## BAB III

## ANALISIS FAKTOR

### 3.1 Pengertian Analisis Faktor

Analisis faktor adalah suatu metode untuk menganalisis sejumlah observasi, dipandang dari sisi interkorelasinya untuk mendapatkan apakah variasi-variasi yang nampak dalam observasi itu mungkin berdasarkan atas sejumlah kategori dasar yang jumlahnya lebih sedikit dari yang nampak, kegunaan analisis faktor adalah sebagai berikut ( Simamora, 2005: 34) :

a. Mengenali atau mengidentifikasi dimensi yang mendasari atau faktor, yang menjelaskan korelasi antara suatu set variabel.
b. Mengenali dan mengidentifikasi suatu set variabel baru yang tidak berkorelasi (independen) yang lebih sedikit jumlahnya untuk menggantikan suatu set asli yang saling berkorelasi di dalam analisis multivariat selanjutnya, misalnya analisis regresi ganda dan analisis diskriminan.
c. Mengenali atau mengidentifikasi suatu set variabel yang penting dari suatu set variabel yang lebih banyak jumlahnya untuk dipergunakan di dalam analisis multivariat selanjutnya.

### 3.2 Model Faktor Ortogonal

**Definisi 3.2 :**

Vektor acak $\mathbf{X}$ teramati, dengan $p$ komponen, mempunyai rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks variansi-kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$. Dalil model faktor menyatakan bahwa $\mathbf{X}$ secara linear bergantung pada faktor umum yaitu variabel acak yang tidak teramati $F_1, F_2, \dots, F_m$ dan faktor khusus yaitu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$. Model analisis faktornya adalah

$$\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 = \ell_{11}F_1 + \ell_{12}F_2 + \cdots + \ell_{1m}F_m + \varepsilon_1$$
$$\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 = \ell_{21}F_1 + \ell_{22}F_2 + \cdots + \ell_{2m}F_m + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}_p = \ell_{p1}F_1 + \ell_{p2}F_2 + \cdots + \ell_{pm}F_m + \varepsilon_p \qquad (3.2.1)$$

Atau dalam notasi matriks,

$$\underset{(px1)}{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}}\underset{(mx1)}{\mathbf{F}} + \underset{(\mathrm{px1})}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (3.2.2)$$

di mana :

**X :** Vektor acak dari variabel acak ke-*i* yang teramati

**μ :** Vektor rata – rata dari variabel ke-*i*

**ε** : Vektor dari faktor khusus ke-*i*

**F :** Vektor dari faktor umum ke-*j*

**L :** matriks loading $\ell_{ij}$ dari variabel ke-*i* pada faktor ke-*j*

Untuk memperoleh model faktor *orthogonal* diperlukan beberapa asumsi berikut ini :

1. $E(\boldsymbol{F}) = \mathbf{0}_{(\boldsymbol{mx1})}, \mathrm{kov}(\boldsymbol{F}) = E(\boldsymbol{FF}') = \mathbf{I}_{(\boldsymbol{mxm})}$
2. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{(\boldsymbol{mx1})}, \mathrm{kov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \boldsymbol{\psi}_{(\boldsymbol{pxp})} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_p \end{bmatrix}$ (3.2.3)
3. $\boldsymbol{F}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ saling bebas, sehingga kov $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{F}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{F}) = \mathbf{0}_{(\boldsymbol{pxm})}$

Model *orthogonal* dari sebuah analisis faktor adalah

$$\underset{(px1)}{\mathbf{X}} = \underset{(px1)}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{(pxm)}{\mathbf{L}}\underset{(mx1)}{\mathbf{F}} + \underset{(\mathrm{px1})}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (3.2.4)$$

Model faktor *orthogonal* menghasilkan struktur kovariansi untuk variabel acak **X,** yaitu :

$$\begin{aligned}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' &= (\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})' \\ &= (\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})((\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon}') \\ &= (\mathbf{LF}(\mathbf{LF})' + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\end{aligned}$$

maka

$$\boldsymbol{\Sigma} = \textbf{kov}\left(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j\right) = \boldsymbol{E}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'$$
$$= \boldsymbol{E}(\mathbf{LF}(\mathbf{LF})' + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')$$
$$= (\mathbf{LE}(\mathbf{FF}')\mathbf{L}' + \mathbf{LE}(\mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}') + \mathbf{LE}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}') + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')$$
$$= (\mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}) \qquad (3.2.5)$$

atau

$$\text{Var}\,(X_i) = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2 + \psi_i \qquad (3.2.6)$$

$$\text{Kov}\,(X_i, X_j) = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2 \qquad (3.2.7)$$

kovariansi untuk variabel acak **X** dan faktor umum **F** adalah

$$(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{F}' = (\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F}'$$
$$= \mathbf{LFF}' + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}'$$

maka

$$\text{Kov}(\mathbf{X},\mathbf{F}) = E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{F}'$$
$$= E(\mathbf{LFF}' + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}')$$
$$= \mathbf{L}\text{E}(\mathbf{FF}') + \text{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}')$$
$$= \mathbf{L} \qquad (3.2.8)$$

atau

$$\text{Kov}(\mathbf{X},\mathbf{F}) = \ell_{ij} \qquad (3.2.9)$$

Proporsi variansi dari variabel ke-$i$ yang disumbangkan oleh $m$ faktor umum disebut komunalitas ke-$i$. Nilai Var $(X_i) = \sigma_{ii}$ merupakan nilai komunalitas yang ditambahkan dengan nilai variansi khusus. Komunalitas ke-$i$ dinotasikan sebagai $h_i^2$. Dari persamaan (3.2.6) dan (3.2.7) diperoleh :

$$\underbrace{\sigma_{ii}}_{\text{var}\,(X_i)} = \underbrace{\ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2}_{\text{komunalitas}} + \underbrace{\psi_i}_{\text{variansi khusus}} \qquad (3.2.10)$$

atau

$$h_i^2 = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2 \qquad (3.2.11)$$

dan

$$\sigma_{ii} = h_i^2 + \psi_i$$

Komunalitas ke-$i$ merupakan jumlah kuadrat dari faktor *loading* variabel ke-$i$ pada $m$ faktor umum.

Pada kasus di mana satuan dari variabel tidak setara, biasanya dilakukan terlebih dari dahulu standarisasi variabel. Standarisasi dilakukan untuk menghindari adanya satu variabel dengan variansi besar yang terlalu berpengaruh pada pembentukan faktor *loading*.

$$Z_i = \frac{\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} = \frac{\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_i}{\sqrt{\sigma_i{}^2}}, \text{ untuk setiap } i = 1,2,\ldots,p \qquad (3.2.12)$$

Maka diperoleh vektor acak yang telah distandarisasi, yaitu :

$$Z_i = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}_{i1} - \boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \frac{\mathbf{X}_{i2} - \boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{X}_{ip} - \boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \qquad (3.2.13)$$

Matriks variansi-kovariansi dari variabel yang dibakukan adalah :

$$E\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)' = E\left[\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \frac{\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{p2}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \tag{3.2.14}$$

dari penjelasan mengenai koefisien korelasi pada bab sebelumnya diketahui bahwa :

$r_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$ untuk setiap $i$ dan $k$ = 1,2,..$p$

Sehingga matriks variansi-kovariansi untuk variabel yang distandarisasi dapat dinyatakan sebagai matriks korelasi **R**.

$$\text{kov}(\mathbf{Z}) = \text{kor}(\mathbf{X}) = \mathbf{R} \tag{3.2.15}$$

Jika variabel yang distandarisasi digunakan pada model faktor maka persamaan (3.2.5) menjadi :

$$\mathbf{R} = \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi} \tag{3.2.16}$$

dan matriks *loading* menjadi korelasi dari X dan F, yaitu :

$$\text{Kor}(\mathbf{X},\mathbf{F}) = \mathbf{L} \tag{3.2.17}$$

(Johnson & Wichern,2007 : 482-487).

### 3.3 Penentuan Jumlah Faktor

Dalam menetapkan jumlah faktor terdapat tiga kriteria. Kriteria tersebut yaitu:

1. Persentase Varian (*percentage of variance*)

   Persentase varian menunjukan menunjukkan jumlah variansi yang berhubungan pada suatu faktor yang dinyatakan dalam persentase. Besarnya nilai persentase kumulatif varian ≥ 60% (Hair,dkk, 2010: 109).

2. Nilai Eigen (*eigenvalue*)

   Jumlah faktor sama dengan banyaknya nilai eigen yang lebih besar dari pada rata-rata seluruh nilai eigennya. Pada matriks korelasi **R** rata-rata nilai eigen sama dengan 1, sedangkan untuk matriks variansi kovariansi $\boldsymbol{S}$ rata-ratanya adalah $\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{p}$ (Rencher, 2002 : 426).

3. *Scree Plot*

   Jumlah faktor dipilih dengan menggunakan *scree* plot. Dari nilai eigen dari $\boldsymbol{S}$ maupun dari **R**, jika grafik dari nilai eigen turun secara tajam yang diikuti dengan garis lurus beberapa lereng kecil, maka dapat dipilih faktor umum sebanyak m sebelum garis lurus(Rencher, 2002 :427).

### 3.4 Pembentukan Faktor

Metode yang digunakan dalam pembentukan faktor adalah metode analisis *Principal Component Factoring* (PCF), *Principal Axis Factoring* (PAF) dan *Maksimum Likelihood*. Dua langkah utama dalam pembentukan faktor adalah penentuan jumlah faktor dan rotasi faktor-faktor yang terbentuk.

Tujuan khusus dari metode analisis faktor *Principal Component* adalah mengetahui struktur yang mendasari variabel-variabel awal dalam analisis dan melakukan penyederhanaan struktur sekumpulan variabel awal tersebut melalui reduksi data. Prosedur matematis untuk mencari struktur matriks variansi-kovariansi **Σ** dapat dilakukan dengan menggunakan matriks dekomposisi spektral. Misal **Σ** mempunyai pasangan nilai eigen dan vektor eigen $(\lambda_i, e_i)$ dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$, maka (Johnson & Wichern,2007 : 488-489)

$$\mathbf{\Sigma} = \lambda_1 \boldsymbol{e_1} \boldsymbol{e_1'} + \lambda_2 \boldsymbol{e_2} \boldsymbol{e_2'} + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{e_p} \boldsymbol{e_p'} \qquad (3.4.1)$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\,\boldsymbol{e_1} \quad \sqrt{\lambda_2}\,\boldsymbol{e_2} \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_p}\,\boldsymbol{e_p}\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\,\boldsymbol{e_1'} \\ \sqrt{\lambda_2}\,\boldsymbol{e_2'} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_p}\,\boldsymbol{e_p'} \end{bmatrix} \quad . \qquad (3.4.2)$$

Model ini adalah gambaran struktur kovariansi dari analisis faktor yang mempunyai variabel awal sama dengan jumlah faktor yang terbentuk ($m = p$) dan variansi khususnya $\psi_i = 0$ untuk semua $i$. Matriks faktor *loading* pada kolom ke-$j$ dituliskan $\sqrt{\lambda_j}\,\boldsymbol{e_j}$. Dalam bentuk umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\underset{(pxp)}{\mathbf{\Sigma}} = \underset{(pxp)}{\mathbf{L}}\ \underset{(pxp)}{\mathbf{L}'} + \underset{(\mathrm{pxp})}{\mathbf{0}} = \mathbf{LL}' \quad . \qquad (3.4.3)$$

Selanjutnya faktor *loading* yang terbentuk tersebut merupakan koefisien faktor pada metode *principal component*. Dalam persamaan (3.4.3) belum sesuai dengan tujuan analisis faktor karena belum diperoleh jumlah faktor yang lebih sedikit dari varibel-variabel awalnya. Selain itu, beberapa variansi pada faktor khusus $\boldsymbol{\varepsilon}$ belum dilibatkan. Untuk itu, dibuat sebuah model baru yang dapat dijelaskan struktur kovariansi dengan melibatkan jumlah faktor yang lebih sedikit. Pendekatan yang digunakan dalam model ini adalah dengan menggunakan nilai eigen. Apabila $p - m$ nilai eigen terkahir mempunyai nilai eigen yang cukup kecil, maka kontribusi dari $\lambda_{m+1} \boldsymbol{e_{m+1}} \boldsymbol{e_{m+1}'} + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{e_p} \boldsymbol{e_p'}$ terhadap $\mathbf{\Sigma}$ pada persamaan (3.4.3) dapat diabaikan. Dengan mengabaikan kontribusi ini, diperoleh persamaan berikut :

$$\mathbf{\Sigma} = \left[\sqrt{\lambda_1}\,e_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\,e_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_m}\,e_m\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\,e_1' \\ \sqrt{\lambda_2}\,e_2' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m}\,e_m' \end{bmatrix} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}}\ \underset{(mxp)}{\mathbf{L}'}. \qquad (3.4.4)$$

Pada pendekatan di atas diasumsikan bahwa faktor khusus $\boldsymbol{\varepsilon}$ pada (3.4.3) keberadaannya tidak terlalu penting dan dapat diabaikan pada pemfaktoran $\mathbf{\Sigma}$. Akan tetapi, jika faktor khusus tetap dilibatkan dalam model, dapat dilakukan pendekatan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\, e_1 \quad \sqrt{\lambda_2}\, e_2 \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_m}\, e_m\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, e_1' \\ \sqrt{\lambda_2}\, e_2' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m}\, e_m' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_p \end{bmatrix}$$

di mana $\psi_i = \sigma_{ii} - \sum_{j=1}^{m} \ell_{ij}^2$ untuk $i$ = 1,2,...,$p$ .

Tujuan analisis faktor adalah menemukan struktur yang lebih sederhana maka yang diperlukan adalah jumlah variabel baru lebih sedikit dari jumlah variabel awal $(m < p)$.

### 3.4.1 Principal Component Factoring (PCF)

Dari sampel acak $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_p$ kita mendapatkan matriks sampel variansi-kovariansi **S** yang mempunyai pasangan nilai eigen-vektor eigen $(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1)$, $(\hat{\lambda}_2, \hat{e}_2), \cdots, (\hat{\lambda}_p, \hat{e}_p)$, di mana dengan $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_p$. Misalkan $m < p$ adalah jumlah faktor umum, maka matriks estimasi faktor *loading* $\hat{\ell}_{ij}$ diberikan oleh (Johnson & Wichern,2007 : 490-491):

$$\underset{(pxm)}{\hat{\mathbf{L}}} = \underset{(pxm)}{\left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\, \hat{e}_1 \;\middle|\; \sqrt{\hat{\lambda}_2}\, \hat{e}_2 \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \sqrt{\hat{\lambda}_m}\, \hat{e}_m\right]} \quad . \qquad (3.4.1.1)$$

Estimasi variansi khusus diberikan oleh elemen diagonal dari matriks $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, sehingga

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\psi}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\psi}_p \end{bmatrix} \quad \text{dengan } \hat{\psi}_i = \sigma_{ii} - \sum_{j=1}^{m} \hat{\ell}_{ij}^2 \quad . \qquad (3.4.1.2)$$

Sedangkan nilai estimasi komunalitasnya adalah :

$$\hat{h}_i^2 = \hat{\ell}_{i1}^2 + \hat{\ell}_{i2}^2 + \cdots + \hat{\ell}_{im}^2$$

**Definisi 3.2 :**

Proporsi dari variansi sampel total yang berasal dari faktor umum ke-$j$ adalah :

$$\frac{\sum_{j=1}^{p} \ell_{ij}^2}{\mathrm{tr}(\mathbf{S})} = \frac{\lambda_j}{\mathrm{tr}(\mathbf{S})}$$

atau

$$\frac{\sum_{j=1}^{p} \ell_{ij}^2}{\mathrm{tr}(\mathbf{R})} = \frac{\lambda_j}{p}$$

di mana $\lambda_j$ adalah nilai eigen dari **S** atau **R**.

### 3.4.2 Principal Axis Factoring (PAF)

Dalam metode PAF digunakan estimasi awal dari $\boldsymbol{\psi}$ dan matriks $\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi}$ atau $\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi}$ untuk mendapatkan :

$$\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi} \cong \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' \qquad (3.4.2.1)$$

atau

$$\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi} \cong \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' \qquad (3.4.2.2)$$

di mana $\hat{\mathbf{L}}$ $(p\ x\ m)$ dan dihitung seperti pada (3.4.1.1) menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dari $\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi}$ atau $\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi}$.

Dari persamaan (3.2.11) diketahui bahwa diagonal dari $\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi}$ adalah komunalitas $\hat{h}_i^2 = s_{ii}^2 - \hat{\psi}_i$, dan diagonal matriks $\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi}$ adalah komunalitas $\hat{h}_i^2 = 1 - \hat{\psi}_i$ (Nilai $\hat{\psi}_i$ dan $\hat{h}_i^2$ yang berbeda untuk **S** dan **R**). Sehingga $\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi}$ atau $\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi}$ memiliki bentuk :

$$\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^2 & s_{21} & \cdots & s_{p1} \\ s_{12} & \hat{h}_2^2 & \cdots & s_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & \hat{h}_p^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}\hat{h}_1^2 & r_{21} & \cdots & r_{p1}\\ r_{12} & \hat{h}_2^2 & \cdots & r_{p2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{1p} & r_{2p} & \cdots & \hat{h}_p^2\end{bmatrix} \qquad (3.4.2.3)$$

Untuk mendapatkan estimasi komunalitas awal pada matriks $\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi}$ digunakan persamaan:

$$\hat{h}_i^2 = 1 - \hat{\psi}_i = 1 - \frac{1}{r^{ii}} \qquad (3.4.2.4)$$

yang merupakan korelasi kuadrat antara $X_i$ dengan $p-1$ variabel yang lain. Dengan **R** merupakan matriks tidak singular dan $r^{ii}$ adalah diagonal ke-$i$ dari matriks $\mathbf{R^{-1}}$**.** Serupa dengan (3.4.2.4) didapatkan estimasi komunalitas awal untuk matriks variansi-kovariansi $\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi}$, yaitu :

$$\hat{h}_i^2 = s_{ii} - \frac{1}{s^{ii}} \qquad (3.4.2.5)$$

di mana $s^{ii}$ adalah diagonal ke-$i$ dari matriks $\mathbf{S^{-1}}$.

Untuk meningkatkan nilai komunalitas, proses di atas diiterasikan hingga perubahan nilai estimasi komunalitas mencapai nilai konvergen.

### 3.4.3 Metode Maksimum Likelihood

Jika faktor umum **F** dan faktor khusus $\boldsymbol{\varepsilon}$ berdistribusi normal maka estimasi maksimum likelihood dari faktor loadings dan variansi khusus dapat diperoleh. Misalkan X adalah vektor random yang teramti dengan rata-rata $\mu$ matriks variansi kovariansi **Σ**. Untuk setiap variabel random $X_i$ , i= 1,2,..,p dilakukan n kali observasi dengan **F** dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ berdistribusi normal maka

$$\boldsymbol{X_j}-\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{LF_j}+\boldsymbol{\varepsilon_j} \text{ dengan j=1,2,...,n .} \qquad (3.4.3.1)$$

Karena **F** dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ berdistribusi normal multivariat maka fungsi likelihood untuk $\boldsymbol{X_j}-\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{LF_j}+\boldsymbol{\varepsilon_j}$ adalah sebagai berikut (Johnson & Wichern,2007 : 495-496):

$$L\,(\mu,\Sigma) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} e^{-(\frac{1}{2}) tr[\Sigma^{-1} \quad (\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' + n(\bar{x}-\mu)(\bar{x}-\mu)')]}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{(n-1)p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{(n-1)p}{2}} e^{-(\frac{1}{2}) tr[\Sigma^{-1} \quad (\sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})']}$$

$$\times (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{p}{2}} e^{-(\frac{n}{2})(\bar{x}-\mu)' \Sigma^{-1} \quad (\bar{x}-\mu)} \qquad (3.4.3.2)$$

yang tergantung pada **L** dan $\boldsymbol{\psi}$ dan $\Sigma = \boldsymbol{LL'} + \psi$. Dengan memaksimumkan persamaan (3.4.3.2) terhadap matriks diagonal $L^t \psi^{-1} L = \Delta$ diperoleh penaksir likelihood untuk komunalitas $\hat{h}_i^2$ adalah:

$$\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + \cdots + \hat{l}_{im}^2 \text{ untuk i= 1,2,...,p} \qquad (3.4.3.4)$$

Nilai $\hat{L}$ dan $\hat{\psi}$ dapat diperoleh dari persamaan (3.4.3.1).

## 3.5 Rotasi Faktor

Tujuan utama proses rotasi adalah tercapainya kesederhanaan terhadap faktor dan meningkatnya kemampuan interpretasinya. Dua metode rotasi dalam analisis faktor yang terus dikembangkan oleh banyak peneliti adalah metode rotasi ortogonal dan metode rotasi oblique. Rotasi ortogonal merupakan rotasi yang dilakukan dengan mempertahankan sumbu secara tegak lurus satu dengan yang lainnya. Dengan melakukan rotasi ini, maka setiap faktor independen terhadap faktor lain karena sumbunya saling tegak lurus. Rotasi ortogonal digunakan bila analisis bertujuan untuk mereduksi jumlah variabel tanpa mempertimbangkan seberapa berartinya faktor yang diekstraksi.

Sedangkan prosedur perotasian oblique tidak mempertahankan sumbu tegak lurus lagi. Dengan rotasi ini maka korelasi antar faktor masih diperhitungkan karena sumbu faktor tidak saling tegak lurus satu dengan yang lainnya. Rotasi oblique digunakan untuk memperoleh jumlah faktor yang secara teoritis cukup berarti. Pada skripsi ini akan difokuskan pada penggunaan metode rotasi ortogonal.

Dalam metode rotasi ortogonal dikenal beberapa pengukuran analitik, diantaranya metode quartimax, varimax dan equimax.

1. Metode quartimax, tujuan akhir yang ingin dicapai adalah menyederhanakan baris sebuah matriks faktor. Nilai faktor loading dirotasi sehingga sebuah variabel akan mempunyai faktor loading tinggi pada salah satu faktor, dan pada faktor-faktor yang lain dibuat sekecil mungkin. Pemusatan metode rotasi ini adalah penyederhanaan struktur pada baris matriksnya. Metode ini tidak banyak dikembangkan oleh para peneliti karena tidak berhasil digunakan untuk mendapatkan struktur yang sederhana. Pada akhirnya metode ini akan membuat sebuah faktor yang terlalu umum dan tujuan rotasi tidak akan dicapai.
2. Metode varimax memfokuskan analisisnya pada penyederhanaan kolom matriks faktor. Penyederhanaan secara maksimum dapat terjadi apabila hanya ada nilai 0 dan 1 dalam sebuah kolom. Pada metode ini terjadi kecenderungan menghasilkan beberapa nilai factor loading yang tinggi (mendekati -1 atau +1) dan beberapa nilai factor loading mendekati 0 pada masing-masing kolom matriks. Logika interpretasi akan lebih mudah ketika korelasi antara faktor dan variabel bernilai +1 atau -1 karena hal ini mengindikasikan adanya asosiasi yang sempurna yang sifatnya positif atau 36 negatif. Nilai 0 mengindikasikan adanya asosiasi yang sangat kurang. Teknik varimax mencoba menghasilkan nilai factor loading yang besar atau faktor lainnya sekecil mungkin. Struktur yang dihasilkan ini jauh lebih sederhana jika dibandingkan dengan metode quartimax. Selain itu, metode varimax ini dapat membedakan faktor dengan lebih jelas.
3. Metode equimax merupakan gabungan antara metode kuartimax dan varimax. Fokus dari metode ini adalah dengan menyederhanakan baris atau kolom matriks faktor. Namun pada perkembangannya metode ini tidak diterima secara meluas atau jarang digunakan. Dari penjelasan di atas, maka yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah metode varimax.