

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Penulisan

Sebuah operator linear pada ruang Hilbert kompleks berdimensi hingga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks yang terkait dengan basis tertentu. Salah satu bentuk matriks kompleks yang khusus adalah matriks Hermitian karena memiliki karakteristik dapat didiagonalkan secara uniter dan nilai eigennya adalah bilangan real. Dengan karakteristik-karakteristik ini, dapat didefinisikan suatu fungsi dari matriks Hermitian.

Suatu fungsi real f yang kontinu pada interval I disebut monoton operator pada I , dinotasikan $f \in \mathcal{P}(I)$, jika untuk setiap matriks Hermitian A, B yang semua nilai eigennya terletak di I dan $A \leq B$ maka $f(A) \leq f(B)$. Fungsi $f(t) = \alpha + \beta t$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ pada setiap interval adalah fungsi monoton yang juga adalah monoton operator. Sementara fungsi $f(t) = t^2$ pada $[0, \infty)$ adalah fungsi monoton tetapi bukan fungsi monoton operator sebab terdapat matriks positif $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sedemikian sehingga $B - A$ positif tetapi $B^2 - A^2$ tidak positif.

Berdasarkan dua contoh di atas, penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut mengenai sifat-sifat fungsi monoton operator.

Beberapa materi yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah ruang Hilbert, operator linear dari ruang Hilbert, operator linear yang dinyatakan dalam bentuk matriks, matriks uniter, matriks Hermitian, diagonalisasi matriks Hermitian, konsep urutan pada matriks Hermitian, fungsi dari matriks Hermitian, fungsi monoton operator, fungsi operator konveks, dan fungsi operator konkaf.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah dalam penulisan skripsi ini, masalahnya dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimanakah bentuk fungsi dari matriks Hermitian?
2. Bagaimanakah kaitan fungsi monoton dengan fungsi monoton operator?
3. Bagaimanakah syarat perlu dan cukup sebuah fungsi monoton agar menjadi fungsi monoton operator?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini, yaitu:

1. Untuk mengetahui bentuk fungsi dari matriks Hermitian.
2. Untuk mengetahui kaitan antara fungsi monoton dengan fungsi monoton operator.
3. Untuk mengetahui syarat perlu dan cukup sebuah fungsi monoton agar menjadi fungsi monoton operator.

1.4 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat penulisan ini adalah untuk mengetahui karakteristik dari matriks Hermitian, bentuk fungsi dari matriks Hermitian, dan untuk mengetahui bentuk serta karakteristik dari fungsi monoton operator beserta contohnya.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi lima bab, yang pertama yaitu BAB I berisi pendahuluan yang memuat latar belakang penulisan, perumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB II memuat konsep operator di ruang Hilbert, berisi konsep-konsep penting yang mendasari matriks Hermitian dan fungsi monoton operator. Bab ini memuat enam bagian, yaitu bilangan kompleks, ruang vektor kompleks, matriks, transformasi linear, ruang Hilbert, dan operator di ruang Hilbert.

BAB III memuat konsep matriks Hermitian yang menjelaskan matriks Hermitian dan karakteristiknya. Bab ini terdiri dari empat bagian, yaitu matriks uniter, matriks Hermitian, nilai eigen pada matriks Hermitian, dan konsep urutan pada matriks Hermitian.

Selanjutnya BAB IV memuat konsep fungsi monoton operator. Pada bab ini dibahas fungsi monoton yang sekaligus merupakan fungsi monoton operator dan fungsi monoton tetapi bukan merupakan fungsi monoton operator, juga kaitan antara fungsi monoton operator dengan fungsi operator konkaf. Bab ini terdiri dari beberapa bagian, yaitu fungsi real kontinu, fungsi konveks dan fungsi konkaf,

fungsi monoton operator, operator konveks dan operator konkaf, fungsi monoton operator dan fungsi operator konkaf.

Terakhir BAB V adalah penutup dari skripsi ini, berisi kesimpulan dari kajian yang telah dibahas mulai dari BAB II sampai BAB IV dan rekomendasi kepada pembaca untuk penelitian lebih lanjut.

