BAB III

KRIGING

Pada bab ini akan dibahas metode *kriging*, metode *Simple Kriging*, metode *Ordinary Kriging*, metode *Universal Kriging*, dan tahapan analisis dalam menggunakan metode *Universal Kriging* dalam mengestimasi harga tanah.

3.1 Metode *Kriging*

Geostatistika merupakan metodologi yang digunakan untuk menganalisis data yang berkorelasi secara spasial. Karakteristik yang dimilikinya adalah penggunakan *variogram/semivariogram* atau model-model lainnya untuk mengkuantifikasi dan memodelkan struktur korelasi spasial dan juga penggunaan berbagai metode interpolasi spasial, seperti *kriging* (Sari dkk, 2010).

Metode *kriging* pertama kali dikembangkan oleh Georges Matheron bersama dengan Danie Krige. Menurut Awali dkk (2013), *kriging* merupakan analisis data geostatistika yang digunakan untuk mengestimasi besarnya nilai yang mewakili suatu titik yang tidak tersampel berdasarkan titik-titik tersampel yang berada di sekitarnya dengan mempertimbangkan korelasi spasial yang ada di dalam data tersebut dengan menghasilkan estimator tak bias. Kegunaan metode *kriging* antara lain, sebagai berikut :

1. Mencari penaksir tak-bias linier terbaik.
2. Memiliki rata-rata berbobot dari nilai sampel yang memiliki variansi minimum.
3. Interpolasi spasial.

Secara garis besar bahwa metode *kriging* dapat digunakan untuk mengestimasi besarnya nilai karakteristik dari estimator $(\hat{Z})$ pada titik yang tidak tersampel berdasarkan informasi dari titik-titik tersampel yang berada di sekitarnya.

Estimator *kriging* $\hat{Z}_{(s)}$ dari $Z_{(s)}$ dengan bobot λ_i adalah sebagai berikut (Bohling, 2005):

$$\hat{Z}_{(s)} - m_{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [Z(s_i) - m(s_i)] \qquad (3.1)$$

dengan,

s : lokasi untuk estimasi,

s_i : salah satu lokasi data yang berdekatan,

$m(s)$: nilai ekspektasi dari $Z_{(s)}$,

$m(s_i)$: nilai ekspektasi dari $Z(s_i)$

λ_i : pembobot yang menentukan ukuran jarak antar titik,

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi.

Metode *kriging* terbagi menjadi tiga jenis *kriging* pokok yaitu, *Simple Kriging (SK), Ordinary Kriging (OK)* dan *Universal Kriging (UK).*

1. *Simple Kriging* (SK)

Pada metode *Simple Kriging* atau dengan kata lain *kriging* sederhana. Metode *Simple Kriging* merupakan metode *kriging* dengan asumsi nilai rata-rata atau *mean* (μ) diketahui dan bernilai konstan di mana estimator harus tak-bias dan variansi minimum.

2. *Ordinary Kriging* (OK)

Pada metode *Ordinary Kriging*, nilai rata-rata atau *mean* (μ) tidak diketahui atau dianggap konstan, dan datanya stasioner (tidak mengandung *trend*). Maka dari itu, *Ordinary Kriging* tidak mengasumsikan diketahuinya rata-rata dan kovariansi. Oleh sebab itu, metode *Ordinary Kriging* dianggap sebagai metode *kriging* paling umum yang digunakan dalam memprediksi nilai dari variabel acak $Z(x)$ pada titik yang belum tersampel $Z(x_\alpha)$ dari daerah geografisnya.

Ordinary Kriging diasumsikan dengan model sebagai berikut :

$$Z(s) = \mu + \varepsilon(s) \tag{3.2}$$

di mana,

$Z(s)$: titik data tersampel

μ : mean yang tidak diketahui

$\varepsilon(s)$: kesalahan pada titik data sampel.

3. *Universal Kriging* (UK)

Universal Kriging atau yang sebelumnya dikenal sebagai *kriging* dengan *trend*, di mana pada metode *Universal Kriging* merupakan metode *kriging* dengan asumsi bahwa apabila nilai rata-rata atau *mean* (μ) dan varians diketahui serta konstan dan datanya mengandung *trend* atau data tidak stasioner (Cressie, 1993)

Metode *Universal Kriging* diterapkan pada data yang mempunyai kecenderungan *trend* tertentu atau data yang non-stasioner. *Universal Kriging* adalah salah satu metode dari *kriging* untuk memprediksi atau mengestimasi. Metode ini tepat jika digunakan untuk mengestimasi pada nilai-nilai di titik sampel yang memang mempunyai kecenderungan tertentu, misalnya seperti kandungan batu bara yang dipengaruhi oleh elevasi atau tebal lapisan bertambah dengan berubahnya arah. Berikut adalah estimator *Universal Kriging* $\hat{Z}(x_0)$ untuk fungsi random $Z(x_i)$ (Bohling, 2005):

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z(x_i) \tag{3.3}$$

Dengan asumsi bahwa nilai rata-rata dan varians diketahui, *Universal Kriging* diasumsikan dengan model sebagai berikut :

$$z(x) = m(x) + \varepsilon(x) \tag{3.4}$$

di mana $m(x)$ merupakan persamaan dari *trend*, dan $\varepsilon(x)$ merupakan kesalahan pada titik data sampel, hasil kombinasi linier dengan koefisien yang tidak nol, dengan $E[Z(x)]$ adalah nilai ekspektasi dari $Z(x)$, sehingga

$$E[z(x)] = m(x) \tag{3.5}$$

Berikut adalah *trend* dari model polinomial $f_1(x)$ disajikan dalam bentuk :

$$m(x) = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l f_l(x) \tag{3.6}$$

di mana,

α_l : koefisien trend

f_l : koordinat lokasi

n : banyaknya orde dalam persamaan trend.

Ricardo (1999) menyatakan bahwa, estimator $\hat{Z}(x_0)$ adalah sebagai estimator tak bias, jika dan hanya jika :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f_l(x_i) = f_l(x_0) \tag{3.7}$$

Jika persamaan (3.7) dikalikan α_l pada kedua ruas maka akan diberikan $n+1$ persamaan, yaitu :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_l \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f_l(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_l\, f_l(x_0) \tag{3.8}$$

di mana pada ruas kiri, akibat persamaan (3.7) maka jumlahan ganda akan bernilai sama dengan nilai ekspektasi dari $\hat{Z}(x)$. Sedangkan pada persamaaan sebelah kanan akan bernilai sama dengan $m(x)$, di mana $E[Z(x)] = m(x)$ sesuai persamaan (3.5). Sehingga persamaan (3.8) akan menjadi

$$E\big[\hat{Z}(x) - Z(x)\big] = 0 \tag{3.9}$$

dari persamaan di atas maka diperoleh

$$\hat{Z}(x) = m = Z(x)$$

$$E\left(\hat{Z}(x)\right) = Z(x)$$

maka dapat dikatakan bahwa estimator dari *Universal Kriging* adalah estimator tak bias (*unbiased*).

3.2 Sifat-sifat Universal Kriging

Estimator dari *kriging* bersifat *BLUE* (*Best Linear Unbiased Estimator*). Tentunya dengan *Universal Kriging* yang menghasilkan estimator *BLUE* atau estimator tak bias, linier dan meminimumkan variansi estimatornya. Berikut akan disebutkan estimator bersifat *BLUE* pada *Universal Kriging*.

3.2.1 Tak bias (*Unbiased*)

Estimator pada metode *kriging* memiliki sifat tak bias karena koefisien dari penjumlahan bobot prediksi linier adalah 1 ($\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$), maka $E(\hat{Z}(x)) = \mu = E(Z(x)) = Z(x)$ untuk setiap $\mu \epsilon \mathbb{R}$. Perbedaan nilai antara nilai estimasi $\hat{Z}(x)$ dengan nilai sebenarnya $Z(x)$ disebut estimator *error* yang dinotasikan dengan $\hat{e}(x)$.

Suatu estimator yang baik adalah estimator yang memiliki sifat tak bias. Estimator dikatakan tak bias jika ekspektasi dari estimator sama dengan nilai parameter populasi yang diestimasi

$$E(\hat{Z}(x)) = Z(x).$$

3.2.2 Linier

Suatu estimator dikatakan memiliki sifat linier jika estimator tersebut merupakan fungsi linier dari sampel. Diberikan suatu persamaan *kriging* sebagai berikut :

$$\hat{Z}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i) \tag{3.10}$$

Dari persamaan di atas $\hat{Z}(x)$ dapat dikatakan sebagai estimator yang bersifat linier karena merupakan fungsi linier dari $Z(x)$.

3.2.3 Variansi *error* yang minimum

Pada metode *kriging* dapat ditunjukkan bahwa estimator pada metode tersebut merupakan estimator dengan variansi *error* yang minimum. Dengan mengasumsikan $var\big(Z(x_0)\big) = \sigma^2$ maka variansi *error* dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} var\big(e(x_0)\big) &= var(\hat{Z}(x_0) - Z(x_0) \\ &= cov\left(\hat{Z}(x_0), \hat{Z}(x_0)\right) + cov\big(Z(x_0), Z(x_0)\big) - 2cov\left(\hat{Z}(x_0), Z(x_0)\right) \\ &= var\left(\hat{Z}(x_0)\right) + var(Z(x_0)) - 2cov\left(\hat{Z}(x_0), Z(x_0)\right) \\ &= var\left(\hat{Z}(x_0)\right) + \sigma^2 - 2cov\left(\hat{Z}(x_0), Z(x_0)\right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

dengan

$$\begin{aligned} var\left(\hat{Z}(x_0)\right) &= var\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, Z(x_i)\right) \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\, Z(x_i))\right]^2 - \left[E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\, Z(x_i))\right)\right]^2 \\ &= \left[E\big(\lambda_1 Z(x_1)\big)^2 + E\big(\lambda_2 Z(x_2)\big)^2 + \cdots + E\big(\lambda_n Z(x_n)\big)^2\right] \\ &\qquad - \left(\left[E\big(\lambda_1 Z(x_1)\big)\right]^2 + \left[E\big(\lambda_2 Z(x_2)\big)\right]^2 + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \left[E\big(\lambda_n Z(x_n)\big)\right]^2\right) \\ &= E\big(\lambda_1 Z(x_1)\big)^2 - \left[E\big(\lambda_1 Z(x_1)\big)\right]^2 + E\big(\lambda_2 Z(x_2)\big)^2 - \\ &\qquad \left[E\big(\lambda_2 Z(x_2)\big)\right]^2 + \cdots + E\,\big(\lambda_n Z(x_n)\big)^2 - \\ &\qquad \left[E\big(\lambda_n Z(x_n)\big)\right]^2 \\ &= \lambda_1 E\big(Z(x_1)\big)^2 - \left[\lambda_1 E\big(Z(x_1)\big)\right]^2 + \lambda_2 E\big(Z(x_2)\big)^2 - \left[\lambda_2 E\big(Z(x_2)\big)\right]^2 \\ &\qquad + \cdots + \lambda_n E\big(Z(x_n)\big)^2 - \left[\lambda_1 E\big(Z(x_n)\big)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j\, E\big(Z(x_i), Z(x_i)\big) - \left[E\left(Z(x_j), Z(x_j)\right)\right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j cov\left(Z(x_i), Z\big(x_j\big)\right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

dan

$$cov\left(\hat{Z}(x_0), Z(x_0)\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, Z(x_i)Z(x_0)\right) - E\left(\hat{Z}(x_0)E\big(Z(x_0)\big)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E\big(Z(x_i)Z(x_0)\big) - E\left(\hat{Z}(x_0)\right)E\big(Z(x_0)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E\big(Z(x_i)Z(x_0)\big) - E\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, Z(x_i)\right)E\big(Z(x_0)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E\big(Z(x_i)Z(x_0)\big) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, E\big(Z(x_i)\big)E\big(Z(x_0)\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i cov\left(Z(x_i)Z(x_0)\right). \qquad (3.13)$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.12) dan (3.13) ke dalam persamaan (3.11) maka akan diperoleh estimasi variansi *error Universal Kriging* sebagai berikut :

$$var[\hat{e}(x_0)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j cov\big[Z(x_i), Z\big(x_j\big)\big] + \sigma^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i cov[Z(x_i), Z(x_0)] \qquad (3.14)$$

di mana,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai minimum dari variansi *error* menggunakan *lagrange multiplier* dengan parameter *lagrange* p. Persamaan *lagrange* diturunkan terhadap parameter p, sehingga diperoleh :

$$cov\big(Z(x_i), Z(x_0)\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j cov\left(Z(x_i), Z\big(x_j\big)\right) + p \qquad (3.15)$$

untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1. \qquad (3.16)$$

Dari persamaan (3.15) dan (3.16), kemudian disubtitusikan ke dalam persamaan (3.14) sehingga diperoleh variansi *error* sebagai berikut:

$$var(\hat{e}(x)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j cov[Z(x_i), Z(x_j)] + \sigma^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i cov(Z(x_i), Z(x_0))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [cov(Z(x_i), Z(x_0)) - p] + \sigma^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i cov(Z(x_i), Z(x_0))$$

$$= \sigma^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, cov(Z(x_i), Z(x_0)) - p$$

$$= \sigma^2 - \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, cov(Z(x_i), Z(x_0)) + p\right]. \qquad (3.17)$$

3.3 Langkah-Langkah Mengestimasi Harga Tanah Menggunakan Metode *Universal Kriging*

Misalkan terdapat data $X = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix},\ P = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix}$, di mana X dan Y merupakan titik koordinat dan P merupakan harga tanah (Puspita, 2013).

1. Uji asumsi stasioneritas untuk variabel P (harga tanah). Data dikatakan stasioner apabila tidak mengandung *trend*. Untuk metode *Universal kriging* berarti data harus non-stasioner atau mengandung *trend*.
2. Tentukan pasangan data, dan menghitung jaraknya dengan menghitung *semivariogram eksperimental*. Dari *semivariogram eksperimental* tersebut akan diperoleh nilai *sill* dan *range*.
3. *Fitting* model dengan mencocokan *semivariogram eksperimental* dengan *semovariogram teoritis* dengan memilih nilai jumlah kuadrat *error* yang terkecil dari beberapa model *semivariogram teoritis* yang tersedia.
4. Hitung hasil estimasi harga tanah dengan *semivariogram* tersebut, dan menghitung variansi *error*-nya.