

# BAB 1

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Misalkan  $f$  adalah fungsi real yang didefinisikan pada sebuah interval  $I$ . Untuk matriks diagonal  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  dengan entri  $\lambda_i$  berada pada  $I$ , definisikan  $f(D) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$ . Jika  $A$  adalah sebuah matriks Hermitian dimana nilai eigen  $\lambda_i$  berada pada  $I$ , pilih matriks uniter  $U$  sedemikian sehingga  $A = UDU^*$ , dimana  $D$  adalah matriks diagonal, kemudian definisikan  $f(A) = Uf(D)U^*$  (Bhatia, 1997: 112).

Aljabar  $C^* A$  adalah suatu aljabar Banach\*  $A$  yang memenuhi  $\|a^*a\| = \|a\|^2; \forall a \in A$ . Sebuah fungsi kontinu  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  yang didefinisikan pada interval  $I$  dikatakan fungsi monoton matriks berorder  $n$  jika

$$X \leq Y \Rightarrow f(X) \leq f(Y) \quad (1)$$

untuk setiap pasangan dari matriks *self-adjoint*  $X, Y$  berukuran  $n \times n$  dengan nilai eigen pada  $I$ . Jika (1) berlaku untuk sebarang unsur *self-adjoint*  $X, Y$  pada aljabar  $C^* A$  dengan spektrum pada  $I$ , maka kita katakan bahwa  $f$  adalah monoton- $A$ .

Konsep ini berbeda dengan fungsi monoton pada bilangan real. Dengan demikian tentu saja terdapat perbedaan besar antara fungsi monoton numerik yang kontinu dengan fungsi monoton matriks yang kontinu. Suatu fungsi yang monoton pada real belum tentu merupakan fungsi monoton matriks. Fungsi monoton pada real bisa saja bukan merupakan fungsi monoton matriks dan sebaliknya.

Contohnya, walaupun  $f(t) = e^t$  dan  $f(t) = t^2$  adalah fungsi monoton pada interval  $I = [0, \infty)$ , akan tetapi bukan merupakan fungsi monoton matriks.

Berdasarkan uraian di atas, penulis termotivasi untuk mengkaji lebih jauh konsep fungsi monoton matriks. Lebih dari itu, didalam makalah ini juga akan dibahas fungsi monoton aljabar- $C^*$ .

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, rumusan masalah yang akan dibahas pada makalah ini adalah:

1. Bagaimanakah sifat dari fungsi monoton matriks?
2. Bagaimanakah sifat dari fungsi monoton operator?
3. Bagaimanakah contoh fungsi yang monoton numerik tapi tidak monoton matriks?
4. Bagaimanakah sifat fungsi monoton aljabar- $C^*$ ?
5. Bagaimanakah contoh fungsi monoton aljabar- $C^*$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini untuk:

1. Mengetahui sifat dari fungsi monoton matriks.
2. Mengetahui sifat dari fungsi monoton operator.
3. Memberikan contoh fungsi yang monoton numerik tapi tidak monoton matriks.

4. Mengetahui sifat fungsi monoton aljabar- $C^*$ .
5. Memberikan contoh fungsi monoton aljabar- $C^*$ .

#### 1.4 Manfaat yang Diharapkan

Dengan adanya makalah ini diharapkan dapat diperoleh gambaran sifat-sifat fungsi monoton aljabar- $C^*$ . Selanjutnya dapat diketahui keterkaitan fungsi monoton matriks, fungsi monoton operator dan fungsi monoton aljabar- $C^*$ .

#### 1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi lima bab. Sebagaimana yang telah diuraikan di atas, BAB 1 adalah pendahuluan yang berisi Latar Belakang, Rumusan Masalah, Tujuan Penelitian, dan Sistematika Penulisan.

Berikutnya, BAB 2 menjelaskan teori aljabar- $C^*$  yang menjadi landasan utama masalah yang diteliti. Di dalamnya dibahas ruang vektor, ruang hasilkali dalam, ruang bernorm, barisan Cauchy, ruang lengkap, ruang Banach, ruang Hilbert, aljabar Banach, aljabar Banach\*, dan dibagian akhir dibahas spektrum dan kalkulus fungsional.

BAB 3 merupakan kajian pembuka dari masalah pada skripsi ini, yaitu mengenai fungsi monoton matriks. Di dalamnya dibahas fungsi monoton, fungsi monoton matriks, dan fungsi monoton operator berikut dengan contohnya. Selain itu dibahas pula matriks Hermitian dan matriks uniter, nilai eigen dan vektor eigen.

Selanjutnya, BAB 4 merupakan inti dari skripsi ini. Diawali dengan definisi fungsi monoton aljabar- $C^*$ , kemudian dilanjutkan dengan pembahasan beberapa teorema terkait fungsi monoton aljabar- $C^*$  dan terakhir diberikan contoh fungsi monoton aljabar- $C^*$ .

Di bagian akhir, yaitu BAB 5 memuat penutup dari skripsi ini. Di dalamnya diuraikan kesimpulan dari skripsi ini. Kemudian di tutup dengan rekomendasi untuk penelitian lebih lanjut.

