

### BAB III

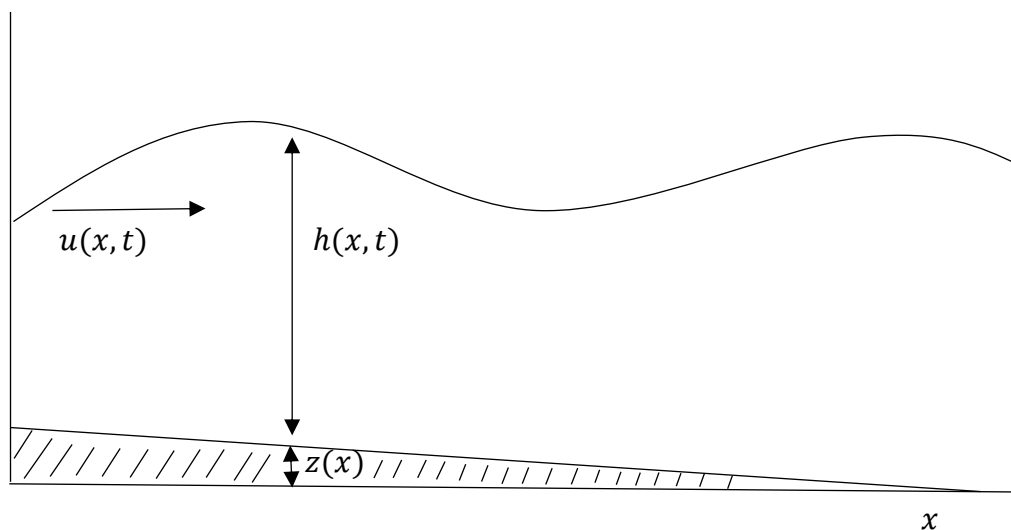
## MODEL SISTEM PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL DAN DISKRITISASI MENGGUNAKAN METODE *LAX-FRIEDRICHS*

Pada bab ini, dibahas tentang perumusan model sistem persamaan gelombang air dangkal dan penyelesaian dengan metode *Lax-Friedrich*, serta validasi.

### 3.1 Penurunan Sistem Persamaan Gelombang Air Dangkal

Pada subbab ini akan dikaji penurunan sistem persamaan gelombang air dangkal dengan variabel-variabel berikut:  $h(x, t)$  ketinggian air dihitung dari permukaan dasar topografi pada titik  $x$  di waktu  $t$ ,  $u(x, t)$  merupakan laju air pada arah horizontal di titik  $x$  dan waktu  $t$ , dan  $z(x)$  topografi tanah pada titik  $x$ . Jika topografi datar maka dituliskan  $z(x) = 0$ .

Dalam penurunan sistem persamaan gelombang air dangkal ini kecepatan vertikal fluida diabaikan dan diasumsikan bahwa fluida tidak dapat dimampatkan, serta diasumsikan pula perambatan gelombang di permukaan tidak terpengaruhi oleh angin.



Gambar 3.1. Ilustrasi keadaan fluida untuk konteks ruang satu dimensi

#### 3.1.1 Hukum Kekekalan Massa

Kekekalan massa atau konservasi massa berarti bahwa massa tidak dapat dibuat atau dihilangkan sehingga total massa pada suatu sistem selalu sama setiap

waktu (Mungkasi, 2008). Namun, massa dapat pada suatu interval dapat berubah karena fluks, yaitu aliran yang melewati setiap titik pada interval tersebut.

Penurunan persamaan untuk kekekalan massa pada sistem persamaan gelombang air dangkal pada penelitian ini diadopsi dari Sari (2016) dan Leveque (2004).

Suatu fluida pada interval  $[x_1, x_2]$  telah diasumsikan sebelumnya tidak dapat dimampatkan, sehingga densitas  $\bar{\rho}$  konstan. Dengan ketinggian  $h(x, t)$  yang bervariasi, didapat massa total dalam interval  $[x_1, x_2]$  pada waktu  $t$  adalah

$$M(t) = \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} h(x, t) dx.$$

Massa total pada interval  $[x_1, x_2]$  berubah seiring waktu. Misal,  $F_i(t)$  adalah fluida yang mengalir melewati setiap titik  $(x, t)$  pada interval  $[x_1, x_2]$  untuk  $i = 1, 2$ .  $F_1(t) > 0$  untuk aliran masuk pada interval  $[x_1, x_2]$  dan  $F_2(t) < 0$  untuk aliran yang keluar dari interval  $[x_1, x_2]$ . Maka, perubahan masa total pada interval  $[x_1, x_2]$  di titik  $x_1$  dan  $x_2$  pada waktu  $t$  sama dengan selisih fluks pada titik  $x_1$  dan  $x_2$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} h(x, t) dx = F_1(t) - F_2(t), \quad (3.1)$$

$+F_1(t)$  dan  $-F_2(t)$  keduanya mewakili fluks pada titik  $x_1$  dan  $x_2$ .

Aliran yang melewati suatu titik merupakan perkalian massa dengan kecepatan. Kita dapat menuliskan fungsi fluks ini sebagai

$$F_i(t) = u(x, t) \bar{\rho} h(x, t).$$

Karena itu, didapat

$$F_1(t) = u(x_1, t) \bar{\rho} h(x_1, t)$$

dan

$$F_2(t) = u(x_2, t) \bar{\rho} h(x_2, t).$$

Sehingga, persamaan (3.1) dapat ditulis kembali sebagai:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} h(x, t) dx = u(x_1, t) \bar{\rho} h(x_1, t) - u(x_2, t) \bar{\rho} h(x_2, t) \quad (3.2)$$

Ruas kanan persamaan (3.2) dapat ditulis ulang menggunakan notasi standar dari kalkulus:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} h(x, t) dx = -u(x, t) \bar{\rho} h(x, t) \Big|_{x_1}^{x_2}. \quad (3.3)$$

Karena fungsi  $u(x, t)\bar{\rho}h(x, t)$  merupakan *smooth function* yaitu fungsi yang memiliki turunan kontinu, maka persamaan (3.3) dapat ditulis

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}h(x, t) dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\bar{\rho}h(x, t) dx. \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}h(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\bar{\rho}h(x, t) dx &= 0 \\ \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\bar{\rho}h(x, t) \right] dx &= 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Karena integral pada persamaan (3.4) harus bernilai nol pada interval  $[x_1, x_2]$  dengan  $x_1 < x_2$ , maka fungsi yang diintegrasikan harus identik nol, maka

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)\bar{\rho}h(x, t) = 0.$$

Karena  $\bar{\rho}$  konstan, maka didapat

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)h(x, t) = 0,$$

atau dapat ditulis dengan

$$h_t + (uh)_x = 0.\quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) disebut persamaan diferensial dari hukum kekekalan massa satu dimensi.

### 3.1.2 Hukum Kekekalan Momentum

Penurunan persamaan untuk kekekalan massa pada sistem persamaan gelombang air dangkal pada penelitian ini diadopsi dari Mungkasi (2008) dan Leveque (2004).

Tripler (1998) mengatakan bahwa momentum didefinisikan sebagai hasil kali massa dengan kecepatan dan Hukum Kedua Newton menyatakan bahwa gaya sama dengan perkalian massa dengan percepatan. Sehingga dari keduanya didapatkan hubungan sebagai berikut

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = ma = F.$$

Selanjutnya, pada penurunan persamaan untuk kekekalan momentum pada sistem persamaan gelombang air dangkal ini akan digunakan persamaan (2.8) yaitu

$$F = \frac{dp}{dt}$$

di mana gaya  $F$  sama dengan turunan pertama momentum ( $p$ ) terhadap waktu ( $t$ ).

Momentum merupakan perkalian massa ( $\bar{\rho}h(x, t)$ ) dengan kecepatan ( $u(x, t)$ ), artinya  $\bar{\rho}h(x, t)u(x, t)$ . Sehingga didapat total momentum pada interval  $[x_1, x_2]$  merupakan hasil integral  $\bar{\rho}h(x, t)u(x, t)$ . Sehingga momentum pada interval  $[x_1, x_2]$  terhadap waktu  $t$ , ditulis

$$P(t) = \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}h(x, t)u(x, t)dx.$$

Turunan pertama momentum terhadap waktu didapat

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}h(x, t)u(x, t)dx. \quad (3.6)$$

Dengan aturan Leibniz, persamaan (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}h(x, t)u(x, t) dx + \bar{\rho}h(x_2, t)u^2(x_2, t) \\ &\quad - \bar{\rho}h(x_1, t)u^2(x_1, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) dapat ditulis ulang menggunakan notasi standar dari kalkulus

$$\frac{dP(t)}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}h(x, t)u(x, t) dx + \bar{\rho}h(x, t)u^2(x, t)|_{x_1}^{x_2} \quad (3.8)$$

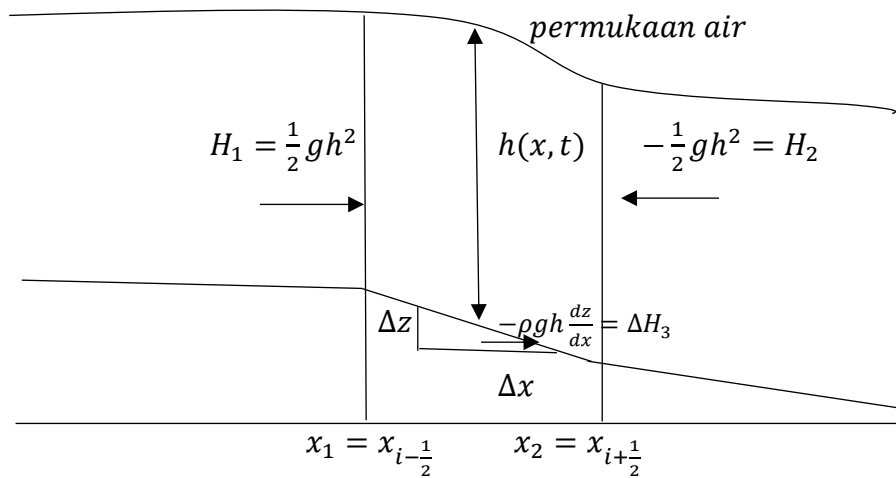
Karena fungsi  $\bar{\rho}h(x, t)u^2(x, t)$  merupakan *smooth function* yaitu fungsi yang memiliki turunan kontinu, maka persamaan (3.8) dapat ditulis

$$\frac{dP(t)}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}h(x, t)u(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho}h(x, t)u^2(x, t)dx. \quad (3.9)$$

Dengan diasumsikan tekanan hidrostatis, maka gaya pada ke dalaman di titik  $x_1$  dan  $x_2$  pada waktu  $t$  yaitu

$$H_1(t) = \frac{1}{2} \bar{\rho}gh^2(x_1, t) \quad (3.10)$$

$$H_2(t) = -\frac{1}{2} \bar{\rho}gh^2(x_2, t) \quad (3.11)$$



Gambar 3.2. Ilustrasi tekanan pada topografi

Selanjutnya, gaya pada  $\Delta z$  diperoleh dari tekanan hidostatik akibat adanya perbedaan  $z(x)$  seperti pada gambar sehingga dapat ditulis

$$\Delta H_3 = -\bar{\rho}gh(x, t)\Delta z,$$

atau dapat ditulis juga

$$\Delta H_3 = -\bar{\rho}gh(x, t) \frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x.$$

Selanjutnya gaya akibat perbedaan ke dalaman topografi pada interval  $[x_1, x_2]$  adalah

$$H_3 = \int_{x_1}^{x_2} -\bar{\rho}gh(x, t)z_x dx = - \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}gh(x, t)z_x dx \quad (3.12)$$

Sehingga, dari persamaan (3.10), (3.11) dan (3.12) didapat total gaya akibat tekanan hidrostatis adalah

$$H = \frac{1}{2}\bar{\rho}gh(x_1(t), t)^2 - \frac{1}{2}\bar{\rho}gh(x_2(t), t)^2 - \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}gh(x, t)z_x dx \quad (3.13)$$

Karena fungsi  $\frac{1}{2}\bar{\rho}gh(x(t), t)^2$  merupakan *smooth* function, maka persamaan (3.13) dapat ditulis

$$H = \int_{x_1}^{x_2} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2}\bar{\rho}gh^2(x_2, t) dx - \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}gh(x, t)z_x dx$$

$$H = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2}\bar{\rho}gh^2(x_2, t) dx - \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho}gh(x, t)z_x dx \quad (3.14)$$

Dari Hukum Kedua Newton dapat disimpulkan bahwa persamaan (2.8) sama dengan persamaan (3.14) sehingga didapat

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} h(x, t) u(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} h(x, t) u^2(x, t) dx \\
& \quad = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \bar{\rho} g h^2(x, t) dx - \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} g h(x, t) z_x dx \\
& \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} h(x, t) u(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} h(x, t) u^2(x, t) dx \\
& \quad + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \bar{\rho} g h^2(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \bar{\rho} g h(x, t) z_x dx = 0 \\
& \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} h(x, t) u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} h(x, t) u^2(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \bar{\rho} g h^2(x, t) \right. \\
& \quad \left. + \bar{\rho} g h(x, t) z_x \right] dx = 0 \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Karena integral pada persamaan (3.14) harus bernilai nol pada interval  $[x_1, x_2]$  dengan  $x_1 < x_2$ , maka fungsi yang diintegrasikan harus identik nol, maka

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} h(x, t) u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \bar{\rho} h(x, t) u^2(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \bar{\rho} g h^2(x, t) + \bar{\rho} g h(x, t) z_x = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} h(x, t) u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\rho} h(x, t) u^2(x, t) + \frac{1}{2} \bar{\rho} g h^2(x, t) \right) + \bar{\rho} g h(x, t) z_x = 0
\end{aligned}$$

Karena  $\bar{\rho}$  konstan, maka

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h(x, t) u^2(x, t) + \frac{1}{2} g h^2(x, t) \right) + g h(x, t) z_x = 0$$

atau didapat

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2} gh^2)_x = -ghz_x. \tag{3.16}$$

Dengan demikian diperoleh sistem persamaan air dangkal dari persamaan (3.5) dan (3.16), yaitu:

$$\begin{aligned}
& h_t + (uh)_x = 0 \\
& (hu)_t + \left( hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 \right)_x = -ghz_x
\end{aligned}$$

Selanjutnya, sistem persamaan gelombang air dangkal (3.5) dan (3.16) akan dilakukan simulasi pergerakan gelombang untuk kasus permukaan air tenang yang

Suci Permata Hati, 2019

**SIMULASI SISTEM PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL MENGGUNAKAN METODE NUMERIS LAX-FRIEDRICHS**

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

terkena tetesan air dan penyebaran gelombang tsunami. Untuk kasus gelombang air tenang yang terkena gangguan pada suatu kolam diambil nilai awal kecepatan dan ketinggian saat  $t = 0$  dengan interval daerah  $x = [-L, L]$ , yaitu

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ h(x, 0) &= 0,75 \exp(-1,5x^2) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

dengan syarat batas yaitu

$$\left. \begin{aligned} u(\pm L, t) &= 0 \\ h_x(\pm L, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Syarat batas  $u(\pm L, t) = 0$  menggambarkan bahwa keadaan pada dinding kolam kecepatan gelombang adalah nol, dan  $h_x(\pm L, t) = 0$  menggambarkan bahwa pada dinding kolam permukaan gelombang datar.

Untuk kasus penyebaran gelombang tsunami, diambil nilai awal kecepatan dan ketinggian saat  $t = 0$  dengan interval daerah  $x = [0, L]$  untuk kasus gelombang tsunami, yaitu

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 1 \\ h(x, 0) &= \exp(-(x - 2,5)^2) + 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

dengan syarat batas yaitu

$$\left. \begin{aligned} u_x(0, t) = 0 \text{ dan } u_x(L, t) &= 0 \\ h_x(0, t) = 0 \text{ dan } h_x(L, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Syarat batas  $u_x(0, t) = 0$  dan  $u_x(L, t) = 0$  menggambarkan bahwa keadaan pada ujung-ujung interval daerah  $x = [0, L]$  kecepatan gelombang adalah konstan, serta  $h_x(0, t) = 0$  dan  $h_x(L, t) = 0$  menggambarkan bahwa permukaan gelombang pada ujung-ujung interval daerah adalah datar.

### 3.2 Penyelesaian Sistem Menggunakan Metode *Lax-Friedrichs*

Pandang sistem persamaan gelombang air dangkal pada persamaan (3.5)

$$h_t + (uh)_x = 0$$

dan persamaan (3.16)

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = ghz_x$$

Dari persamaan (3.5) diperoleh bentuk persamaan metode volume hingga *Lax-Friedrichs* (2.20) menjadi

$$\begin{aligned}
h_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(h_{i-1}^n + h_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [(uh)_{i+1}^n - (uh)_{i-1}^n] \\
h_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(h_{i-1}^n + h_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [u_{i+1}^n h_{i+1}^n - u_{i-1}^n h_{i-1}^n]. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, ruas kanan persamaan (3.16) dalam bentuk persamaan (2.28) gaya tekanan pada topografi juga diperoleh

$$-ghz_x = -gh \frac{z_{x+1}^n - z_{x-1}^n}{2\Delta x}. \quad (3.22)$$

di mana besar tekanan tetap sama untuk setiap  $n$ .

Sedangkan ruas kiri persamaan (3.16) diperoleh bentuk persamaan metode volume hingga *Lax-Friedrichs* (2.20) menjadi

$$\begin{aligned}
(hu)_i^{n+1} &= \frac{1}{2}((hu)_{i-1}^n + (hu)_{i+1}^n) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_{i+1}^n - \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_{i-1}^n \right], \quad (3.23)
\end{aligned}$$

akibat topografi tidak datar, dengan persamaan (3.22) didapat bentuk akhir persamaan metode volume hingga *Lax-Friedrichs* untuk persamaan (3.16) diperoleh

$$\begin{aligned}
(hu)_i^{n+1} &= \frac{1}{2}((hu)_{i-1}^n + (hu)_{i+1}^n) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_{i+1}^n - \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_{i-1}^n \right] \\
&\quad - \Delta t gh \frac{z_{x+1}^n - z_{x-1}^n}{2\Delta x} \\
(hu)_i^{n+1} &= \frac{1}{2}((hu)_{i-1}^n + (hu)_{i+1}^n) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_{i+1}^n - \left( hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right)_{i-1}^n \right. \\
&\quad \left. + gh(z_{x+1}^n - z_{x-1}^n) \right] \\
h_i^{n+1}u_i^{n+1} &= \frac{1}{2}(h_{i-1}^n u_{i-1}^n + h_{i+1}^n u_{i+1}^n) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ h_{i+1}^n (u^2)_{i+1}^n + \frac{1}{2}g(h^2)_{i+1}^n - h_{i-1}^n (u^2)_{i-1}^n \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}g(h^2)_{i-1}^n + gh(z_{x+1}^n - z_{x-1}^n) \right]. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

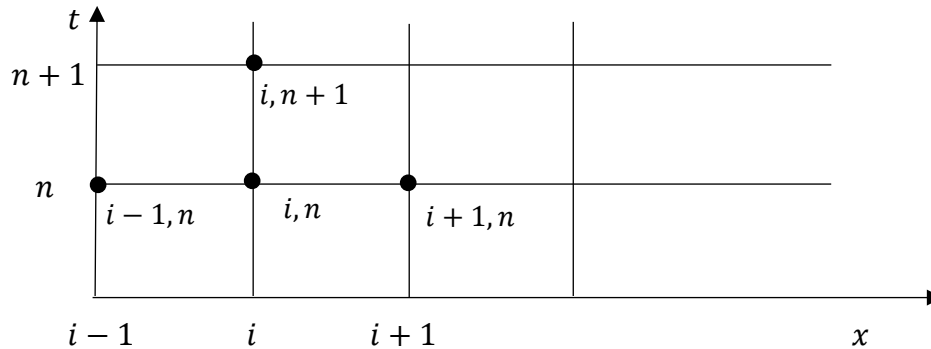


Sehingga didapat persamaan (3.21) dan persamaan (3.24) sebagai penyelesaian sistem persamaan dalam bentuk numeris dengan metode volume hingga *Lax-Friedrichs* yaitu

$$h_i^{n+1} = \frac{1}{2}(h_{i-1}^n + h_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[u_{i+1}^n h_{i+1}^n - u_{i-1}^n h_{i-1}^n]$$

$$h_i^{n+1} u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(h_{i-1}^n u_{i-1}^n + h_{i+1}^n u_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ h_{i+1}^n (u^2)_{i+1}^n + \frac{1}{2} g(h^2)_{i+1}^n - h_{i-1}^n (u^2)_{i-1}^n - \frac{1}{2} g(h^2)_{i-1}^n + gh(z_{x+1}^n - z_{x-1}^n) \right].$$

Dalam penelitian ini, skema penyelesaian sistem persamaan gelombang air dangkal (3.21) dan (3.24) yang diperoleh akan dihitung menggunakan bantuan *software* MATLAB. Dalam menghitung penyelesaian sistem (3.21) dan (3.24) untuk  $(h_i^{n+1})$  dan  $(u_i^{n+1})$  dibutuhkan tiga nilai ketinggian gelombang pada waktu sebelumnya yaitu  $(h_{i-1}^n, h_i^n, h_{i+1}^n)$  dan dibutuhkan dua nilai kecepatan gelombang sebelumnya yaitu  $(u_{i-1}^n, u_{i+1}^n)$ .



Gambar 3.3. Ilustrasi pembaharuan kecepatan dan ketinggian gelombang.

Pengaplikasian metode volume hingga *Lax-Friedrichs* diperlukan dua kondisi syarat batas untuk mengetahui nilai  $i - 1$  ketika  $i$  berada pada batas-batas interval domain. Selanjutnya, pada syarat batas dalam kasus yang diambil digunakan metode beda hingga (2.27) yang kemudian untuk syarat batas kecepatan pada  $x = 0$  diperoleh

$$u_x(0, t) = 0$$

$$\frac{u_1^t - u_{-1}^t}{2\Delta x} = 0$$

$$u_1^t - u_{-1}^t = 0$$

$$u_1^t = u_{-1}^t,$$

dan untuk  $x = L$  diperoleh

$$\begin{aligned} u_x(L, t) &= 0 \\ \frac{u_{N+1}^t - u_{N-1}^t}{2\Delta x} &= 0 \\ u_{N+1}^t - u_{N-1}^t &= 0 \\ u_{N+1}^t &= u_{N-1}^t \end{aligned}$$

Sehingga untuk seluruh syarat batas diperoleh

$$\begin{aligned} u_1^t &= u_{-1}^t & u_{N+1}^t &= u_{N-1}^t \\ h_1^t &= h_{-1}^t & h_{N+1}^t &= h_{N-1}^t, \end{aligned}$$

dengan  $N$  merupakan total diskritisasi yang dihasilkan.

Pada simulasi persamaan gelombang air dangkal dihitung menggunakan bantuan *software* MATLAB dengan menampilkan grafik 2D

### 3.3 Validasi

Zachary (2008) mengatakan bahwa solusi *steady state* sistem yaitu ketika solusi dari sistem persamaan tidak bergantung pada waktu atau  $t \rightarrow \infty$ , artinya yaitu ketika  $\frac{dh}{dt} = 0$  dan  $\frac{du}{dt} = 0$ . Selanjutnya, hasil dari simulasi divalidasi dengan mencari solusi *steady state* (keadaan tunak atau keadaan setimbang) secara analitik, kemudian membandingkannya dengan solusi numerik pada keadaan *steady state*.