}{\sqrt{n}}\right) = \sigma^2 Q^{-1} Q Q^{-1}$ maka :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right) \to N(0, Q^{-1} Q Q^{-1}) = N(0, \sigma_i^2 Q^{-1})$$

Sekarang perhatikan bahwa :

$$\sqrt{n}\left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right)' \frac{(X'X)}{n} \sqrt{n}\left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right) = \left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right)' (X'X) \left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right)$$

Karena $[\mathrm{n} - 2(\mathrm{m} + 1)]^{-1} R_0$ merupakan penaksir konsisten dari $\sigma_i^2$, maka untuk $n$ yang cukup besar dapat didekati dengan distribusi berikut.

$$\frac{n - (2m+1)}{R_0(i,i)} \left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right)' (X'X) \left(\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} - \underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}\right) \to \chi^2(2m+1)$$

Selanjutnya distribusi marginal dari himpunan bagian $\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)}$ juga asimtot normal, pengujian untuk menentukan derajat m dapat dilakukan berdasarkan hasil berikut.

Misalkan ${}_m\underline{\lambda}_{(1)}^{(i)} = \left(\underline{\lambda}_{(1),2m+2}^{(i)}, \underline{\lambda}_{(1),2m+3}^{(i)}\right)$ merupakan dua komponen terakhir dari $\underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}$. Telah diketahui bahwa ${}_m\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)} = H^{-1} W'(I - M) \underline{Y}^{(i)}$ tak bias untuk ${}_{\langle}\underline{\lambda}_{(1)}^{(i)}$ dan mempunyai matrik variansi $V\left({}_m\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)}\right) = \sigma_i^2 H^{-1}$.

Untuk memeriksa apakah penambahan suku ke $(m+1)$ meningkatkan prediksi secara signifikan dapat dilakukan dengan pengujian

$H_0^i : {}_m\underline{\lambda}_{(1)}^{(i)} = 0$ melawan $H_1^i : {}_m\underline{\lambda}_{(1)}^{(i)} \neq 0$

dengan statistik ujinya adalah

$$T^{(i)} = \frac{n-(2m+1)}{R_0(i,i)} \, {}_m\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)\prime} H \, {}_m\hat{\underline{\lambda}}_{(1)}^{(i)}$$

$$= n - (2m+1) \frac{\left[\underline{Y}^{(i)\prime}(I-M)\underline{Y}^{(i)} N (I-M) \underline{Y}^{(i)}\right]}{\underline{Y}^{(i)\prime}(I-M)\underline{Y}^{(i)}} \sim \chi^2(2)$$