

BAB III

KELAS-KELAS RING DAN IMPLIKASINYA

Dalam bab ini terdapat 10 kelas ring yang dibagi ke dalam tiga macam kelas ring, yakni kelas ring berdasarkan hasil operasi, kelas ring yang melibatkan polinom, dan kelas ring yang melibatkan ideal. Selain itu, dibahas juga mengenai implikasi dari kelas-kelas ring tersebut. Dalam bab ini, semua ring yang dimaksud merupakan ring dengan elemen kesatuan.

3.1 Kelas-kelas Ring Berdasarkan Hasil Operasi

Dalam subbab ini terdapat enam kelas ring yang akan ditunjukkan hubungan implikasinya. Keenam kelas ring tersebut adalah kelas ring tereduksi, kelas ring simetrik, kelas ring reversibel, kelas ring semi-komutatif, kelas ring abelian, dan kelas ring Dedekind *finite*.

Kelas ring yang pertama dalam subbab ini adalah kelas dari ring tereduksi, dengan definisinya sebagai berikut.

Definisi 3.1.1 (Kose *et al.*, 2012: 689)

Suatu ring R disebut ring tereduksi jika $a^2 = 0$ maka $a = 0$, untuk setiap $a \in R$, atau ekivalen dengan pernyataan bahwa jika $a \neq 0$ maka $a^2 \neq 0$.

Contoh

Diketahui \mathbb{Z}_5 merupakan ring.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}[1]_5 &\neq [0]_5 \Rightarrow ([1]_5)^2 = [1]_5 \neq [0]_5, \\ [2]_5 &\neq [0]_5 \Rightarrow ([2]_5)^2 = [4]_5 \neq [0]_5, \\ [3]_5 &\neq [0]_5 \Rightarrow ([3]_5)^2 = [1]_5 \neq [0]_5, \\ [4]_5 &\neq [0]_5 \Rightarrow ([4]_5)^2 = [3]_5 \neq [0]_5.\end{aligned}$$

Jadi, jika $a \neq [0]_5$ maka $a^2 \neq [0]_5$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_5$.

\mathbb{Z}_5 merupakan ring tereduksi.

Kelas ring yang kedua merupakan kelas dari ring simetrik. Berikut ini merupakan definisi dari ring simetrik.

Definisi 3.1.2 (Pourteharian dan Rakminhov, 2012: 2)

Suatu ring R disebut ring simetrik jika $abc = 0$ maka $bac = 0$, untuk setiap $a, b, c \in R$.

Contoh

Diketahui bahwa \mathbb{Z}_6 merupakan ring.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}[0]_6[2]_6[3]_6 &= [0]_6 \Rightarrow [2]_6[0]_6[3]_6 = [0]_6, \\ [1]_6[2]_6[3]_6 &= [0]_6 \Rightarrow [2]_6[1]_6[3]_6 = [0]_6, \\ [0]_6[3]_6[4]_6 &= [0]_6 \Rightarrow [3]_6[0]_6[4]_6 = [0]_6, \\ [1]_6[3]_6[4]_6 &= [0]_6 \Rightarrow [3]_6[1]_6[4]_6 = [0]_6.\end{aligned}$$

Jadi, jika $abc = [0]_6$, maka $bac = [0]_6$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$.

\mathbb{Z}_6 merupakan ring simetrik.

Kelas ring yang ketiga adalah kelas ring reversibel. Berikut ini merupakan definisi dari ring reversibel.

Definisi 3.1.3 (Pourteharian dan Rakminhov, 2012: 2)

Suatu ring R disebut ring reversibel jika $ab = 0$ maka $ba = 0$, untuk setiap $a, b \in R$.

Contoh

Pada ring \mathbb{Z}_6 , misalkan $ab = [0]_6$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}_6$, sehingga terdapat kemungkinan sebagai berikut:

1. Jika salah satu dari a atau b adalah $[0]_6$, maka jelas $ba = [0]_6$.
2. Jika $a, b \neq [0]_6$.

Perhatikan bahwa

$$[2]_6[3]_6 = [0]_6$$

$$\begin{aligned}
 &= [3]_6[2]_6, \\
 [4]_6[3]_6 &= [0]_6 \\
 &= [3]_6[4]_6.
 \end{aligned}$$

Jadi, jika $ab = [0]_6$, maka $ba = [0]_6$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$.
 \mathbb{Z}_6 merupakan ring reversibel.

Selanjutnya, kelas ring yang keempat adalah kelas ring semi-komutatif, dengan definisi sebagai berikut.

Definisi 3.1.4 (Camillo dan Nielsen, 2008: 599)

Suatu ring R disebut ring semi-komutatif jika $ab = 0$ maka $aRb = 0$, untuk setiap $a, b \in R$.

Contoh

Pada ring \mathbb{Z}_4 , misalkan $ab = [0]_4$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}_4$, sehingga terdapat kemungkinan sebagai berikut:

1. Jika salah satu dari a dan b adalah $[0]_4$.

Misalkan $a = [0]_4$, maka $a\mathbb{Z}_4 = [0]_4$, sehingga $a\mathbb{Z}_4 b = [0]_4$.

2. Jika $a, b \neq [0]_4$, maka $ab = [0]_4 \Leftrightarrow a = b = [2]_4$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 [2]_4[0]_4[2]_4 &= [0]_4, \\
 [2]_4[1]_4[2]_4 &= [2]_4[2]_4 \\
 &= [0]_4, \\
 [2]_4[2]_4[2]_4 &= [0]_4[2]_4 \\
 &= [0]_4, \\
 [2]_4[3]_4[2]_4 &= [2]_4[2]_4 \\
 &= [0]_4.
 \end{aligned}$$

Jadi, jika $ab = [0]_4$ maka $a\mathbb{Z}_4 b = [0]_4$.

\mathbb{Z}_4 merupakan ring semi-komutatif.

Kelas ring yang kelima dalam subbab ini adalah kelas ring abelian, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.5 (Pourteharian dan Rakminhov, 2012: 2)

Suatu ring R disebut ring abelian jika setiap elemen idempotennya merupakan *central*, yakni $ea = ae$ untuk setiap idempoten e dan $a \in R$.

Contoh

Pada himpunan bilangan real \mathbb{R} , elemen nilpoten adalah 0 dan 1.

Perhatikan bahwa untuk setiap $r \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned} 0r &= 0 = r0, \text{ dan} \\ 1r &= r = r1. \end{aligned}$$

Jadi \mathbb{R} merupakan ring abelian.

Dalam teorema berikut ini ditunjukkan hubungan implikasi dari kelas lima ring yang telah didefinisikan di atas.

Teorema 3.1.6 (Pourteharian dan Rakminhov, 2012: 3)

Misalkan R suatu ring. Hubungan implikasi pada R berikut ini benar:

Tereduksi \Rightarrow Simetrik \Rightarrow Reversibel \Rightarrow Semi-komutatif \Rightarrow Abelian.

Bukti

1. Tereduksi \Rightarrow Simetrik.

Misalkan R suatu ring tereduksi, $a, b, c \in R$, sedemikian sehingga $abc = 0$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} abc = 0 &\Rightarrow c(abc)ab = 0 \\ &\Rightarrow cabcab = 0 \\ &\Rightarrow (cab)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (cab) = 0 \text{ (karena } R \text{ tereduksi)} \\ &\Rightarrow aba(cab)ac = 0 \\ &\Rightarrow (abac)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow abac = 0 \text{ (karena } R \text{ tereduksi)}$$

$$\Rightarrow bacb(abac)ba = 0$$

$$\Rightarrow (bacba)^2 = 0$$

$$\Rightarrow bacba = 0 \text{ (karena } R \text{ tereduksi)}$$

$$\Rightarrow (bacba)c = 0$$

$$\Rightarrow (bac)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (bac) = 0 \text{ (karena } R \text{ tereduksi).}$$

Karena $abc = 0$ mengakibatkan $bac = 0$ untuk setiap $a, b, c \in R$, maka terbukti R ring simetrik.

2. Simetrik \Rightarrow Reversibel.

Misalkan R ring simetrik dan $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Perhatikan bahwa

$$ab = 0 \Rightarrow ab(1) = 0$$

$$\Rightarrow ba(1) = 0 \text{ (karena } R \text{ simetrik)}$$

$$\Rightarrow ba = 0.$$

Karena $ab = 0$ mengakibatkan $ba = 0$ untuk setiap $a, b \in R$, maka terbukti R ring reversibel.

3. Reversibel \Rightarrow Semi-komutatif.

Misalkan R suatu ring reversibel dan $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Karena R ring reversibel, maka $ba = 0$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $c \in R$, berlaku

$$c(ba) = 0 \Rightarrow (cb)a = 0$$

$$\Rightarrow a(cb) = 0 \text{ (karena } R \text{ reversibel)}$$

$$\Rightarrow acb = 0.$$

Karena $ab = 0$ mengakibatkan $acb = 0$, untuk setiap $c \in R$, maka $aRb = 0$, sehingga terbukti bahwa R semi-komutatif.

4. Semi-komutatif \Rightarrow Abelian.

Misalkan R suatu ring semi-komutatif, dan e suatu elemen idempoten dari R .

Perhatikan bahwa untuk setiap $a \in R$,

$$e^2 = e \Rightarrow e^2 - e = 0 \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow e(e - 1) = 0 \\
 &\Rightarrow ea(e - 1) = 0 \text{ (karena } R \text{ semi-komutatif)} \\
 &\Rightarrow eae - ea = 0 \\
 &\Rightarrow ea = eae. \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Dari (3.1), diperoleh

$$\begin{aligned}
 (e - 1)e = 0 &\Rightarrow (e - 1)ae = 0 \text{ (karena } R \text{ semi-komutatif)} \\
 &\Rightarrow eae - ae = 0 \\
 &\Rightarrow eae = ae. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.2) dan (3.3), maka $ea = eae = ae$,

akibatnya e merupakan *central* di R , sehingga R ring abelian.

Jadi terbukti bahwa hubungan implikasi yang dinyatakan di atas adalah benar. ■

Selanjutnya, kelas ring yang terakhir dalam subbab ini adalah kelas ring Dedekind *finite*, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.7 (Camillo dan Nielsen, 2008: 606)

Suatu ring R disebut ring Dedekind *finite* jika $ab = 1$, maka $ba = 1$, untuk setiap $a, b \in R$.

Contoh

Dapat ditunjukkan bahwa \mathbb{Z}_5 merupakan ring Dedekind *finite*.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 [2]_5[3]_5 &= [1]_5 \Rightarrow [3]_5[2]_5 = [1]_5, \\
 [4]_5[4]_5 &= [1]_5 \Rightarrow [4]_5[4]_5 = [1]_5.
 \end{aligned}$$

Jadi \mathbb{Z}_5 merupakan ring Dedekind *finite*.

Dalam proposisi berikut ini, ditunjukkan hubungan dari kelas ring abelian dan kelas ring Dedekind *finite*.

Proposisi 3.1.8 (Camillo dan Nielsen, 2008: 606)

Jika R merupakan ring abelian, maka R merupakan ring Dedekind *finite*.

Bukti

Misalkan $a, b \in R$ dengan $ab = 1$, akan ditunjukkan bahwa $ba = 1$.

Karena $ab = 1$, maka

$$\begin{aligned}(ab)^2 &= 1 \\ &= ab,\end{aligned}$$

sehingga ab merupakan suatu idempoten di R .

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(ba)^2 &= baba \\ &= b1a \\ &= ba,\end{aligned}$$

sehingga ba merupakan suatu idempoten di R .

Karena R ring abelian maka ba adalah *central*, dan berdasarkan Lemma 2.1.3, didapat

$$\begin{aligned}baR(1 - ba) &= 0 \Rightarrow bab(1 - ba) = 0 \\ &\Rightarrow a(bab(1 - ba)) = 0 \\ &\Rightarrow abab(1 - ba) = 0 \\ &\Rightarrow 1(1 - ba) = 0 \\ &\Rightarrow 1 - ba = 0 \\ &\Rightarrow ba = 1.\end{aligned}$$

Akibatnya, jika $ab = 1$, maka $ba = 1$, untuk setiap $a, b \in R$.

Jadi terbukti, jika R ring abelian maka R merupakan ring Dedekind *finite*. ■

Jadi dalam subbab ini telah ditunjukkan hubungan implikasi dari keenam kelas ring tersebut. Dalam subbab berikutnya dijelaskan kelas ring yang lainnya.

3.2 Kelas-kelas Ring Melibatkan Polinom

Dalam subbab ini terdapat dua kelas ring yang dalam definisinya melibatkan polinom, dan akan ditunjukkan hubungan implikasinya. Kedua kelas ring tersebut yakni kelas ring McCoy dan kelas ring Armendariz, dengan definisinya sebagai berikut.

Definisi 3.2.1 (Camillo dan Nielsen, 2008: 599)

Suatu ring R disebut ring McCoy kanan jika untuk setiap polinom tak nol di $R[x]$, yakni

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \text{ dan} \\ g(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m, \end{aligned}$$

sedemikian sehingga

$$f(x)g(x) = 0,$$

maka terdapat suatu elemen tak nol $r \in R$ sedemikian sehingga $f(x)r = 0$.

Suatu ring R disebut ring McCoy kiri jika untuk setiap polinom tak nol di $R[x]$, yakni $f(x), g(x)$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka terdapat suatu elemen tak nol $s \in R$ sedemikian sehingga $s(g(x)) = 0$.

Suatu ring R disebut ring McCoy jika R merupakan ring McCoy kanan dan McCoy kiri.

Ring berikut ini merupakan bentuk khusus dari ring McCoy dimana polinomnya merupakan polinom linier.

Definisi 3.2.2 (Camillo dan Nielsen, 2008: 606)

Suatu ring R disebut ring McCoy linier kanan jika untuk setiap polinom linier tak nol di $R[x]$, yakni

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x, \text{ dan} \\ g(x) &= b_0 + b_1x, \end{aligned}$$

sedemikian sehingga

$$f(x)g(x) = 0,$$

maka terdapat suatu elemen tak nol $r \in R$ sedemikian sehingga $f(x)r = 0$.

Suatu ring R disebut ring McCoy linier kiri jika untuk setiap polinom linier tak nol di $R[x]$, yakni $f(x), g(x)$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka terdapat suatu elemen tak nol $s \in R$ sedemikian sehingga $s(g(x)) = 0$.

Jika ring R merupakan ring McCoy linier kanan dan McCoy linier kiri, maka ring R disebut ring McCoy linier.

Contoh

Diketahui bahwa $M_2(\mathbb{R})$ merupakan ring. Misalkan dua polinom atas $M_2(\mathbb{R})$ yakni $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x$, dan $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x \right) \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x \right) \\
 &\quad + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x \right) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x \\
 &\quad + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x^2 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Andaikan terdapat $r = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, sedemikian sehingga $f(x)r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= f(x)r = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x \right) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} -a+c & -b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow a &= 0, b = 0, \quad \text{dan} \quad -a + c = 0, -b + d = 0 \\
 \Leftrightarrow a &= b = c = d = 0 \\
 \Rightarrow r &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ini kontradiksi, akibatnya tidak ada $r \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yang memenuhi $f(x)r = 0$.

Jadi $M_2(\mathbb{R})$ bukanlah ring McCoy linier.

Proposisi 3.2.3 (Camillo dan Nielsen, 2008: 607)

Semua ring semi-komutatif adalah ring McCoy linier.

Bukti

Misalkan R ring semi-komutatif, dan dua polinom linier tak nol, yakni

$$f(x) = a_0 + a_1x, \quad g(x) = b_0 + b_1x \in R[x],$$

dengan $f(x)g(x) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_1b_1x^2 \\ &= 0 \\ \Rightarrow a_0b_0 &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \tag{3.5}$$

$$a_1b_1 = 0. \tag{3.6}$$

Akan ditunjukkan terdapat $r, s \neq 0 \in R$, sedemikian sehingga

$$f(x)r = s(g(x)) = 0.$$

Kondisi 1:

Jika $a_0 = 0$ dan $b_0 \neq 0$, maka $f(x) = a_1x$, sehingga

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_1x)(b_0 + b_1x) \\ &= a_1b_0x + a_1b_1x^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $a_1b_0x + a_1b_1x^2 = 0$, maka $a_1b_0 = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} f(x)b_0 &= (a_1x)b_0 \\ &= a_1b_0x \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$f(x)b_1 = (a_1x)b_1$$

$$= a_1b_1x$$

$$= 0,$$

$$a_1(g(x)) = a_1(b_0 + b_1x)$$

$$= a_1b_0 + a_1b_1x$$

$$= 0.$$

Akibatnya terdapat $b_0, b_1, a_1 \neq 0 \in R$ sedemikian sehingga

$$f(x)b_0 = f(x)b_1 = a_1(g(x)) = 0.$$

Kondisi 2:

Jika, $a_0 \neq 0$ dan $b_0 = 0$ maka $g(x) = b_1x$, sehingga

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x)b_1x = 0 \\ &\Rightarrow a_0b_1x + a_1b_1x^2 = 0 \\ &\Rightarrow a_0b_1 = 0 \\ &\Rightarrow a_0b_1 + a_1b_1x = 0 \\ &\Rightarrow (a_0 + a_1x)b_1 = 0 \\ &\Rightarrow f(x)b_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Berdasarkan (3.7) dan (3.6), maka

$$\begin{aligned} a_0(g(x)) &= a_0b_1x = 0, \text{ dan} \\ a_1(g(x)) &= a_1b_1x = 0. \end{aligned}$$

Akibatnya terdapat $b_1, a_0, a_1 \neq 0 \in R$ sedemikian sehingga

$$f(x)b_1 = a_0(g(x)) = a_1(g(x)) = 0.$$

Kondisi 3:

Jika $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$, dan $f(x)b_0 = 0$, maka

$$\begin{aligned} 0 &= f(x)b_0 \\ &= (a_0 + a_1x)b_0 \\ &= a_0b_0 + a_1b_0x \\ &\Rightarrow a_1b_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dari (3.5) dan (3.8), didapat

$$a_0b_1 = 0, \tag{3.9}$$

sehingga

$$\begin{aligned} a_0(g(x)) &= a_0(b_0 + b_1x) \\ &= a_0b_0 + a_0b_1x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dari (3.6), (3.8), dan (3.9), didapat

$$\begin{aligned} a_1(g(x)) &= a_1(b_0 + b_1x) \\ &= a_1b_0 + a_1b_1x \end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$\begin{aligned} f(x)b_1 &= (a_0 + a_1x)b_1 \\ &= a_0b_1 + a_1b_1x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Akibatnya terdapat $a_0, a_1, b_0, b_1 \neq 0 \in R$, sedemikian sehingga

$$f(x)b_0 = f(x)b_1 = a_0(g(x)) = a_1(g(x)) = 0.$$

Kondisi 4:

Jika $a_0 \neq 0$ dan $b_0 \neq 0$, dan $f(x)b_0 \neq 0$ maka

$$\begin{aligned} f(x)b_0 &= (a_0 + a_1x)b_0 \\ &= a_0b_0 + a_1b_0x \neq 0 \\ \Rightarrow a_0b_0 &\neq 0 \text{ atau } a_1b_0 \neq 0 \\ \Rightarrow a_1b_0 &\neq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dari (3.5) dan (3.10), didapat

$$a_0b_1 \neq 0. \tag{3.11}$$

Dari (3.4), (3.6), dan karena R semi-komutatif maka

$$a_0a_1b_0 = 0, \tag{3.12}$$

$$a_0b_1b_0 = 0, \tag{3.13}$$

$$a_1a_0b_1 = 0, \tag{3.14}$$

$$a_1b_0b_1 = 0. \tag{3.15}$$

Jika a_1 dikalikan (3.5), didapat

$$\begin{aligned} a_1(a_0b_1 + a_1b_0) &= a_10 \Rightarrow a_1a_0b_1 + a_1a_1b_0 = 0 \\ &\Rightarrow 0 + a_1a_1b_0 = 0 \text{ (berdasarkan (3.14))} \\ &\Rightarrow a_1a_1b_0 = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Jika (3.5) dikalikan b_1 , didapat

$$\begin{aligned} (a_1b_0 + a_0b_1)b_1 &= 0b_1 \Rightarrow a_1b_0b_1 + a_0b_1b_1 = 0 \\ &\Rightarrow 0 + a_0b_1b_1 = 0 \text{ (berdasarkan (3.15))} \\ &\Rightarrow a_0b_1b_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Berdasarkan (3.12) dan (3.16), maka

$$\begin{aligned} a_0a_1b_0 + (a_1a_1b_0)x &= 0 \Rightarrow (a_0 + a_1x)a_1b_0 = 0 \\ &\Rightarrow f(x)(a_1b_0) = 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.13) dan (3.17), maka

$$\begin{aligned} a_0 b_1 b_0 + (a_0 b_1 b_1)x = 0 &\Rightarrow a_0 b_1(b_0 + b_1)x = 0 \\ &\Rightarrow a_0 b_1(g(x)) = 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.10) dan (3.11), maka terdapat $a_1 b_0, a_0 b_1 \neq 0 \in R$, sedemikian sehingga

$$f(x)(a_1 b_0) = a_0 b_1(g(x)) = 0.$$

Dari masing-masing kondisi di atas, terbukti terdapat $r, s \neq 0 \in R$, sedemikian sehingga $f(x)r = 0$ dan $s(g(x)) = 0$, artinya R merupakan ring McCoy linier.

Jadi terbukti jika R merupakan ring semi-komutatif, maka R merupakan ring McCoy linier. ■

Dalam proposisi berikut ini ditunjukkan hubungan dari kelas ring McCoy linier kanan dengan kelas ring Dedekind *finite*.

Proposisi 3.2.4 (Camillo dan Nielsen, 2008: 606)

Jika R merupakan suatu ring McCoy linier kanan, maka R merupakan ring Dedekind *finite*.

Bukti

Akan dibuktikan dengan kontrapositif, yakni jika R bukan ring Dedekind *finite*, maka R bukan ring McCoy linier kanan.

Karena R bukan Dedekind *finite*, maka ada $a, b \in R$ dengan $ab = 1$, tetapi $ba \neq 1$.

$$\begin{aligned} ba \neq 1 &\Rightarrow 1 - ba \neq 0, \\ &\Rightarrow a + (1 - ba)x \neq 0, \text{ dan} \\ &\quad (1 - ba) - b(1 - ba)x \neq 0. \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} f(x) &= a + (1 - ba)x \neq 0 \in R[x], \text{ dan} \\ g(x) &= (1 - ba) - b(1 - ba)x \neq 0 \in R[x], \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= (a + (1 - ba)x)g(x) \\
 &= (a + x - bax)g(x) \\
 &= a(g(x)) + x(g(x)) + (-bax(g(x))).
 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 a(g(x)) &= a((1 - ba) - b(1 - ba)x) \\
 &= a(1 - ba - bx + bbax) \\
 &= (a - aba - abx + abbax) \\
 &= (a - a - x + bax) \\
 &= (-x + bax).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 x(g(x)) &= x((1 - ba) - b(1 - ba)x) \\
 &= x(1 - ba - bx + bbax) \\
 &= (x - bax - bx^2 + bbax^2).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
 -bax(g(x)) &= -bax((1 - ba) - b(1 - ba)x) \\
 &= -bax(1 - ba - bx + bbax) \\
 &= (-bax + babax + babx^2 - babbax^2) \\
 &= (-bax + bax + bx^2 - bbax^2) \\
 &= (bx^2 - bbax^2).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Dari (3.18), (3.19), dan (3.20), didapat

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= a(g(x)) + x(g(x)) + (-bax(g(x))) \\
 &= (-x + bax) + (x - bax - bx^2 + bbax^2) + (bx^2 - bbax^2) \\
 &= -x + x + bax - bax - bx^2 + bx^2 + bbax^2 - bbax^2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya andaikan bahwa R merupakan ring McCoy linier kanan, sehingga terdapat $r \neq 0 \in R$ sedemikian sehingga $f(x)r = 0$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $r \in R$, berlaku:

$$\begin{aligned}
 0 = f(x)r &= (a + (1 - ba)x)r \\
 &= ar + ((1 - ba)r)x \\
 \Rightarrow ar &= 0 \text{ dan } (1 - ba)r = 0 \\
 \Rightarrow r - bar &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r - b_0 = 0$$

$$\Rightarrow r - 0 = 0$$

$$\Rightarrow r = 0.$$

Ini kontradiksi dengan pernyataan bahwa terdapat $r \neq 0 \in R$ sedemikian sehingga $f(x)r = 0$. Akibatnya tidak ada $r \neq 0 \in R$ yang memenuhi $f(x)r = 0$, sehingga R bukan ring McCoy linier kanan.

Jadi terbukti, jika R bukan ring Dedekind *finite*, maka R bukan ring McCoy linier kanan. ■

Kelas ring yang selanjutnya adalah kelas ring Armendariz, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.2.5 (Camillo dan Nielsen, 2008: 599)

Suatu ring R disebut ring Armendariz jika untuk setiap $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in R[x]$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap $i = 0, 1, \dots, n$ dan $j = 0, 1, \dots, m$.

Contoh

Misalkan $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dengan

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \text{ dan}$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m,$$

sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$.

Karena \mathbb{Z} adalah daerah integral, maka $\mathbb{Z}[x]$ juga adalah daerah integral, sehingga

$$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ atau } g(x) = 0.$$

Pilih $f(x) = 0$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ \Rightarrow a_0 &= a_1 = \dots = a_n = 0 \\ \Rightarrow a_i b_j &= 0, \text{ untuk setiap } i, j. \end{aligned}$$

Jadi \mathbb{Z} merupakan ring Armendariz.

Ring berikut ini merupakan bentuk khusus dari ring Armendariz dimana polinomnya merupakan polinom linier.

Definisi 3.2.6 (Antoine, 2009: 4132)

Suatu ring R disebut Armendariz linier jika untuk setiap $f(x) = a_0 + a_1x$, dan $g(x) = b_0 + b_1x \in R[x]$, sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka $a_i b_j = 0$, untuk $i, j \in \{0,1\}$.

Contoh

Misalkan $f(x) = [a_0]_3 + [a_1]_3x$, dan

$$g(x) = [b_0]_3 + [b_1]_3x \in \mathbb{Z}_3[x],$$

sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, akibatnya

$$[a_0 b_0]_3 = [0]_3, \quad (3.21)$$

$$[a_1 b_0 + a_0 b_1]_3 = [0]_3, \quad (3.22)$$

$$[a_1 b_1]_3 = [0]_3. \quad (3.23)$$

Karena $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan polinom berderajat 1, maka

$$[a_1]_3 \neq [0]_3 \text{ dan}$$

$$[b_1]_3 \neq [0]_3.$$

Dari (3.21), mengakibatkan $[a_0]_3 = [0]_3$ atau $[b_0]_3 = [0]_3$.

Kasus 1: Jika $[a_0]_3 = [0]_3$ dan $[b_0]_3 = [0]_3$, maka

$$[a_1 b_0]_3 = [0]_3,$$

$$[a_0 b_1]_3 = [0]_3.$$

Kasus 2: Jika salah satunya tak nol.

Misalkan $[a_0]_3 \neq [0]_3$ dan $[b_0]_3 = [0]_3$, maka

$$[a_1 b_0]_3 = [a_1]_3 [b_0]_3$$

$$= [0]_3,$$

dan berdasarkan (3.22), maka

$$[0]_3 = [a_1 b_0]_3 + [a_0 b_1]_3$$

$$= [0]_3 + [a_0 b_1]_3$$

$$= [a_0 b_1]_3.$$

Dari kedua kasus tersebut, didapat

$$[a_1 b_0]_3 = [a_0 b_1]_3 = [0]_3. \quad (3.24)$$

Berdasarkan (3.21), (3.23), dan (3.24), maka

$$[a_0 b_0]_3 = [a_1 b_1]_3 = [a_1 b_0]_3 = [a_0 b_1]_3 = [0]_3.$$

Jadi \mathbb{Z}_3 merupakan ring Armendariz linier.

Dalam proposisi berikut ini ditunjukkan hubungan dari kelas ring Armendariz dengan kelas ring tereduksi.

Proposisi 3.2.7 (Pourteharian dan Rakminhov, 2012: 2)

Jika ring R merupakan ring tereduksi, maka ring R merupakan ring Armendariz.

Bukti

Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, dan

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in R[x],$$

sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \\ &\quad + a_nb_mx^{m+n} \\ &= 0, \\ \Leftrightarrow \quad a_0b_0 &= 0, \quad (\text{konstanta}) \\ a_0b_1 + a_1b_0 &= 0, \quad (\text{koefisien } x) \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0, \quad (\text{koefisien } x^2) \\ &\vdots \\ a_nb_mx^{m+n} &= 0. \quad (\text{koefisien } x^{m+n}) \end{aligned}$$

Karena R merupakan ring tereduksi, dan berdasarkan Teorema 3.1.6, maka R merupakan ring reversibel, sehingga $a_0b_0 = 0$ mengakibatkan $b_0a_0 = 0$.

Perhatikan bahwa

1. Persamaan untuk koefisien x :

$$\begin{aligned}
 a_0b_1 + a_1b_0 &= 0 \Rightarrow b_0(a_0b_1 + a_1b_0) = 0 \\
 &\Rightarrow b_0a_0b_1 + b_0a_1b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow 0b_1 + b_0a_1b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow b_0a_1b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow a_1(b_0a_1b_0) = 0 \\
 &\Rightarrow (a_1b_0)^2 = 0 \\
 &\Rightarrow a_1b_0 = 0 \quad (\text{karena } R \text{ ring tereduksi}) \\
 &\Rightarrow b_0a_1 = 0. \quad (\text{karena } R \text{ ring reversibel})
 \end{aligned}$$

Persamaan yang tersisa untuk koefisien x adalah

$$a_0b_1 = 0.$$

2. Persamaan untuk koefisien x^2 :

$$\begin{aligned}
 a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0 \Rightarrow b_0(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) = 0 \\
 &\Rightarrow b_0a_0b_2 + a_2b_0a_1b_1 + a_2b_0a_2b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow 0b_2 + 0b_1 + b_0a_2b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow b_0a_2b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow a_2(b_0a_2b_0) = 0 \\
 &\Rightarrow (a_2b_0)^2 = 0 \\
 &\Rightarrow a_2b_0 = 0 \quad (\text{karena } R \text{ ring tereduksi}) \\
 &\Rightarrow b_0a_2 = 0. \quad (\text{karena } R \text{ ring reversibel})
 \end{aligned}$$

Persamaan yang tersisa untuk koefisien x^2 adalah

$$a_0b_2 + a_1b_1 = 0.$$

3. Persamaan untuk koefisien x^3 :

$$\begin{aligned}
 a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 &= 0 \\
 &\Rightarrow b_0(a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0) = 0 \\
 &\Rightarrow b_0a_0b_3 + b_0a_1b_2 + b_0a_2b_1 + b_0a_3b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow 0b_3 + 0b_2 + 0b_1 + b_0a_3b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow b_0a_3b_0 = 0 \\
 &\Rightarrow a_3(b_0a_3b_0) = 0 \\
 &\Rightarrow (a_3b_0)^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_3 b_0 = 0 \quad (\text{karena } R \text{ ring tereduksi})$$

$$\Rightarrow b_0 a_3 = 0. \quad (\text{karena } R \text{ ring reversibel})$$

Persamaan yang tersisa untuk koefisien x^3 adalah

$$a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0.$$

4. Jika langkah 1, 2, dan 3 diteruskan sampai koefisien x^n , maka akan didapat $a_n b_0 = 0$, akibatnya $a_i b_0 = 0$, untuk setiap $1 \leq i \leq n$, dan persamaan yang tersisa untuk koefisien x^n adalah

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 = 0.$$

Jadi persamaan-persamaan yang tersisa untuk masing-masing koefisien adalah

$$\begin{aligned} a_0 b_1 &= 0, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 &= 0, \\ a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 &= 0, \\ &\vdots \\ a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 &= 0. \end{aligned}$$

Karena $a_0 b_1 = 0$, maka $b_1 a_0 = 0$ (R ring reversibel), dan dengan cara yang serupa seperti keempat langkah di atas, akan didapat

$$a_i b_1 = 0, \text{ untuk setiap } 0 \leq i \leq n - 1.$$

Jika diteruskan, maka akan didapat $a_i b_j = 0$ untuk setiap $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, sehingga R merupakan ring Armendariz.

Jadi terbukti jika R merupakan ring tereduksi, maka R merupakan ring Armendariz. ■

Selanjutnya, Proposisi 3.2.7 dan Akibat 3.2.8 berikut ini menunjukkan hubungan kelas ring Armendariz dengan kelas ring McCoy dan kelas ring abelian.

Proposisi 3.2.8 (Camillo dan Nielsen, 2008: 600)

Jika ring R merupakan ring Armendariz, maka ring R merupakan ring McCoy.

Bukti

Barry Yonathan, 2013

Kelas Ring Dan Implikasinya Serta Modul Semi-Komunikatif Dan P.Q-Baer
Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

Misalkan $f(x), g(x) \in R[x]$ merupakan polinom tak nol, sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa R merupakan ring McCoy linier kanan dan McCoy linier kiri, yakni terdapat $r, s \neq 0 \in R$, sedemikian sehingga

$$f(x)r = 0 \text{ dan } s(g(x)) = 0.$$

Karena $f(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \neq 0$, dan

$$g(x) = (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) \neq 0,$$

maka $a_n \neq 0$ dan $b_m \neq 0$.

Karena R Armendariz, maka $a_i b_j = 0$ untuk setiap i dan j .

1. Dari $a_i b_j = 0$, pilih $j = m$ sehingga $a_i b_m = 0$ untuk setiap i .

Akibatnya $a_0 b_m + a_1 b_m x + \dots + a_n b_m x^n = 0 \Rightarrow f(x)b_m = 0$.

Karena ada $b_m \neq 0 \in R$ sedemikian sehingga $f(x)b_m = 0$,

maka R adalah ring McCoy kanan.

2. Dari $a_i b_j = 0$, pilih $i = n$ sehingga $a_n b_j = 0$ untuk setiap j .

Akibatnya $a_n b_0 + a_n b_1 x + \dots + a_n b_m x^m = 0 \Rightarrow a_n(g(x)) = 0$.

Karena ada $a_n \neq 0 \in R$ sedemikian sehingga $a_n(g(x)) = 0$,

maka R adalah ring McCoy kiri.

Karena R adalah ring McCoy kanan dan McCoy kiri, maka R adalah ring McCoy.

Jadi terbukti jika R ring Armendariz maka R merupakan ring McCoy. ■

Akibat 3.2.9

Jika R merupakan ring Armendariz linier, maka R merupakan ring McCoy linier.

Bukti

Misalkan $f(x), g(x)$ polinom linier tak nol di $R[x]$

$$f(x) = a_0 + a_1x \neq 0, \text{ dan } g(x) = b_0 + b_1x \neq 0. \quad (3.25)$$

Akan ditunjukkan bahwa terdapat $r, s \neq 0 \in R[x]$, sedemikian sehingga

$$f(x)r = s(g(x)) = 0.$$

Karena R merupakan ring Armendariz linier, maka

$$a_0 b_0 = a_0 b_1 = a_1 b_0 = a_1 b_1 = 0.$$

Berdasarkan (3.25), maka $a_1, b_1 \neq 0$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} f(x)b_1 &= (a_0 + a_1x)b_1 \\ &= a_0 b_1 + a_1 b_1 x \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1(g(x)) &= a_1(b_0 + b_1x) \\ &= a_1 b_0 + a_1 b_1 x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $a_1, b_1 \neq 0$ dan $f(x)b_1 = a_1(g(x)) = 0$, maka terbukti bahwa R merupakan ring McCoy linier.

Jadi jika R adalah ring Armendariz linier, maka R adalah ring McCoy linier. ■

Proposisi 3.2.10 (Camillo dan Nielsen, 2008: 611)

Jika R adalah ring Armendariz linier, maka R adalah ring abelian.

Bukti

Akan dibuktikan dengan kontrapositif, yakni jika R bukan ring abelian maka R bukan ring Armendariz linier.

Karena R bukan ring abelian, maka terdapat suatu idempoten e yang bukan *central* di R , sehingga $e(ea) \neq (ea)e$, untuk suatu $a \in R$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} e(ea) \neq (ea)e &\Rightarrow e^2a \neq eae \\ &\Rightarrow ea \neq eae \\ &\Rightarrow ea - eae \neq 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Misalkan

$$f(x) = e - ea(1 - e)x, \text{ dan}$$

$$g(x) = (1 - e) + ea(1 - e)x.$$

Perhatikan bahwa

$$f(x)g(x) = (e - ea(1 - e)x)g(x)$$

$$\begin{aligned}
&= e(g(x)) - (ea(1-e)x)(g(x)) \\
&= e(g(x)) - (eax - eaex)(g(x)) \\
&= e(g(x)) + (-eax + eaex)(g(x)) \\
&= e(g(x)) + (-eax)g(x) + (eaex)(g(x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(g(x)) &= e((1-e) + ea(1-e)x) \\
&= e(1-e) + e(ea(1-e)x) \\
&= (e - e^2) + (e^2ax - e^2aex) \\
&= (e - e) + (eax - eaex) \quad (\text{karena } e \text{ idempoten}) \\
&= eax - eaex.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
-eax(g(x)) &= -eax((1-e) + ea(1-e)x) \\
&= -eax(1-e) + (-eax)ea(1-e)x \\
&= (-eax + eaex) + (-aeaex^2 + eaeaex^2).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
eaex(g(x)) &= eaex((1-e) + ea(1-e)x) \\
&= eaex(1-e) + eaex(ea(1-ex)) \\
&= (eaex - eaeex) + (eaeeeax^2 - eaeaaex^2) \\
&= (eaex - eae^2x) + (eaee^2ax^2 - eae^2aex^2) \\
&= (eaex - eaex) + (eaex^2 - eaeax^2) \quad (\text{karena } e \text{ idempoten}) \\
&= eaeax^2 - eaeaex^2.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Berdasarkan (3.27), (3.28), dan (3.29) maka

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= e(g(x)) + (-eax)(g(x)) + eaex(g(x)) \\
&= (eax - eaex) + ((-eax + eaex) + (-aeaex^2 + eaeaex^2)) \\
&\quad + (eaex^2 - eaeaex^2) \\
&= eax - eaex - eax + eaex - eaeax^2 + eaeaex^2 \\
&\quad + eaex^2 - eaeaex^2 \\
&= eax - eax - eaex + eaex - eaeax^2 + eaeax^2 \\
&\quad + eaeaex^2 - eaeaex^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Diperoleh $f(x)g(x) = 0$.

Selanjutnya andaikan bahwa R merupakan ring Armendariz, sehingga

$$\begin{aligned}
0 &= f(x)g(x) \\
&= (e - ea(1 - e)x)((1 - e) + ea(1 - e)x) \\
&= e(1 - e) + e(ea(1 - e)x) + (-ea(1 - e)x)(1 - e) \\
&\quad + (-ea(1 - e)x)(ea(1 - e)x),
\end{aligned}$$

mengakibatkan

$$\begin{aligned}
e(1 - e) &= 0, \\
e(ea(1 - e)x) &= 0, \\
(-ea(1 - e)x)(1 - e) &= 0, \\
(-ea(1 - e)x)(ea(1 - e)x) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Dari (3.30) didapat

$$\begin{aligned}
e(ea(1 - e)x) = 0 &\Rightarrow eea(1 - e)x = 0 \\
&\Rightarrow (eea - eea)e = 0 \\
&\Rightarrow eea - eea = 0 \\
&\Rightarrow ea - eae = 0. \text{ (karena } e \text{ idempoten)}
\end{aligned}$$

Ini kontradiksi dengan (3.26), sehingga haruslah R bukan ring Armendariz.

Jadi terbukti jika R bukan ring abelian, maka R bukan ring Armendariz. ■

Jadi dalam subbab ini telah dibahas hubungan dari kelas ring McCoy dengan kelas ring Armendariz, dan juga dengan kelas-kelas ring pada subbab sebelumnya.

3.3 Kelas-kelas Ring Melibatkan Ideal

Dalam subbab ini terdapat dua kelas ring yang dalam definisinya melibatkan ideal. Kedua kelas ring tersebut yakni kelas ring duo dan kelas ring 2-primal. Berikut ini merupakan definisi dari ring duo.

Definisi 3.3.1 (Camillo dan Nielsen, 2008: 612)

Suatu ring R disebut ring duo jika setiap ideal dari R merupakan ideal dua sisi.

Jika R merupakan suatu ring komutatif, maka jelas setiap ideal dari R adalah ideal dua sisi, sehingga setiap ring komutatif merupakan ring duo. Salah satu contohnya adalah sebagai berikut:

Contoh

Seluruh ideal dari \mathbb{Z}_6 adalah ideal dua sisi, yakni $[0]_6$, $\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$, $\{[0]_6, [3]_6\}$, dan \mathbb{Z}_6 .

Perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 3.1. Pengurangan pada $\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$

(-)	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$
$[2]_6$	$[2]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$
$[4]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$	$[0]_6$

Tabel 3.2. Perkalian $\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ dengan \mathbb{Z}_6

\otimes	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$
$[2]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$	$[0]_6$	$[2]_6$	$[4]_6$
$[4]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$	$[0]_6$	$[4]_6$	$[2]_6$

Berdasarkan Tabel 3.1, Tabel 3.2, dan karena \mathbb{Z}_6 adalah ring komutatif, maka $\{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ merupakan ideal dua sisi dari \mathbb{Z}_6 .

Selanjutnya perhatikan tabel-tabel berikut ini:

Tabel 3.3. Pengurangan pada $\{[0]_6, [3]_6\}$

(-)	$[0]_6$	$[3]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$
$[3]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$

Tabel 3.4. Perkalian $\{[0]_6, [3]_6\}$ dengan \mathbb{Z}_6

\otimes	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$	$[0]_6$
$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$	$[0]_6$	$[3]_6$

Berdasarkan Tabel 3.3, Tabel 3.4, dan karena \mathbb{Z}_6 adalah ring komutatif, maka $\{[0]_6, [3]_6\}$ merupakan ideal dua sisi dari \mathbb{Z}_6 , selain itu jelas bahwa $[0]_6$ dan \mathbb{Z}_6 merupakan ideal dua sisi dari \mathbb{Z}_6 .

Jadi, karena semua ideal dari \mathbb{Z}_6 merupakan ideal dua sisi, maka \mathbb{Z}_6 merupakan ring duo.

Berikut ini merupakan contoh ring non-komutatif yang merupakan ring duo.

Contoh

Diketahui suatu ring $R = \left\{ \begin{pmatrix} [a]_2 & [b]_2 \\ [0]_2 & [d]_2 \end{pmatrix} \mid [0]_2, [a]_2, [b]_2, [c]_2 \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

Misalkan $\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \in R$,

tetapi $\begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}$.

Jadi R adalah ring non-komutatif.

Ideal-ideal dari R hanyalah ideal trivial, yakni $\begin{pmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}$ dan R .

Baik $\begin{pmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{pmatrix}$ maupun R merupakan ideal dua sisi, sehingga R dapat dikatakan sebagai ring duo.

Lemma 3.3.2 (Abdelkader, 2013: 1538)

Jika R merupakan ring duo, maka berlaku $aR = Ra$, untuk setiap $a \in R$.

Bukti

Misalkan R suatu ring duo, $xa \in Ra$, dan $ay \in aR$.

Perhatikan bahwa

$$xa = xa1 \in xaR, \text{ dan}$$

$$ay = 1ay \in Ray.$$

Karena R merupakan ring duo, maka aR merupakan ideal kiri, sehingga

$$xaR \subseteq aR, \text{ untuk setiap } x \in R,$$

dan akibatnya $Ra \subseteq aR$.

Karena R merupakan ring duo, maka Ra merupakan ideal kanan, sehingga

$$Ray \subseteq Ra, \text{ untuk setiap } y \in R,$$

dan akibatnya $aR \subseteq Ra$.

Jadi terbukti, jika R merupakan ring duo, maka $Ra = aR$ untuk setiap $a \in R$. ■

Dari Lemma 3.3.2, dapat ditunjukkan hubungan kelas ring duo dan kelas ring semi-komutatif, yang dinyatakan oleh proposisi berikut ini.

Proposisi 3.3.3 (Camillo dan Nielsen, 2008: 612)

Jika R merupakan ring duo, maka R merupakan ring semi-komutatif.

Bukti

Misalkan $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $r \in R$ berlaku

$$ab = 0 \Rightarrow abr = 0$$

$$\Rightarrow abR = 0.$$

Berdasarkan Lemma 3.3.2, maka $Rb = bR$, sehingga $aRb = abR = 0$.

Jadi terbukti bahwa jika R merupakan ring duo, maka R semi-komutatif. ■

Kelas ring yang terakhir dalam bab ini adalah kelas dari ring 2-primal.

Definisi 3.3.4 (Camillo dan Nielsen, 2008: 617)

Suatu ring disebut ring 2-primal jika setiap elemen nilpoten termuat di $P(R)$, atau dengan kata lain $N(R) \subseteq P(R)$.

Pada Lemma 2.2.11 telah ditunjukkan bahwa untuk setiap ring R , berlaku $P(R) \subseteq N(R)$, sehingga jika R merupakan ring 2-primal, maka $N(R) = P(R)$. Selanjutnya, pada proposisi berikut ini ditunjukkan hubungan kelas ring 2-primal dengan kelas ring Dedekind *finite*.

Proposisi 3.3.5 (Lam, 2003: 198)

Jika R merupakan ring 2-primal, maka R merupakan ring Dedekind *finite*.

Bukti

Misalkan $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $ba = 1$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 a - a &= 0 \Rightarrow a - 1a = 0 \\
 &\Rightarrow a - aba = 0 \\
 &\Rightarrow a(1 - ba) = 0 \\
 &\Rightarrow (1 - ba)(a(1 - ba))a = 0 \\
 &\Rightarrow ((1 - ba)a)((1 - ba)a) = 0 \\
 &\Rightarrow ((1 - ba)a)^2 = 0. \\
 &\Rightarrow (1 - ba)a \in N(R) \quad (\text{karena } (1 - ba)a \text{ nilpoten}) \\
 &\Rightarrow (1 - ba)a \in P(R) \quad (\text{karena } N(R) = P(R)) \\
 &\Rightarrow ((1 - ba)a)b \in P(R) \quad (\text{karena } P(R) \text{ ideal, Lemma 2.2.12}) \\
 &\Rightarrow (1 - ba)ab \in P(R) \\
 &\Rightarrow (1 - ba)1 \in P(R) \quad (\text{karena } ab = 1) \\
 &\Rightarrow (1 - ba) \in P(R) = N(R).
 \end{aligned}$$

Karena $(1 - ba) \in N(R)$, maka $(1 - ba)$ merupakan suatu nilpoten.

Misalkan x suatu nilpoten di R dengan $x^n = 0$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 - 0 \\
 &= 1 - x^n \\
 &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - \cdots - x^{n-1} + x^{n-1} - x^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - x - x^2 - \cdots - x^{n-1} - x^n \\
 &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) + (-x - x^2 - \cdots - x^{n-1} - x^n) \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ((1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1)) + ((1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1})(-x)) \\
 &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})(1 - x). \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.32), didapat

$$\begin{aligned}
 1 &= ((1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})) + ((-x)(1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1})) \\
 &= (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}). \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan (3.33) dan (3.34), dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang nilpoten x , bentuk $(1 - x)$ merupakan unit.

Karena $1 - ba$ nilpoten, maka $(1 - (1 - ba)) = ba$ adalah unit, sehingga terdapat $c \in R$ sedemikian sehingga $cba = 1$, dan akibatnya

$$\begin{aligned}
 1 &= cba \Rightarrow 1(ba) = cba(ba) \\
 &\Rightarrow ba = cbaba \\
 &\Rightarrow ba = cb(ab)a \\
 &\Rightarrow ba = cb1a \\
 &\Rightarrow ba = cba \\
 &\Rightarrow ba = 1.
 \end{aligned}$$

Karena $ab = 1$ mengakibatkan $ba = 1$, maka R merupakan ring Dedekind *finite*.

Jadi terbukti jika R merupakan ring 2-primal, maka R merupakan ring Dedekind *finite*. ■

Pada bab selanjutnya dibahas mengenai sejumlah modul yang merupakan perluasan konsep dari ring-ring pada bab ini.