BAB III

PEMBAHASAN

3.1. *Kriging*

Metode *kriging* digunakan oleh G. Matheron pada tahun 1960-an, untuk menonjolkan metode khusus dalam moving average terbobot (*weighted moving average*) yang meminimalkan variansi dari hasil estimasi. *Kriging* adalah suatu teknik perhitungan untuk estimasi dari suatu variabel terregional yang menggunakan pendekatan bahwa data yang dianalisis dianggap sebagai suatu realisasi dari suatu variabel acak, dan keseluruhan variabel acak yang dianalisis tersebut akan membentuk suatu fungsi acak menggunakan model struktural variogram.

Secara umum, *kriging* merupakan suatu metode yang digunakan untuk menganalisis data geostatistik, yaitu untuk menginterpolasi suatu nilai kandungan mineral berdasarkan data sampel. Data sampel pada ilmu kebumian biasanya diambil di lokasi-lokasi atau titik-titik yang tidak beraturan. Dengan kata lain, metode ini digunakan untuk mengestimasi besarnya nilai karakteristik $\hat{Z}$ pada titik tidak tersampel berdasarkan informasi dari karakteristik titik-titik tersampel Z yang berada di sekitarnya dengan mempertimbangkan korelasi spasial yang ada dalam data tersebut.

Estimator *kriging* $\hat{Z}(s)$ dari $Z(s)$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{Z}(s) - m(s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [Z(s_i) - m(s_i)] \qquad \dots (3.1)$$

dengan:

s, s_i : lokasi untuk estimasi dan salah satu lokasi dari data yang berdekatan, dinyatakan dengan i

$m(s)$: nilai ekspektasi dai $\mathrm{Z}(s)$

$m(s_i)$: nilai ekspektasi dari $Z(s_i)$

λ_i : faktor bobot

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi (Bohling, 2005:4).

$\mathrm{Z}(s)$ dianggap sebagai bidang acak dengan suatu komponen trend $m(s)$ dan komponen sisa $e(s) = \mathrm{Z}(s) - m(s)$. Estimasi *kriging* untuk sisa pada s adalah jumlah berbobot dari sisa pada sekitar data titik. Nilai λ_i diturunkan dari fungsi kovariansi atau semivariogram, yang harus mencirikan komponen sisa.

Tujuan *kriging* adalah untuk menentukan nilai λ_i yang meminimalkan variansi pada estimator, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}_e^2 = var\{\hat{Z}(s) - Z(s)\} \qquad \text{... (3.2)}$$

3.2. *Ordinary kriging*

Ordinary kriging adalah salah satu metode yang terdapat pada metode *kriging* yang sering digunakan pada geostatistika. Pada metode ini, memiliki asumsi khas untuk penerapan yang mudah digunakan dari *ordinary kriging* adalah *intrinsic stationarity* dari bidang dan pengamatan yang cukup untuk mengestimasi variogram. *Ordinary kriging* juga memiliki asumsi matematika dalam penerapannya, asumsi tersebut adalah sebagai berikut:

1. Rata-rata $E[Z(x)] = \mu$ tidak diketahui tetapi konstan,

2. Variogram $\gamma(x, y) = E[(Z(x) - Z(y))^2]$ untuk $Z(x)$ diketahui.

Pada Cressie (1993: 120) dijelaskan bahwa *ordinary kriging* berhubungan dengan prediksi spasial dengan dua asumsi.

Asumsi Model:

$$Z(s) = \mu + e(s), \qquad s \in D, \mu \in \Re, \text{dan } \mu \text{ tidak diketahui} \qquad \text{... (3.3)}$$

Asumsi Prediksi:

$$\hat{Z}(s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i) \;, \qquad \text{dengan} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \qquad \text{... (3.4)}$$

dengan:

$e(s)$: nilai error pada $Z(s)$

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi.

Karena koefisien dari hasil penjumlahan prediksi linear adalah 1 dan memiliki syarat tak bias maka $E\left(\hat{Z}(s)\right) = \mu = E\big(Z(s)\big)$, untuk setiap $\mu \in \Re$ dan karena $Z(s)$ merupakan suatu konstanta maka $E\big(Z(s)\big) = Z(s)$.

Jika terdapat estimator eror $\hat{e}(s)$ pada setiap lokasi, maka $\hat{e}(s)$ merupakan perbedaan antara nilai estimasi $\hat{Z}(s)$ dengan nilai sebenarnya $Z(s)$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{e}(s) = \hat{Z}(s) - Z(s) \qquad \text{... (3.5)}$$

dengan $E\big(\,\hat{e}(s)\big) = 0$.

Dengan menggunakan persamaan (3.5) dapat dibuktikan bahwa $\hat{Z}(s)$ merupakan estimator tak bias. Buktinya adalah sebagai berikut:

$$\hat{e}(s) \; = \hat{Z}(s) - Z(s)$$

$$\Leftrightarrow E(\hat{e}(s)) = E\left(\hat{Z}(s) - Z(s)\right)$$

$$\Leftrightarrow E(\hat{e}(s)) = E\left(\hat{Z}(s)\right) - E(Z(s))$$

karena $E(\hat{e}(s)) = 0$, maka diperoleh:

$$0 = E\left(\hat{Z}(s)\right) - E(Z(s))$$

$$\Leftrightarrow E\left(\hat{Z}(s)\right) = E(Z(s))$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{Z}(s) = Z(s)$$

berdasarkan pembuktian di atas terbukti bahwa $\hat{Z}(s)$ merupakan estimator tak bias dari $Z(s)$. $\square$

Ordinary kriging juga akan meminimalkan rata-rata estimator eror kuadrat. Perhatikan persamaan berikut ini:

$$Var(\hat{e}(s)) = E(\hat{e}(s)^2) - [E(\hat{e}(s))]^2 \qquad \ldots (3.6)$$

$$\Leftrightarrow E(\hat{e}(s)^2) = Var(\hat{e}(s)) + [E(\hat{e}(s))]^2$$

karena $E(\hat{e}(s)) = 0$, maka $\left(E(\hat{e}(s))\right)^2 = 0$. Sehingga diperoleh:

$$E(\hat{e}(s)^2) = Var(\hat{e}(s)) + 0$$

$$= Var(\hat{e}(s))\,.$$

3.3. Sifat-sifat *Ordinary kriging*

Metode *kriging* bertujuan untuk menghasilkan estimator yang bersifat *Best Linear Unviased Estimator* (BLUE). Berikut ini akan dibuktikan sifat BLUE pada *ordinary kriging*.

1. *Linear*

Diberikan suatu persamaan pada metode *ordinary kriging* adalah sbagai berikut:

$$\hat{Z}(s) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)\ . \qquad \dots (3.7)$$

Berdasarkan persamaan tersebut, $\hat{Z}(s)$ dapat dikatakan estimator yang bersifat linier karena merupakan kombinasi linier dari $Z(s_i)$.

Misalkan terdapat n pengukuran pada lokasi 1, 2, 3, … n yang didefinisikan sebagai berikut $Z(s_1), Z(s_2), Z(s_3), \dots, Z(s_n)$. Berdasarkan data yang tersampel, akan diestimasi $Z(s)$ pada lokasi yang tidak tersampel, yang dinyatakan dalam $Z(s_0)$. Selanjutnya, dari persamaan (3.4) dan (3.5), akan disusun variabel random untuk menggambarkan estimator dari galat, yaitu:

$$\hat{e}(s_0) = \hat{Z}(s_0) - Z(s_0) = \left[\sum_{i=0}^{n} \lambda_i Z(s_i)\right] - Z(s_0) \qquad \dots (3.8)$$

dengan $\hat{Z}(s)$ merupakan kombinasi linier dari semua data tersampel.

2. *Unbiased*

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(s)$ merupakan estimator tak bias. *Error* pada lokasi tertentu akan memiliki nilai ekspektasi 0 dengan menerapkan rumus untuk nilai ekspektasi pada kombinasi linier terhadap persamaan (3.8), sehingga diperoleh:

$$E\big(\hat{e}(s)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i) - Z(s)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E\big(Z(s_i)\big) - E\big(Z(s)\big) \qquad \text{... (3.9)}$$

Dengan asumsi bahwa fungsi random bersifat stasioner di mana setiap nilai ekspektasi boleh dituliskan sebagai $E(Z)$, sehingga diperoleh:

$$E\big(\hat{e}(s)\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(Z) - E(Z)$$

karena $E\big(\hat{e}(s)\big) = 0$, maka

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(Z) - E(Z)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(Z) = E(Z)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

akibatnya:

$$E\left(\hat{Z}(s)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E\big(Z(s)\big)$$

$$= 1 \,.\, \mu$$

$$= \mu$$

Berdasarkan penjabaran di atas, maka diperoleh $E\left(\hat{Z}(s)\right) = \mu = Z(s)$, di mana $Z(s) = E\big(Z(s)\big)$ dengan $Z(s)$ berupa suatu konstanta. Artinya *ordinary kriging* menghasilkan estimator yang tak bias dengan $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

3. Best

Kemudian, akan dibuktikan bahwa metode *ordinary kriging* bersifat *best* yaitu dengan meminimumkan variansi *error*. Dengan mengasumsikan bahwa $var\left(Z(s_0)\right) = \sigma^2$, maka persamaan (3.6) menjadi:

$$\begin{aligned} var\left(e(s_0)\right) &= var\left(\hat{Z}(s_0) - Z(s_0)\right) \\ &= cov\left(\hat{Z}(s_0), \hat{Z}(s_0)\right) + cov\left(Z(s_0), Z(s_0)\right) - 2cov\left(\hat{Z}(s_0), Z(s_0)\right) \\ &= var\left(\hat{Z}(s_0)\right) + var\left(Z(s_0)\right) - 2cov\left(\hat{Z}(s_0), Z(s_0)\right) \\ &= var\left(\hat{Z}(s_0)\right) + \sigma^2 - 2cov\left(\hat{Z}(s_0), Z(s_0)\right) \qquad \dots (3.10) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} var\left(\hat{Z}(s_0)\right) &= var\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)\right) \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)\right]^2 - \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)\right)\right]^2 \\ &= E\left[\lambda_1^2 \left(Z(s_1)\right)^2\right] + E\left[\lambda_1\lambda_2\left(Z(s_1)\right)\left(Z(s_2)\right)\right] + \dots \\ &\qquad + E\left[\lambda_1\lambda_n\left(Z(s_1)\right)\left(Z(s_n)\right)\right] + E\left[\lambda_2^2 \left(Z(s_2)\right)^2\right] + \dots \\ &\qquad + E\left[\lambda_n^2 \left(Z(s_n)\right)^2\right] - \left[E\left(\lambda_1 Z(s_1)\right)\right]^2 \\ &\qquad - E\left(\lambda_1 Z(s_1)\right)E\left(\lambda_2 Z(s_2)\right) - \dots - \left[E\left(\lambda_2 Z(s_2)\right)\right]^2 \\ &\qquad - \dots - \left[E\left(\lambda_n Z(s_n)\right)\right]^2 \end{aligned}$$

$$= \lambda_1^2 \left[E\big(Z(s_1)\big)^2 - \Big(E\big(Z(s_1)\big)\Big)^2 \right] + \ \dots$$

$$+ \lambda_n^n \left[E\big(Z(s_n)\big)^2 - \Big(E\big(Z(s_n)\big)\Big)^2 \right]$$

$$+ \lambda_1\lambda_2\Big[E\big[\big(Z(s_1)\big)\big(Z(s_2)\big)\big] - E\big(Z(s_1)\big)E\big(Z(s_2)\big)\Big] + \ \dots$$

$$+ \lambda_{n-1}\lambda_n\Big[E\big[\big(Z(s_{n-1})\big)\big(Z(s_n)\big)\big] - E\big(Z(s_{n-1})\big)E\big(Z(s_n)\big)\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j cov\left(Z(s_i), Z(s_j)\right). \qquad \dots (3.11)$$

dan

$$cov\left(\hat{Z}(s_0), Z(s_0)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i) Z(s_0)\right) - E\left(\hat{Z}(s_0) E\big(Z(s_0)\big)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ E\big(Z(s_i)Z(s_0)\big) - E\left(\hat{Z}(s_0)\right) E\big(Z(s_0)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ E\big(Z(s_i)Z(s_0)\big) - E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(s_i)\right) E\big(Z(s_0)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ E\big(Z(s_i)Z(s_0)\big) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ E\big(Z(s_i)\big) \ E\big(Z(s_0)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ cov\big(Z(s_i)Z(s_0)\big). \qquad \dots (3.12)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) dan (3.12) ke dalam persamaan (3.10) maka akan diperoleh estimasi variansi *error ordinary kriging* sebagai berikut:

$$var\big(e(s_0)\big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j cov\left(Z(s_i)Z(s_j)\right) + \sigma^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ cov\big(Z(s_i)Z(s_0)\big) \qquad \dots (3.13)$$

dengan syarat $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Setelah melakukan penjabaran di atas, maka dapat dicari nilai minimum dari variansi error menggunakan *Lagrange multiplier* dengan parameter *Lagrange* $2p$. Persamaan *Lagrange* didefinisikan sebagai berikut:

$$F(\lambda_i, p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j cov\left(Z(s_i)Z(s_j)\right) + \sigma^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, cov\left(Z(s_i)Z(s_0)\right) + 2p\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right). \quad \text{... (3.14)}$$

Penyelesaian *Lagrang multiplier* adalah sebagai berikut:

1. Persamaan *Lagrange* diturunkan terhadap variabel bobot

$$\frac{\partial F(\lambda_i, p)}{\partial \lambda_1} = 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j cov\left(Z(s_j)Z(s_1)\right) - 2cov\left(Z(s_1)Z(s_0)\right) + 2p$$

$$\frac{\partial F(\lambda_i, p)}{\partial \lambda_2} = 2\sum_{t=1}^{n} \lambda_j cov\left(Z(s_j)Z(s_2)\right) - 2cov\left(Z(s_2)Z(s_0)\right) + 2p$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F(\lambda_i, p)}{\partial \lambda_n} = 2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j cov\left(Z(s_j)Z(s_n)\right) - 2cov\left(Z(s_n)Z(s_0)\right) + 2p$$

dengan:

$$\frac{\partial F(\lambda_i, p)}{\partial \lambda_i} = 0.$$

Sehingga diperoleh:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, cov\left(Z(s_j)Z(s_i)\right) = cov\left(Z(s_i)Z(s_0)\right) - p, \text{untuk } i = 1, 2, \dots, n$$

2. Kemudian persamaan *Lagarange* diturunkan terhadap parameter *p*

$$\frac{\partial F(\lambda_i, p)}{\partial p} = 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 2$$

Dengan $\frac{\partial F(\lambda_i,p)}{\partial p} = 0$, sehingga diperoleh $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Dari penyelesain *Lagrange* di atas diperoleh:

$$cov\big(Z(s_i), Z(s_0)\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, cov\left(Z(s_j), Z(s_i)\right) + p \qquad \text{... (3.15)}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \qquad \text{... (3.16)}$$

Dari persamaan di atas dapat dibentuk ke dalam bentuk matriks AX = B, matriks tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} C_{Z_{11}} & \cdots & C_{Z_{1n}} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{Z_{n1}} & \cdots & C_{Z_{nn}} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{Z_{10}} \\ \vdots \\ C_{Z_{n0}} \\ 1 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \vdots \\ \gamma_{n0} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jika γ adalah model semivariogram yang diterima dan jika tidak ada titik kelipatan, matriks A tidak singular atau nilai determinan tidak sama dengan nol dan invers A^{-1} ada (Armstrong, 1998: 89). Maka untuk menentukan nilai bobot masing-masing titik tersampel terhadap titik yang akan diestimasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\\ p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{Z_{11}} & \cdots & C_{Z_{1n}} & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ C_{Z_{n1}} & \cdots & C_{Z_{nn}} & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}C_{Z_{10}}\\ \vdots\\ C_{Z_{n0}}\\ 1\end{bmatrix}$$

Keterangan:

$C_{Z_{nn}}$ = kovariansi antara variabel tersampel pada lokasi n dengan variabel tersampel pada lokasi *n*

$C_{Z_{n0}}$ = kovariansi antara variabel tersampel pada lokasi n dengan variabel yang akan diestimasi

p = rata-rata variabel.

Persamaan (3.15) dan (3.16) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.13) sehingga diperoleh variansi eror sebagai berikut:

$$var(\hat{e}(s_0))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j cov\left(Z(s_i)Z(s_j)\right)+\sigma^2-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, cov(Z(s_i)Z(s_0))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[cov(Z(s_i)Z(s_0))-p\right]+\sigma^2-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, cov(Z(s_i)Z(s_0))$$

$$=\sigma^2-\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, cov(Z(s_i)Z(s_0))+p\right]. \quad \text{... (3.17)}$$

Setelah memperoleh variansi eror minimum maka akan di hitung pula *mean square error* (MSE) yang akan digunakan untuk menentukan semivariogram yang cocok.

$$MSE=E\left[\left(\hat{Z}(s)-Z(s)\right)^2\right]$$

Perhatikan:

$$var\left(\hat{Z}(s)-Z(s)\right)=E\left[\left(\hat{Z}(s)-Z(s)\right)^2\right]-\left[E\left(\hat{Z}(s)-Z(s)\right)\right]^2$$

Karena $E\left(\hat{Z}(s) - Z(s)\right) = E\big(\hat{e}(s)\big) = 0$, maka $\left[E\left(\hat{Z}(s) - Z(s)\right)\right]^2 = 0$.

Sehingga diperoleh:

$$MSE = E\left[\left(\hat{Z}(s) - Z(s)\right)^2\right] = var\left(\hat{Z}(s) - Z(s)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j cov\left(Z(s_i) Z(s_j)\right) + \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, cov\big(Z(s_i) Z(s_0)\big) \qquad \text{... (3.18)}$$

3.4. Algoritma Estimasi Menggunakan *Ordinary kriging*

Misalkan diberikan data $X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}$, dan $S = \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{bmatrix}$.

1. Hitung nilai minimum, maksimum, dan median dari *X*,*Y*, dan *S*.
2. Hitung nilai rata-rata sampel $E[Z(s)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i$
3. Plotkan antara *S* (kandungan sulfur), jika plot tidak terdapat tren, maka data dikatakan stasioner.
4. Menentukan pasangan data, kemudian hitung jaraknya.
5. Hitung nilai semivariogram eksperimental. Dari semivariogram akan diperoleh nilai sill dan range
6. Mencocokkan semivariogram eksperimental dengan semivariogram teoritis dengan melihat nilai MSE terkecil.

   $MSE = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j cov\left(Z(s_i) Z(s_j)\right) + \sigma^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, cov\big(Z(s_i) Z(s_0)\big)$
7. Setelah memperoleh semivariogram teoritis yang sesuai dengan data, selanjutnya semivariogram digunakan untuk mengestimasi data.
8. Kemudian buat plot hasil estimasi data.