BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini merupakan isi kajian yang menjadi fokus penelitian yaitu, diawali dengan pendefinisian ruang Lebesgue diskrit, kemudian akan dibahas apakah ruang tersebut merupakan ruang yang lengkap, setelah diketahui bahwa ruang tersebut merupakan ruang bernorm dan akan ditunjukkan sifat yang dimilikinya.

Selanjutnya ruang Lebesgue diskrit tersebut dikembangkan dengan memberinya bobot yang kemudian disebut dengan ruang Lebesgue dikrit yang diboboti dan kembali membuktikan kelengkapan dan sifat yang dimilikinya. Adapun pembahasannya sebagai berikut.

3.1 Ruang Lebesgue Diskrit

Definisi 3.1.1 (Castillo dan Rafeiro,2015:26)

Ruang Lebesgue diskrit yang dinotasikan dengan ℓ_p, dimana $1 \leq p < \infty$ merupakan himpunan dari barisan bilangan real $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

Teorema 3.1.2

Ruang ℓ_p adalah ruang bernorm, dengan bentuk normnya $\|X\|_{\ell_p} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} < \infty$.

Bukti :

Ambil sebarang barisan $X = (x_n) \in \ell_p$

1. Akan ditunjukkan $\|X\|_{\ell_p} \geq 0$

   Perhatikan $\|X\|_{\ell_p} = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \cdots}$

   $$= \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}$$

   Karena $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \geq 0$, maka $\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} \geq 0$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\|X\|_{\ell_p} = 0 \Leftrightarrow x_n = 0$

$(\Rightarrow)$ $\|X\|_{\ell_p} = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \cdots} = 0$

$= \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} = 0$

Haruslah $0 \leq |x_n| \leq |x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \cdots = 0$

$x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, maka $X = \{0\}$.

$(\Leftarrow)$ $X = \{0\}$, artinya $X = \{0,0,0, \dots\}$

Sehingga diperoleh $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$

Akibatnya $\|X\|_{\ell_p} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}$

$= \sqrt[p]{|0|^p + |0|^p + |0|^p + \cdots}$

$= \sqrt[p]{0}$

$= 0$

3. Akan ditunjukkan bahwa $\|\lambda X\|_{\ell_p} = |\lambda| \, \|X\|_{\ell_p}$

Perhatikan $\|\lambda X\|_{\ell_p} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p}$

$= \sqrt[p]{|\lambda^p x_1{}^p| + |\lambda^p x_2{}^p| + |\lambda^p x_3{}^p| + \cdots}$

$= \sqrt[p]{|\lambda^p||(x_1{}^p + x_2{}^p + x_3{}^p + \cdots)|}$

$= |\lambda| \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \cdots}$

$= |\lambda| \|X\|_{\ell_p}$

4. Akan ditunjukkan bahwa $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, dimana $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$

$\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p}$, $p \geq 1$

Untuk $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

Untuk $p > 1$

Misalkan $c_i \;\; = x_i + y_i$

$$|c_i|^p = |x_i + y_i|^p$$

$$|c_i|^p = |x_i + y_i||x_i + y_i|^{p-1}$$

$$|c_i|^p = |x_i + y_i||c_i|^{p-1}$$

$$\leq (|x_i| + |y_i|)|c_i|^{p-1}$$

Jumlahkan atas i dari 1 sampai n, diperoleh

$\sum_{i=1}^{n} \; |c_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i| + |y_i|)|c_i|^{p-1} = \sum_{i=1}^{n}|x_i||c_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i||c_i|^{p-1}$

$\sum_{i=1}^{n}|x_i||c_i|^{p-1} \leq \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p}\; \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}(|c_k|^{p-1})^q}$, dimana

$(pq = p + q)$, ekuivalen dengan $(p-1)q = p$. Sehingga

$\sum_{i=1}^{n}|x_i||c_i|^{p-1} \leq \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p}\; \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^p}$

Dengan cara yang sama diperoleh

$\sum_{i=1}^{n}|y_i||c_i|^{p-1} \leq \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p}\; \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^p}$.

Adapun ketaksamaan Holder yaitu $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}\; \sqrt[q]{\sum_{m=1}^{n}|y_m|^p}\right)$. Dengan ketaksamaan ini diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}|c_i|^p \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p} + \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p}\right)\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^p}$$

Kedua ruas dibagi oleh $\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^p}$, diperoleh

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|c_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p} + \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p}$$

Sekarang untuk $n \to \infty$, diruas kanan dua barisan ini konvergen karena $X\ dan\ Y \in \ell_p$. Oleh karena itu diruas kiri barisan tersebut juga konvergen.

Selanjutnya dari hasil tersebut diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.1.3 (Castillo dan Rafeiro, 2016:27)
Ruang ℓ_p adalah ruang Banach ketika $1 \leq p < \infty$.

Bukti :
Misalkan (x_n) adalah sebarang barsian Cauchy diruang ℓ_p, dimana $x_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)} x_3^{(n)}, \dots\right)$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, sehingga untuk semua $n, m > n_0$ diperoleh

$$(1) \quad \|x_n - x_m\|_{\ell^p} = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p} < \varepsilon.$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p$$

$$= \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p$$

$$= \left|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}\right| < \varepsilon\ .$$

Perhatikan bahwa $\left(x_j^{(1)}, x_j^{(2)} x_j^{(3)}, \dots\right) = \left(x_j^{(n)}\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Oleh karena itu terdapat $x_j \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\lim_{m \to \infty} x_j^{(m)} = x_j$.

Misalkan $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ dan akan ditunjukkan bahwa x ada di ℓ_p, sehingga $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Selanjutnya dari (1) untuk semua $m, n > n_0$ diperoleh

$$\sum_{j=1}^{k} \left|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\right|^p < \varepsilon^p, \qquad k = 1,2,3, \dots$$

Ketika $m \to \infty$, maka untuk $n > n_0$

$$\sum_{j=1}^{k} \left|x_j - x_j^{n}\right|^p = \sum_{j=1}^{k} \left|\lim_{m \to \infty} x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\right|^p \leq \varepsilon^p.$$

Sehingga $x - x_n \in \ell_p$ dan menginduksikan bahwa $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Terakhir dengan ketaksamaan Minkowski diperoleh

$$\sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p} = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j{}^{(n)} + x_j - x_j{}^{(n)}\right|^p}$$

$$\leq \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j{}^{(n)}\right|^p} + \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j - x_j{}^{(n)}\right|^p} \; .$$

Ini menunjukkan bahwa $x \in \ell_p$ dan membuktikan kelengkapannya.

Teorema 3.1.4

Jika $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$ maka $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$.

Bukti :

Misalkan $X \in \ell_{p_1}$, dimana $\ell_{p_1} = \{\, X = (x_n); \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_1} < \infty \,\}$.

Diketahui bahwa $\lim |x_n|^{p_1} = 0$, maka $\lim|x_n| = 0$

pilih $\varepsilon = 1 > 0$, terdapat $k \in \mathbb{N}$, sehingga jika $n \geq k$ menyebabkan $|x_n| < 1$.
Sekarang ketika $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, ini berarti bahwa $p_2 - p_1 > 0$, maka

$$|x_n|^{p_2 - p_1} = \frac{|x_n|^{p_2}}{|x_n|^{p_1}} < 1, \qquad \text{yang mana } |x_n|^{p_2} < |x_n|^{p_1} \text{ untuk } n > k.$$

Misalkan $M = \text{maks}\{|x_1|^{p_2-p_1}, |x_2|^{p_2-p_1}, \dots, |x_k|^{p_2-p_1}, 1\}$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p2} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_1}|x_n|^{p_2-p_1} < M\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_1} < \infty \, .$$

ini mengimplikasikan bahwa $X \in \ell_{p_2}$.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\ell_{p_1} \neq \ell_{p_2}$.

Ambil barisan $(x_n) = n^{-\frac{1}{p1}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p1}}}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

ketika $p_1 < p_2$, maka $\frac{p_2}{p_1} > 1$ dan diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{p2}{p1}}} < \infty$

deret tersebut konvergen, sehingga $X \in \ell_{p_2}$, dilain pihak $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

dan deret terakhir adalah deret harmonik yang mana deret tersebut divergen, sehingga $X \notin \ell_{p_2}$.

Selanjutnya akan disajikan sifat inklusi dari ruang Lebesgue diskrit $\ell_p(\mathbb{R})$.

Teorema 3.1.5

Jika $1 \leq p_1, p_2 < \infty$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen.

(1) $p_1 \leq p_2$.

(2) $\ell_{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{p_2}(\mathbb{R})$.

(3) Terdapat konstanta $C \geq 1$ sehingga $\|X\|_{\ell_{p_2}(\mathbb{R})} \leq C\|X\|_{\ell_{p_1}(\mathbb{R})}$ untuk setiap $X \in \ell_{p_1}(\mathbb{R})$.

Bukti :

Pembuktian dari (1) ke (2) sebagai berikut.

Misalkan $X \in \ell_{p_1}$dan $p_1 \leq p_2$. Dimana $\ell_{p_1} = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_1} < \infty$, diperoleh $\lim_{n\to\infty}|x_n| = 0$. Diamati bahwa, terdapat $k \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $n \geq k$, maka $|x_n| < 1$. Diketahui bahwa $p_2 - p_1 \geq 0$, oleh karena itu $|x_n|^{p_2-p_1} \leq 1$, untuk setiap $n \geq k$.

Misalkan $M = \max\{|x_1|^{p_2-p_1}, |x_2|^{p_2-p_1}, \dots, |x_k|^{p_2-p_1}, 1\}$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p2} = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_1}|x_n|^{p_2-p_1} < M\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_1} < \infty$$

Ini menunjukkan bahwa $X \in \ell_{p_2}$(R). Dengan demikian disimpulkan bahwa $\ell_{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{p_2}(\mathbb{R})$.

Pembuktian dari (2) ke (3) sebagai berikut.

Diketahui $\ell_{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{p_2}(\mathbb{R})$, ini mengimplikasikan bahwa $p_1 \leq p_2$,

sehingga untuk setiap $X \in \ell_{p_1}(\mathbb{R})$ diperoleh

$\sqrt[p_1]{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_1}} \geq \sqrt[p_2]{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_2}}$ atau $\|X\|_{\ell_{p_2}(\mathbb{R})} \leq \|X\|_{\ell_{p_1}(\mathbb{R})}$.

Sekarang jika diberikan konstanta > 0 , maka $\|X\|_{\ell_{p_2}(\mathbb{R})} \leq C\|X\|_{\ell_{p_1}(\mathbb{R})}$.

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa (3) mengimplikasikan (1), diperlukan lemma berikut.

Lema 3.1.6 (Gunawan *et al*)

Misalkan $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \{0,1,2,3,\dots\}$, tulis $S_{m,N} := \{m-N,\dots m,\dots,m+N\}$. Misalkan $\xi_k^{m,N} := \begin{cases} 1 & ,\text{jika } k \in S_{m,N} \\ 0 & ,\text{yang lainnya} \end{cases}$, maka terdapat $C \geq 1$, yang tidak terikat oleh m dan N, sehingga

$$(2N+1)^{1/p} \leq \left\|\xi_k^{m,N}\right\|_{\ell_p(\mathbb{R})} \leq C(2N+1)^{1/p}$$

Untuk setiap $N \in \{0,1,2,3,\dots\}$.

Sekarang, asumsikan bahwa (3) berlaku. Dengan menggunakan Lemma 3.1.6, diperoleh

$$(2N+1)^{1/p_2} \leq \left\|\xi_k^{m,N}\right\|_{\ell_{p_2}(\mathbb{R})} \leq \left\|\xi_k^{m,N}\right\|_{\ell_{p_1}(\mathbb{R})} \leq C(2N+1)^{1/p_1}$$

atau $(2N+1)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \leq C$ untuk setiap $N \in \{0,1,2,3,\dots\}$. Oleh karena itu dapat simpulkan bahwa $\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1} \leq 0$ atau $p_1 \leq p_2$.

Contoh 3.1.7

Didefinisikan barisan $X = (x_n) := n^{-\frac{1}{p1}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{p1}}}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Ketika $p_1 < p_2$, kita punya $\frac{p_2}{p_1} > 1$ dan diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p_1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p2}{p1}}} < \infty$.

Jadi diperoleh $X \in \ell_{p_2}(\mathbb{R})$. Dilain pihak, $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, dan diketahui bahwa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ adalah barisan harmonik yang mana divergen, jadi $X \notin \ell_{p_1}(\mathbb{R})$.

Selanjutnya akan didefinisikan ruang Lebesgue diskrit yang diboboti.

3.2 Ruang Lebesgue Diskrit Yang Diboboti

Definisi 3.2.1

Pendefinisian ruang Lebesgue diskrit yang diboboti yaitu misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $W = (w_n)$ adalah barisan bilangan real positif, ruang Lebesgue diskrit yang diboboti $\ell_p^W(\mathbb{R})$ adalah himpunan dari barisan $X = (x_n) \subseteq \mathbb{R}$,

Teorema 3.2.2

Ruang $\ell_p{}^W$ adalah ruang bernorm, dengan bentuk normnya

$$\|X\|_{\ell_p^W(\mathbb{R})} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Bukti :

Ambil sebarang barisan $X = (x_n) \in \ell_p$

1. Akan ditunjukkan $\|X\|_{\ell_p{}^W} \geq 0$

   Perhatikan $\|X\|_{\ell_p{}^W} = \sqrt[p]{|x_1 w_1|^p + |x_2 w_2|^p + |x_3 w_3|^p + \cdots}$

   $= \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p}$

   Karena $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p \geq 0$, maka $\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p} \geq 0$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\|X\|_{\ell_p{}^W} = 0 \iff x_n = 0$

   ($\Rightarrow$) $\|X\|_{\ell_p{}^W} = \sqrt[p]{|x_1 w_1|^p + |x_2 w_2|^p + |x_3 w_3|^p + \cdots} = 0$

   $= \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p} = 0$

   maka $0 \leq |x_n w_n| \leq |x_1 w_1|^p + |x_2 w_2|^p + |x_3 w_3|^p + \cdots = 0$

   $x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sehingga $X = \{0\}$.

   ($\Leftarrow$) $X = \{0\}$, artinya $X = \{0,0,0, \dots\}$

   Sehingga diperoleh $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = 0$

   Akibatnya $\|X\|_{\ell_p{}^W} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p}$

   $= \sqrt[p]{|0|^p + |0|^p + |0|^p + \cdots}$

   $= \sqrt[p]{0}$

   $= 0$

3. Akan ditunjukkan bahwa $\|\lambda X\|_{\ell_p{}^W} = |\lambda| \, \|X\|_{\ell_p{}^W}$

   Perhatikan $\|\lambda X\|_{\ell_p{}^W} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n w_n|^p}$

   $= \sqrt[p]{|\lambda^p x_1 w_1{}^p| + |\lambda^p x_2 w_2{}^p| + |\lambda^p x_3 w_3{}^p| + \cdots}$

   $= \sqrt[p]{|\lambda^p| |(x_1 w_1{}^p + x_2 w_2{}^p + x_3 w_3{}^p + \cdots)|}$

$$= |\lambda| \sqrt[p]{|x_1 w_1|^p + |x_2 w_2|^p + |x_3 w_3|^p + \cdots}$$

$$= |\lambda| \|X\|_{\ell_p}$$

4. Akan ditunjukkan bahwa $\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$, dimana $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$

$\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n + y_n w_n|^p} \le \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p} + \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |y_n w_n|^p}$, $p \ge 1$

Untuk $p = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n + y_n w_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n w_n| + |y_n w_n|)$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n w_n|$$

Untuk $p > 1$

Misalkan $c_i = x_i w_i + y_i w_i$

$$|c_i|^p = |x_i w_i + y_i w_i|^p$$

$$|c_i|^p = |x_i w_i + y_i w_i| |x_i w_i + y_i w_i|^{p-1}$$

$$|c_i|^p = |x_i w_i + y_i w_i| |c_i|^{p-1}$$

$$\le (|x_i w_i| + |y_i w_i|) |c_i|^{p-1}$$

Jumlahkan atas i dari 1 sampai n, diperoleh

$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^p \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i w_i| + |y_i w_i|) |c_i|^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} |x_i w_i| |c_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i w_i| |c_i|^{p-1}$

$\sum_{i=1}^{n} |x_i w_i| |c_i|^{p-1} \le \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x_j w_j|^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} (|c_k|^{p-1})^q}$,dimana $pq = p + q$, ekuivalen dengan $(p-1)q = p$. Sehingga diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i w_i| |c_i|^{p-1} \le \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |x_j w_j|^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^p}$$

Dengan cara yang sama diperoleh $\sum_{i=1}^{n} |y_i w_i| |c_i|^{p-1} \le \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} |y_i w_i|^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^p}$.

Adapun ketaksamaan Holder yaitu $\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}\ \sqrt[q]{\sum_{m=1}^{n}|y_m|^p}$. Dengan ketaksamaan ini diperoleh

$$\sum_{n=1}^{n}|c_i|^p \leq \left(\sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|x_i w_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|y_i w_i|^p}\right)\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^p}$$

Kedua ruas dibagi oleh $\sqrt[q]{\sum_{k=1}^{n}|c_k|^p}$, diperoleh

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}|c_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|x_i w_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n}|y_i w_i|^p}$$

Sekarang untuk $n \to \infty$, diruas kanan dua barisan ini konvergen karena $X\ dan\ Y \in {\ell_p}^W$. Oleh karena itu diruas kiri barisan tersebut juga konvergen.

Selanjutnya dari hasil tersebut diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.2.3

Ruang ${\ell_p}^W$adalah lengkap, dimana $1 \leq p < \infty$ dan $W = (w_n)$ adalah barisan positif.

Bukti :

Misalkan (x_n) adalah sebarang barsian Cauchy diruang${\ell_p}^W$, dimana $x_n = \left({a_1}^{(n)}, {a_2}^{(n)} {a_3}^{(n)}, \dots\right)$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$, sehingga untuk semua $m, n > K$ diperoleh

$$(1) \quad \|x_n - x_m\|_{{\ell_p}^W} = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{\infty}\left|{a_j}^{(n)} - {a_j}^{(m)}\right|^p} < \varepsilon.$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left|{a_j}^{(n)} - {a_j}^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p$$

$$= \left|{a_j}^{(n)} - {a_j}^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p$$

$$= \left|{a_j}^{(n)} - {a_j}^{(m)}\right| < \varepsilon$$

Perhatikan bahwa $\left(a_j{}^{(1)}, a_j{}^{(2)} a_j{}^{(3)}, \dots\right) = \left(a_j{}^{(n)}\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Misalkan $a_j{}^{(n)} \longrightarrow a_j$, dimana $n \longrightarrow \infty$ atau dapat ditulis $\lim_{n\to\infty}\left(a_j{}^{(n)}\right) = a_j$. Selanjutnya dari (1) untuk semua $m, n > K$ diperoleh $\sum_{j=1}^{K}\left|a_j{}^{(n)} - a_j{}^{(m)}\right|^p < \varepsilon^p$.

Misalkan $m \to \infty$, maka untuk $n > K$

$$\sum_{j=1}^{K}\left|a_j{}^{(n)} - a_j\right|^p \leq \varepsilon^p$$

Selanjutnya misalkan $K \to \infty$, maka untuk $n > K$

$$(2) \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j{}^{(n)} - a_j\right|^p \leq \varepsilon^p$$

Ini menunjukkan bahwa $x_n - x = \left(a_j{}^{(n)} - a_j\right) \in \ell_p{}^W$ dan ketika $x_n \in \ell_p{}^W$, maka $x = x_n + (x - x_n) \in \ell_p{}^W$. Dengan demikian deret pada (2) merepresentasikan $\|x_n - x_m\|^p$ sehingga $x_n \to x$ dan ketika (x_n) adalah barisan Cauchy di $\ell_p{}^W$, ini membuktikan bahwa ruang $\ell_p{}^W$lengkap, dimana $1 \leq p < \infty$.

Teorema 3.2.4

Untuk $W = (1)$, ruang $\ell_p^W(\mathbb{R})$ adalah ruang Lebesgue diskrit $\ell_p(\mathbb{R})$.

Bukti :

Ketika $\|X\|_{\ell_p(\mathbb{R})} \coloneqq (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p}$ merupakan norm dari $\ell_p(\mathbb{R})$ dan $w_n > 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dapat dibuktikan bahwa $\|X\|_{\ell_p^W(\mathbb{R})}$ merupakan norm di ruang $\ell_p^W(\mathbb{R})$ juga.

Disisi lain, untuk $p = \infty$, $\ell_\infty^W(\mathbb{R})$ didefinisikan sebagai himpunan dari barisan $X = (x_n) \subseteq \mathbb{R}$ sehingga

$$\|X\|_{\ell_\infty^W(\mathbb{R})} \coloneqq \max_{n\in\mathbb{N}}|x_n w_n| < \infty.$$

Selanjutnya kardinalitas dari himpunan $\{n \in \mathbb{N}: |x_n w_n| > \gamma\}$ dinotasikan dengan $|\{n \in \mathbb{N}: |x_n w_n| > \gamma\}|$.

Lema 3.2.5

Misalkan $1 \leq p < \infty$ $W = (w_n)$ adalah barisan positif, maka $\ell_p^W(\mathbb{R}) \subset \ell_\infty^W(\mathbb{R})$.

Bukti.

Ambil sebarang barisan $X = (x_n) \in \ell_p^W(\mathbb{R})$, dimana $\ell_p^W = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^p < \infty$. Maka terdapat $k \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $n \geq k$, diperoleh $|x_n w_n| < 1$.

Pilih $M = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|x_1 w_1|, \dots, |x_{n-1} w_{n-1}|, 1\}$. maka $|x_n|^p \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. karenanya, dapat disimpulkan bahwa $X = (x_n) \in \ell_\infty^W(\mathbb{R})$ dan $\ell_p^W(\mathbb{R}) \subset \ell_\infty^W(\mathbb{R})$.

Lema 3.2.6

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan $W = (w_n)$ adalah barisan positif. Ruang Lebesgue diskrit yang diboboti $\ell_p^W(\mathbb{R})$ adalah ruang Banach dengan normnya $\|X\|_{\ell_p^W(\mathbb{R})}$.

Selanjutnya tiba pada sifat inklusi dari ruang $\ell_p^W(\mathbb{R})$. Disajikan kondisi cukup untuk ruang $\ell_p^W(\mathbb{R})$ pada teorema berikut.

Teorema 3.2.7

Misalkan $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ dan $W = (w_n)$, $U = (u_n)$ adalah barisan bilangan real positif. Jika dipunyai kondisi berikut

(1) $p_1 \leq p_2$ dan $u_n \leq w_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\ell_{p_1}^W(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{p_2}^U(\mathbb{R})$.

(3) Terdapat konstanta $C \geq 1$ sehingga $\|X\|_{\ell_{p_2}^U(\mathbb{R})} \leq \|X\|_{\ell_{p_1}^W(\mathbb{R})}$ untuk setiap $X \in \ell_{p_1}^W(\mathbb{R})$.

Maka $(1) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.

Bukti.

Andaikan (1) berlaku. Jika $X \in \ell_{p_1}^W(\mathbb{R})$, maka $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n w_n|^{p_1} < \infty$. Oleh karena itu terdapat $k \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $n \geq k$, diperoleh $|x_n w_n| < 1$. Sekarang, diketahui bahwa $p_2 - p_1 > 0$, karenanya $|x_n w_n|^{p_2 - p_1} < 1$, untuk setiap $n \geq k$. misalkan $M = \max\{|x_1 w_1|^{p_2 - p_1}, |x_2 w_2|^{p_2 - p_1}, \dots, |x_k w_k|^{p_2 - p_1}, 1\}$, maka diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|^{p2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_n|^{p2} = \sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_n|^{p_1} \, |w_n x_n|^{p_2 - p_1} < M \sum_{n=1}^{\infty} |w_n x_n|^{p_1}$$
$$< \infty.$$

Ini menunjukkan bahwa $X \in \ell_{p_2}^{U}(\mathbb{R})$, karenanya dapat disimpulkan $\ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{p_2}^{U}(\mathbb{R})$. Selanjutnya, ketika $(\ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R}), \ell_{p_2}^{U}(\mathbb{R}))$ adalah pasangan Banach, dengan menggunakan argument yang serupa dalam membuktikan Teorema 3.2.7, diperoleh (2) dan (3) adalah ekuivalen.

Teorema 3.2.8

Misalkan $1 \leq p_1, p_2 < \infty$ dan $W = (w_n)$ adalah barisan bilangan real positif. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

(1) $p_1 \leq p_2$.

(2) $\ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{p_2}^{W}(\mathbb{R})$.

(3) Terdapat konstanta $C \geq 1$ sehingga $\|X\|_{\ell_{p_2}^{W}(\mathbb{R})} \leq C\|X\|_{\ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R})}$ untuk setiap $X \in \ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R})$.

Bukti :

Kenyataan bahwa (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) dibuktikan pada Teorema 3.2.11. Untuk membuktikan bahwa (3) mengimplikasikan (1), akan digunakan pernyataan lema berikut.

Lema 3.2.9

Misalkan $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \{0,1,2,3,\dots\}$, tulis $S_{m,N} \coloneqq \{m-N, \dots m, \dots, m+N\}$. Misalkan $\eta_k^{m,N} \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{w_k} & \text{, jika } k \in S_{m,N} \\ 0 & \text{, yang lainnya} \end{cases}$, maka terdapat $C \geq 1$, yang tidak terikat oleh m dan N, sehingga

$$(2N+1)^{1/p} \leq \left\|\eta_k^{m,N}\right\|_{\ell_p^{W}(\mathbb{R})} \leq C(2N+1)^{1/p}$$

Untuk setiap $N \in \{0,1,2,3,\dots\}$.

Sekarang, asumsikan bahwa (3) berlaku. Dengan menggunakan Lemma 3.2.9, diperoleh

$$(2N+1)^{1/p_2} \leq \left\|\xi_k^{m,N}\right\|_{\ell_{p_2}^{W}(\mathbb{R})} \leq \left\|\xi_k^{m,N}\right\|_{\ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R})} \leq C(2N+1)^{1/p_1}$$

atau $(2N+1)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}} \leq C$ untuk setiap $N \in \{0,1,2,3,\dots\}$. Karenanya, dapat simpulkan bahwa $\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} \leq 0$ atau $p_1 \leq p_2$.

Contoh 3.2.10

Jika $p_1 < p_2$ dan $W = (w_n) = 1$, $U = (u_n) = 2$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka diperoleh $\ell_{p_1}^{U}(\mathbb{R})$ subset sejati dari $\ell_{p_2}^{W}(\mathbb{R})$.

jika $p_1 < p_2$, menurut Teorema 3.2.8 diketahui bahwa $\ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{p_2}^{U}(\mathbb{R})$. Ketika $p_1 < p_2$, maka $\frac{p_2}{p_1} > 1$ dan diperoleh $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n u_n|^{p_2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p2}{p1}}} < \infty$.

Jadi $X \in \ell_{p_2}^{U}(\mathbb{R})$. Dilain pihak, $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n w_n|^{p_1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,dan diketahui bahwa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ adalah barisan harmonik yang mana divergen, jadi $X \notin \ell_{p_1}^{W}(\mathbb{R})$.

Selanjutnya tiba pada kondisi cukup dan perlu untuk sifat inklusi dari ruang $\ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R})$, berdasarkan teorema berikut.

Teorema 3.2.11

Misalkan $W = (w_n)$, $U = (u_n)$ adalah barisan real positif. Maka, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

(1) $u_n \leq w_n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{\infty}^{U}(\mathbb{R})$.

(3) Terdapat konstanta $C \geq 1$ sehingga $\|X\|_{\ell_{\infty}^{U}(\mathbb{R})} \leq \|X\|_{\ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R})}$ untuk setiap $X \in \ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R})$.

Bukti :

Misalkan (1) berlaku dan misalkan sebarang barisan $X = (x_n)$ adalah anggota dari $\ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R})$, maka terdapat $M > 0$ sehingga $|x_n w_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$·. ketika $u_n \leq w_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diperoleh $|x_n u_n| \leq |x_n w_n| \leq M$. Sehingga $X = (x_n) \in \ell_{\infty}^{U}(\mathbb{R})$ dan $\ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R}) \subseteq \ell_{\infty}^{U}(\mathbb{R})$. selanjutnya, ketika $(\ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R}), \ell_{\infty}^{U}(\mathbb{R}))$ adalah sepasang Banach, dapat dibuktikan bahwa (2) dan (3) ekuivalen dengan menggunakan argument yang sama pada Teorema 3.2.7. Terakhir, akan dibuktikan bahwa (3) mengimplikasikan (1).

Ambil Y= $(\frac{1}{w_n}) \in \ell_{\infty}^{W}(\mathbb{R})$, perhatikan

$$\max_{n\in\mathbb{N}}\left|(\frac{1}{w_n})u_n\right| \leq \max_{n\in\mathbb{N}}\left|\left(\frac{1}{w_n}\right)w_n\right| = 1.$$

Ini menunjukkan bahwa $\frac{u_n}{w_n} \leq 1$untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh $u_n \leq w_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 3.2.12

Sekarang akan dibuktikan. Jika $W = (w_n) = n$, dan $U = (u_n) = \frac{1}{n+1}$, maka $\ell_\infty^W(\mathbb{R})$ subset sejati dari $\ell_\infty^U(\mathbb{R})$.

Dengan menggunakan Teorema 3.2.11 diperoleh $\ell_\infty^W(\mathbb{R}) \subseteq \ell_\infty^U(\mathbb{R})$. Didefinisikan $X = (x_n) = n$, untuk setiap n $\in \mathbb{N}$, maka $|x_n u_n| \leq 1$, sehingga diperoleh $X \in \ell_\infty^U(\mathbb{R})$. Dilain pihak, $|x_n w_n| = n^2$, dan diketahui bahwa n^2 adalah divergen, jadi $X \notin \ell_\infty^W$.