BAB 3

FUNGSI MONOTON MATRIKS

Pada bab ini akan dibahas fungsi monoton matriks. Dalam mengkontruksi fungsi monoton matriks banyak istilah yang harus kita ketahui sebelumnya. Beberapa konsep yang akan dibahas yaitu matriks Hermitian atau matriks *self-adjoint*, nilai eigen dan vektor eigen. Selanjutnya dikenalkan fungsi monoton dan fungsi monoton operator.

3.1 Matriks Hermitian dan Matriks Uniter

Berikut akan dijelaskan matriks Hermitian dan matriks uniter yang menjadi syarat dalam mengkontruksi fungsi monoton matriks.

Definisi 3.1.1: Matriks Hermitian (Anton & Rorres, 2005: 823)

Misalkan A matriks kompleks berukuran $n \times n$, definisikan $A^* := \bar{A}^T$. Matriks A disebut matriks Hermitian jika $A = A^*$. Matriks Hermitian disebut juga sebagai self-adjoint.

Berikut adalah beberapa contoh matriks yang merupakan matriks Hermitian:

Contoh 3.1.2:

Diberikan matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+j & 2-j \\ 1-j & 1 & j \\ 2+j & -j & 1 \end{bmatrix}.$$

Perhatikan konjuget dari matriks A adalah

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1-j & 2+j \\ 1+j & 1 & -j \\ 2-j & j & 1 \end{bmatrix},$$

selanjutnya diperoleh transpos konjuget dari matriks A

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+j & 2-j \\ 1-j & 1 & j \\ 2+j & -j & 1 \end{bmatrix}.$$

Karena $\bar{A}^T = A$ maka terbukti bahwa matriks A adalah matriks Hermitian.

Contoh 3.1.3:

Akan ditunjukkan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks Hermitian.

Perhatikan konjuget dari matriks A adalah

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & -5 & 2+i \\ 1+i & 2-i & 3 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh transpos konjuget dari matriks A

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix}.$$

Karena $\bar{A}^T = A$ maka terbukti bahwa matriks A adalah matriks Hermitian.

Misalkan A dan B adalah matriks Hermitian. Notasi $A \leq B$ menyatakan $B - A$ adalah semidefinit positif atau definit positif. Berikut akan dibahas semidefinit positif dan definit positif. Sebelumnya akan didefinisikan hasilkali dalam dari dua unsur $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Definisi 3.1.4: (Bhatia, 1997: 2)

Misalkan $x, y \in \mathbb{C}^n$. *Bentuk umum hasilkali dalam pada* $\mathbb{C}^n$ *didefinisikan*

$$\langle x, y\rangle = y^* x,$$

dimana y^* *adalah adjoint dari* y *yaitu* $y^* = \bar{y}^T$.

Definisi 3.1.5: (Bhatia, 1997: 4)

Misalkan A *sebuah matriks Hermitian. Jika* $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ *untuk setiap* $x \in \mathbb{C}^n$, *maka* A *dikatakan semidefinit positif* ($A \geq 0$). A *dikatakan definit positif jika* $\langle x, Ax\rangle > 0$ *untuk setiap* $x \neq 0$.

Berikut contoh matriks semidefinif positif.

Contoh 3.1.6:

Akan ditunjukkan matriks Hermitian A dan B berikut merupakan semidefinit positif:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ambil sebarang $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ dengan $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Perhatikan :

$$\begin{aligned}
\langle x, Ax\rangle &= x^* A x \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

dan

$\langle x, Bx\rangle = x^*Bx$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2{x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2$$

$$\geq (x_1 + x_2)^2 \geq 0.$$

Karena $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ dan $\langle x, Bx\rangle \geq 0$ maka matriks Hermitian A dan B merupakan matriks semidefinit positif.

Selanjutnya akan dibahas matriks uniter beserta contohnya.

Definisi 3.1.7: Matriks Uniter (Anton & Rorres, 2005: 821)

Sebuah matriks persegi A dengan entri bilangan kompleks disebut uniter jika $A^{-1} = A^*$.

Berikut diberikan contoh matriks yang merupakan matriks uniter :

Contoh 3.1.8:

Diberikan matriks persegi A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan bahwa matriks A merupakan matriks uniter.

Sebelumnya akan dicari invers dari matriks A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{-1+i}{2}\right) - \left(\frac{1+i}{2}\right)\left(\frac{1-i}{2}\right)\right)} \begin{bmatrix} \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix};$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{-1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix};$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya tentukan transpos konjuget dari matriks A.

Perhatikan $\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}$ dan $\bar{A}^T = A^* = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}$.

Karena $A^{-1} = A^* = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{bmatrix}$, maka matriks A merupakan matriks uniter.

3.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah sebuah matriks $n \times n$. Sebuah vektor $\boldsymbol{x}$ yang taknol pada $\mathbb{C}^n$ disebut vektor eigen dari A jika $A\boldsymbol{x}$ adalah sebuah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{x}$; yaitu

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$. Selanjutnya skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan $\boldsymbol{x}$ disebut sebagai vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ.

Perhatikan bahwa

$$A\boldsymbol{x} = \lambda I\boldsymbol{x}$$

ekuivalen dengan

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0, \text{ dengan } det(\lambda I - A) = 0.$$

Kemudian $det(\lambda I - A) = 0$ disebut persamaan karakteristik matriks A. Lebih lanjut $det(\lambda I - A)$ adalah sebuah polinomial dalam λ yang disebut polinomial karakteristik.

Contoh 3.2.1:

Akan ditentukan nilai-nilai eigen dari matriks A berikut :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ -5 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Sehingga persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 + 1 = 0$. Dengan demikian, nilai-nilai eigen dari matriks A adalah $\lambda = i$ dan $\lambda = -i$.

Contoh 3.2.2:

Perhatikan matriks A berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 + j \\ 1 - j & 1 \end{bmatrix}.$$

Sekarang kita akan menentukan nilai-nilai eigen dari matriks A.

Polinomial karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 - j \\ -1 + j & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda.$$

Sehingga persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 - 3\lambda = 0$. Dengan demikian didapatkan nilai-nilai eigen untuk matriks A adalah $\lambda = 0$ dan $\lambda = 3$.

Contoh 3.2.3:

Akan dicari nilai-nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}.$$

Polinomial karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4.$$

Nilai-nilai eigen dari A oleh karenanya harus memenuhi persamaan kubik

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0,$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0.$$

Dengan menyelesaikan persamaan dengan rumus kuadratik, kita dapatkan nilai-nilai eigen dari A adalah

$$\lambda = 4, \lambda = 2 + \sqrt{3}, \text{ dan } \lambda = 2 - \sqrt{3}.$$

Contoh 3.2.4:

Sekarang kita akan menentukan nilai-nilai eigen dari matriks segitiga atas berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Karena determinan sebuah matriks segitiga adalah hasilkali entri-entrinya yang terletak pada diagonal utama, kita memperoleh

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ 0 & \lambda - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & -a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - a_{44} \end{bmatrix},$$

$$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}).$$

Sehingga, persamaan karakteristiknya adalah

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44}) = 0,$$

dan nilai-nilai eigennya adalah

$$\lambda = a_{11}, \lambda = a_{22}, \lambda = a_{33}, \lambda = a_{44}$$

yang tidak lain merupakan entri-entri diagonal dari matriks A.

3.3 Fungsi Monoton (Bartle & Sherbert, 2000: 149)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, sebuah fungsi real $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ dikatakan naik pada A jika $\forall\, x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \leq x_2$, maka $f(x_1) \leq f(x_2)$. Fungsi f dikatakan naik kuat pada A jika $\forall\, x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$. Selanjutnya sebuah fungsi real $g: A \longrightarrow \mathbb{R}$ dikatakan turun pada A jika $\forall\, x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \leq x_2$, maka $g(x_1) \geq g(x_2)$. Fungsi g dikatakan turun kuat pada A jika $\forall\, x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $g(x_1) > g(x_2)$.

Jika sebuah fungsi naik (atau turun) pada A, maka dikatakan monoton pada A. fungsi f dikatakan monoton kuat pada A jika naik kuat (atau turun kuat) pada A.

Berikut merupakan beberapa contoh fungsi yang merupakan fungsi monoton:

1. Fungsi $f(t) = \alpha + \beta t$ adalah fungsi monoton naik $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ dan $\beta \geq 0$.
2. Fungsi $f(t) = \log(1 + t)$ pada interval $[0, \infty)$ adalah fungsi monoton naik.
3. Fungsi $f(t) = t^2$ pada $[0, \infty)$ adalah fungsi monoton naik.

3.4 Fungsi Monoton Matriks

Berikut akan dibahas fungsi monoton matriks dan contohnya. Sebelumnya akan diberikan beberapa definisi terkait dengan matriks normal dan eksistensi matriks uniter pada sebuah matriks Hermitian.

Definisi 3.4.1 (Nering, 1970):

Matriks A disebut ***normal*** *jika $AA^* = A^*A$.*

Beberapa contoh matriks normal antara lain matriks diagonal, matriks uniter, dan matriks Hermitian.

Teorema 3.4.2 (Nering, 1970):

Sebarang matriks A dapat didiagonalkan secara uniter jika dan hanya jika A matriks normal.

Setiap matriks Hermitian adalah matriks normal. Sehingga sebarang matriks Hermitian dapat didiagonalkan secara uniter. Dengan kata lain jika A matriks Hermitian maka pasti terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga $A = UDU^*$.

Misalkan f adalah fungsi real yang didefinisikan pada sebuah interval I. Untuk matriks diagonal $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ di mana entri λ_i berada pada I, definisikan $f(D) = diag\big(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\big)$. Jika A adalah sebuah matriks Hermitian di mana nilai eigen λ_i berada pada I, kita pilih matriks uniter U

sedemikian sehingga $A = UDU^*$, di mana D adalah matriks diagonal, kemudian definisikan $f(A) = Uf(D)U^*$.

Dengan demikian kita dapat mendefinisikan $f(A)$ untuk setiap matriks Hermitian (sebarang order) dimana nilai eigen berada pada I.

Definisi 3.4.3: Fungsi Monoton Matriks (Hansen, Ji, & Tomiyama, 2002)

Sebuah fungsi kontinu $f: I \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan pada interval I dikatakan fungsi monoton matriks berorder n jika untuk setiap pasangan dari matriks self-adjoint X, Y berukuran $n \times n$ dengan nilai eigen pada I dan $X \leq Y$, maka $f(X) \leq f(Y)$.

Berikut adalah beberapa contoh fungsi monoton yang merupakan fungsi monoton matriks dan yang bukan termasuk fungsi monoton matriks.

1. Akan ditunjukkan fungsi $f(t) = \alpha + \beta t$ adalah fungsi monoton matriks (pada setiap interval) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ dan $\beta \geq 0$.

Ambil sebarang matriks Hermitian X, Y dengan $X \leq Y$, artinya $Y - X \geq 0$.

Jika $f(t) = \alpha + \beta t$ Maka $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ dan $\beta \geq 0$,

$$f(X) = \alpha I + \beta X,$$

$$f(Y) = \alpha I + \beta Y.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $f(Y) - f(X) \geq 0$.

Perhatikan:

$$f(Y) - f(X) = \alpha I + \beta Y - (\alpha I + \beta X),$$

$$= \alpha I + \beta Y - \alpha I - \beta X,$$

$$= \beta Y - \beta X,$$

$$= \beta(Y - X),$$

≥ 0 , karena $Y - X \geq 0$ dan $\beta \geq 0$.

Jadi terbukti $f(t) = \alpha + \beta t$ adalah monoton matriks.

2. Akan ditunjukkan fungsi $f(t) = \log(1 + t)$ pada interval $[0, \infty)$ adalah fungsi monoton matriks.

Ambil sebarang matriks Hermitian X, Y dengan $X \leq Y$. Akan ditunjukkan $f(X) \leq f(Y)$.

Perhatikan:

$$X \leq Y$$

$$X + I \leq Y + I$$

$$\log(X + I) \leq \log(Y + I)$$

$$f(X) \leq f(Y).$$

Jadi terbukti $f(t) = log(1 + t)$ pada interval $[0, \infty)$ adalah fungsi monoton matriks.

3. Akan ditunjukkan fungsi $f(t) = t^2$ pada $[0, \infty)$ bukan fungsi monoton matriks.

Akan dibuktikan terdapat matriks Hermitian X, Y di mana $X \leq Y$, akan tetapi $f(Y) - f(X) \ngeq 0$.

Pilih $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks Hermitian.

Dapat ditunjukkan bahwa nilai eigen dari matriks X, Y berada pada $I = [0, \infty)$.

Perhatikan untuk $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1) - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-2^2 - 4(1)(0)}}{2.1},$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 0}}{2},$$

$$= \frac{2 \pm 2}{2}.$$

$$\lambda_1 = \frac{2+2}{2} = 2,$$

$$\lambda_2 = \frac{2-2}{2} = 0,$$

Jadi, $\lambda_1, \lambda_2 \in I = [0, \infty)$.

Perhatikan untuk $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1) - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1 = 0,$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-3^2 - 4(1)(1)}}{2.1},$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2},$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2.62,$$

$$\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.38.$$

Jadi, $\lambda_1, \lambda_2 \in I = [0, \infty)$.

Sekarang akan ditunjukkan $Y - X \geq 0$.

$$Y - X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan $Y - X \geq 0$.

Ambil sebarang $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ dengan $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.

$$\langle a, (Y - X)a \rangle = a^*(Y - X)a,$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

$$= {a_1}^2 \geq 0.$$

Karena $\langle a, (Y - X)a \rangle \geq 0$, maka $B - A$ semidefinit positif.

Selanjutnya akan ditentukan nilai dari $f(Y) - f(X)$.

$$f(Y) = Y^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2 + 1.1 & 2.1 + 1.1 \\ 1.2 + 1.1 & 1.1 + 1.1 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$f(X) = X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1 + 1.1 & 1.1 + 1.1 \\ 1.1 + 1.1 & 1.1 + 1.1 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh,

$$f(Y) - f(X) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan $f(Y) - f(X) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ngeq 0$.

Pilih $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, sedemikian sehingga

$$\langle A, \big(f(Y) - f(X)\big)A \rangle = A^*\big(f(Y) - f(X)\big)A,$$

$$= [-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$= [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$= -1 \ngeq 0.$$

Terbukti bahwa $f(Y) - f(X) \ngeq 0$.

Jadi, $f(t) = t^2$ pada $[0, \infty)$ bukan fungsi monoton matriks.

Dapat kita ketahui bahwa walaupun suatu fungsi merupakan fungsi monoton, akan tetapi belum tentu merupakan fungsi monoton matriks. Sebagai contoh, fungsi $f(t) = t^2$ pada $[0, \infty)$ adalah fungsi monoton, akan tetapi bukan merupakan fungsi monoton matriks.

3.5 Fungsi Monoton Operator

Definisi 3.5.1: Fungsi Monoton Operator (Sergei dan Tomiyama: 2003)

Suatu fungsi kontinu $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ *didefinisikan pada interval* I *dikatakan fungsi monoton operator jika dan hanya jika fungsi tersebut monoton matriks berorder* n *untuk setiap bilangan positif* n*, dengan kata lain*

$$P_\infty(I) = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n(I).$$

Dari definisi di atas diketahui keterkaitan antara fungsi monoton matriks dan fungsi monoton operator. Jika suatu fungsi merupakan monoton operator maka juga merupakan monoton matriks. Akan tetapi, jika suatu fungsi merupakan monoton matriks belum tentu merupakan monoton operator.

Adapun beberapa contoh fungsi yang merupakan monoton operator adalah $f(t) = \alpha + \beta t$ (pada setiap interval) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ dan $f(t) = \log(1 + t)$ pada interval $[0, \infty)$, dan $f(t) = -\frac{1}{t}$ pada interval $(0, \infty)$.