

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal pertidaksamaan. Untuk pertidaksamaan yang sederhana dapat digunakan metode kuadrat, yaitu menyelesaikan pertidaksamaan dengan memanfaatkan sifat bahwa untuk setiap bilangan real x berlaku $x^2 \geq 0$, ketaksamaan ini membantu dalam membuktikan ketaksamaan lain. Ketaksamaan segitiga juga dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan soal pertidaksamaan. Soal pertidaksamaan yang lebih rumit dapat diselesaikan dengan memanfaatkan ketaksamaan fungsi rata-rata geometri dan rata-rata aritmatika atau dengan ketaksamaan fungsi rata-rata lainnya.

Terdapat beberapa macam fungsi rata-rata misalnya fungsi rata-rata aritmatika, fungsi rata-rata harmonik dan fungsi rata-rata geometrik. Ketiga fungsi rata-rata dengan dua variabel tersebut adalah $A(x, y) = \frac{x+y}{2}$, $H(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$, dan $G(x, y) = \sqrt{xy}$.

Salah satu sifat yang dipenuhi oleh fungsi rata-rata adalah sifat keinternalan. Rata-rata dari dua variabel selalu berada pada interval nilai minimum dan nilai maksimum dari kedua nilai itu, yaitu:

$$\min(x, y) \leq m(x, y) \leq \max(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+) \quad (1.1)$$

Pada tahun 1996 Denes Petz dan Hiroshi Hasegawa memperkenalkan fungsi

$$f_p(x) = \begin{cases} p(1-p) \frac{(x-1)^2}{(x^p-1)(x^{1-p}-1)}, & \text{jika } p \neq 0, p \neq 1, x \neq 1, \\ \frac{x-1}{\log x}, & \text{jika } p = 0 \text{ atau } p = 1, x \neq 1, \\ 1, & \text{jika } x = 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Selanjutnya Adam Besenyei (2012) memperkenalkan sebuah konsep fungsi rata-rata baru dengan menggunakan fungsi Petz-Hasegawa. Konsep ini selanjutnya disebut fungsi rata-rata Petz-Hasegawa yang didefinisikan sebagai berikut:

Untuk $-1 \leq p \leq 2$

$$m_p(x, y) = \begin{cases} p(1-p) \frac{(x-y)^2}{(x^p-y^p)(x^{1-p}-y^{1-p})}, & \text{jika } p \neq 0, p \neq 1, x \neq y, \\ \frac{x-y}{\log x - \log y}, & \text{jika } p = 0 \text{ atau } p = 1, x \neq y, \\ x, & \text{jika } x = y. \end{cases} \quad (1.3)$$

Fungsi $m_p(x, y)$ simetris dalam p terhadap titik $\frac{1}{2}$, sehingga $m_p(x, y) = m_{1-p}(x, y)$ untuk semua $x, y > 0$. Oleh karena itu kita selalu menganggap $\frac{1}{2} \leq p \leq 2$.

Fungsi rata-rata Petz-Hasegawa tidak seperti fungsi rata-rata aritmatika, fungsi rata-rata harmonik maupun fungsi rata-rata geometrik. Perbedaan yang paling mencolok adalah fungsi rata-rata Petz-Hasegawa memiliki nilai parameter antara -1 sampai dengan 2 . Walaupun ada fungsi rata-rata lain yang memiliki parameter, namun fungsi rata-rata Petz-Hasegawa memiliki keunikan yang tidak dimiliki oleh fungsi rata-rata lain. Diantara keunikan fungsi rata-rata Petz-Hasegawa adalah memiliki titik yang mengakibatkan fungsi rata-rata Petz-Hasegawa simetris yaitu pada saat nilai parameter $p = \frac{1}{2}$, sehingga $m_p(x, y) = m_{1-p}(x, y)$.

Pada skripsi ini akan dibahas sifat-sifat khusus yang dimiliki oleh fungsi Petz-Hasegawa dan kaitannya dengan fungsi monoton operator, yaitu sebuah fungsi kontinu yang mempertahankan urutan matriks.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas pada skripsi ini sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi fungsi Petz-Hasegawa?
2. Bagaimana sifat fungsi rata-rata Petz-Hasegawa?
3. Bagaimana kaitan fungsi Petz-Hasegawa dengan fungsi monoton operator?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di muka, maka penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengetahui konstruksi fungsi Petz-Hasegawa.
2. Mengetahui sifat fungsi rata-rata Petz-Hasegawa.
3. Mengetahui kaitan antara fungsi Petz-Hasegawa dengan fungsi monoton operator.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan menulis skripsi ini diharapkan dapat memperoleh gambaran tentang sifat-sifat fungsi rata-rata Petz-Hasegawa. Selanjutnya dapat mengetahui kaitan antara fungsi Petz-Hasegawa, fungsi monoton matriks, dan fungsi rata-rata Petz-Hasegawa.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi lima bab. Sebagaimana diuraikan di muka, Bab 1 adalah bab pendahuluan yang berisi Latar Belakang, Rumusan Masalah, Tujuan Penelitian, Manfaat Penelitian, dan Sistematika Penulisan.

Berikutnya, Bab 2 menjelaskan teori fungsi monoton operator yang menjadi landasan masalah yang diteliti. Didalamnya dijelaskan Kemonotonan, Kekonveksan dan Kekonkafan, Fungsi Monoton Operator.

Selanjutnya, Bab 3 merupakan inti dari skripsi ini dimana di dalamnya dijelaskan fungsi rata-rata yang di dalamnya dijelaskan pengertian dan sifat-sifat dari fungsi rata-rata, pengertian fungsi Petz-Hasegawa, fungsi rata-rata Petz-Hasegawa, dan sifat keinternalan yang kemudian mengarah ke pembuktian Teorema Petz-Hasegawa.

Bagian akhir, yaitu Bab 4, merupakan penutup dari skripsi ini. Di dalamnya diuraikan kesimpulan dari skripsi ini serta rekomendasi untuk penelitian lebih lanjut.