BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 *Overdispersi*

Pengamatan dengan data cacah untuk regresi *Poisson* dikatakan mengandung *overdispersi* apabila nilai variansi lebih besar dari nilai mean. Menurut Wang dan Famoye, Jika data tersebut terdapat *overdispersi* maka dapat menyebabkan taksiran parameter yang didapatkan tidak efisien, walaupun cenderung tetap konsisten (Jinnan, 2016).

3.1.1 Deviance

Analisis *deviance* merupakan salah satu analisis yang digunakan dalam analisis regresi pada pembentukan suatu model. *Deviance* dapat diartikan sebagai logaritma dari uji kemungkinan suatu model yaitu (Rusianti, 2016)

$$
\begin{aligned}
D &= -2\ln\left[\frac{L(y;\mu)}{L(y;y)}\right] \\
&= 2\big(logL(y;y) - logL(y;\mu)\big) \\
&= 2\left\{\left(log\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-y_i}{y_i}^{y_i}}{y_i!}\right) - \left(log\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\mu_i}{\mu_i}^{y_i}}{y_i!}\right)\right\} \\
&= 2\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i logy_i - y_i - logy_i!)\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i log\mu_i - \mu_i - logy_i!)\right)\right\} \\
&= 2\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i logy_i - y_i - logy_i!) - \sum_{i=1}^{n}(y_i log\mu_i - \mu_i - logy_i!)\right\} \\
&= 2\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i log\frac{y_i}{\mu_i} - (y_i - \mu_i)\right\} \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

3.1.2 Pendeteksian Overdispersi

Sebelum membuat model regresi *Hurdle Poisson*, akan dilihat terlebih dahulu apakah data tersebut mengalami overdispersi atau tidak. Cara untuk mendeteksi overdispersi pada model regresi *Poisson* adalah dengan menggunakan statistik *deviance*, dimana nilai statistik *deviance* yang dibagi dengan derajat bebas nya. Nilai hasil bagi tersebut harus mendekati 1, jika nilai hasil bagi tersebut lebih dari 1 maka terdapat *overdispersi*. Langkah-langkah yang akan dilakukan untuk melakukan pengujian tersebut adalah sebagai berikut:

1. Perumusan Hipotesis

   $H_0 : \hat{\phi} = 0$ (Tidak terdapat *overdispersi* pada model regresi *Poisson*)

   $H_1 : \hat{\phi} > 0$ (Terdapat *overdispersi* pada model regresi *Poisson*)
2. Statistik Uji

   Statistik uji yang digunakan adalah:

   $$\hat{\phi} = \frac{\text{nilai deviance}}{\text{n} - \text{p}}$$

   $$D = 2\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i log\frac{y_i}{\mu_i} - (y_i - \mu_i)\right\} \quad (3.2)$$

   Keterangan :

   D : nilai deviance

   $\hat{\phi}$: parameter dispersi

   y_i : nilai variabel respon dari pengamatan ke-i

   μ_i : taksiran rata-rata banyak kasus ke-i pada model regresi *Poisson*

   n : banyaknya pengamatan

   p : banyaknya parameter
3. Kriteria Pengujian

   Dengan mengambil taraf nyata sebesar α, maka H_0ditolak jika $\hat{\phi} > 1$
4. Kesimpulan

   Interpretasi ditolak atau diterimanya H_0

3.2 Model Regresi *Hurdle*

Penggunanan model *Hurdle* yang paling penting adalah ketika data nya bersifat diskrit (*count* data). Pada model *Hurdle* menjelaskan tentang berlebihnya nilai nol (*zero counts*). Hal itu meunujukkan bahwa model *Hurdle* bisa digunakan dimana variabel respon nya mengandung banyak nilai nol. Model *Hurdle* mampu mengatasi kasus *excess zeros* dengan cara membagi dua model ke dalam dua bagian yaitu:

1. Model untuk data biner yang bernilai nol (*zero counts*) atau nilai positif (*positive counts*), dimana model tersebut ditaksir dengan model logit.
2. Model untuk data yang bernilai positif (*positive counts*) saja, dimana model tersebut ditaksir dengan *Truncated model*.

Misalkan $k_1(0)$ adalah nilai probabilitas (peluang) ketika variabel respon (Y) bernilai sama dengan 0 dan $k_2(y), y = 1,2,3,\ldots$ adalah sebuah fungsi probabilitas (peluang) ketika variabel respon (Y) bernilai positif. Sehingga, fungsi probabilistiknya (peluang) dari model *Hurdle* adalah sebagai berikut (Saffari. dkk, 2012):

$$P(Y_i = y) = \begin{cases} k_1(0), & y = 0 \\ \left(1 - k_1(0)\right)k_2(y), & y = 1,2,\ldots \end{cases} \quad (3.3)$$

Mullahy (1986) mendiskusikan tentang kedua model *Hurdle* yang terbentuk pada fungsi probabilitas (peluang) untuk nilai non-negatif, misalkan f_1 dan $f_2$dengan melihat bentuk umum model *Hurdle* diatas, maka $k_1(0) = f_1(0)$ dan $k_2(y) = \frac{f_2(y)}{(1-f_2(0))}$. Pada kasus k_2, akan dilakukan normalisasi, karena f_2 berlaku untuk nilai non-negatif $(y = 0,1,2,\ldots)$ sedangkan k_2 berlaku untuk nilai positif $(y = 1,2,\ldots)$. Ini berarti perlu dilakukan untuk memotong fungsi peluang f_2.

$$f_2(0) + f_2(1) + f_2(2) + \cdots = 1, \;\; y = 0,1,2,\ldots$$

$$f_2(0) - f_2(0) + f_2(1) + f_2(2) + \cdots = 1 - f_2(0)$$

$$f_2(1) + f_2(2) + \cdots = 1 - f_2(0), \quad y = 1,2,3,\ldots$$

$$\frac{f_2(1)}{1 - f_2(0)} + \frac{f_2(2)}{1 - f_2(0)} + \cdots = \frac{1 - f_2(0)}{1 - f_2(0)}$$

$$\frac{f_2(1)}{1 - f_2(0)} + \frac{f_2(2)}{1 - f_2(0)} + \cdots = 1$$

$$\frac{f_2(y)}{1 - f_2(0)}, \;\; y = 1,2,\ldots$$

Sehingga menurut asumsi Mullahy (1986), distribusi peluang dari model *Hurdle* adalah sebagai berikut:

$$P(y = 0) = f(y = 0) = f_1(0) \quad (3.4)$$

$$P(y = y) = f(y = y) = \frac{1-f_1(0)}{1-f_2(0)} f_2(y) = \theta f_2(y)\,, y = 1,2,3,\ldots \quad (3.5)$$

Berdasrkan Persamaan (3.4) dan (3.5) maka dapat ditulis distribusi peluang dari model *Hurdle* sebagai berikut:

$$P(Y_i = y) = \begin{cases} f_1(0), & y = 0 \\ \theta f_2(y), & y = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{3.6}$$

Dimana f_2 disebut sebagai *parent-process*. *Parent-process* merupakan proses yang membangkitkan nilai yang bukan nol (nilai positif). Nilai pembilang dari θ adalah nilai peluang $y = 0$ dan nilai penyebutnya disebut sebagai normalisasi, sehingga dapat diperoleh f_2 yang terpotong. Perhatikan bahwa jika $f_1 = f_2$ atau ekuivalen dengan $\theta = 1$ maka model *Hurdle* akan sama dengan model *Parent*.

Nilai mean dan varians dari model *Hurdle* akan diberikan persamaan sebagai berikut :

1. $E(Y) = \theta \sum_{y=1}^{\infty} y\, f(y)$
2. $Var(Y) = \theta \sum_{y=1}^{\infty} y^2 f(y) + \left[\theta \sum_{y=1}^{\infty} y f(y)\right]^2$

Bukti :

1. Mean

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} y\, P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0} yP(Y = y) + \sum_{y=1}^{\infty} y\, P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0} y[f(0)] + \sum_{y=1}^{\infty} y\, \theta f(y) \\ &= 0 + \sum_{y=1}^{\infty} \theta y\, f(y) \\ &= \sum_{y=1}^{\infty} \theta y\, f(y) \\ &= \theta \sum_{y=1}^{\infty} y\, f(y) \end{aligned}$$

2. Varians

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E(Y^2 - Y + Y) \\ &= E(Y(Y-1) + Y) \end{aligned}$$

$$= E\big(Y(Y-1)\big) + E(Y)$$

$$E\big(Y(Y-1)\big) = \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)\,P(Y=y)$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty} y(y-1)\,P(Y=y)$$

$$= \sum_{y=0} y(y-1)P(Y=y) + \sum_{y=1}^{\infty} y(y-1)\,P(Y=y)$$

$$= \sum_{y=0} y(y-1)[f(0)] + \sum_{y=1}^{\infty} y(y-1)\,\theta f(y)$$

$$= \sum_{y=0} (y^2-y)[f(0)] + \sum_{y=1}^{\infty} (y^2-y)\,\theta f(y)$$

$$= 0 + \textstyle\sum_{y=1}^{\infty}(y^2-y)\theta\, f(y)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} (y^2-y)\theta\, f(y)$$

$$= \theta \sum_{y=1}^{\infty} (y^2-y)\, f(y)$$

$$E(Y^2) = E\big(Y(Y-1)\big) + E(Y)$$

$$= E\big(Y(Y-1)\big) + E(Y)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \theta(y^2-y)\, f(y) + \sum_{y=1}^{\infty} \theta y\, f(y)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \theta(y^2-y+y)\, f(y)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \theta\, y^2 f(y)$$

$$= \theta \sum_{y=1}^{\infty} y^2 f(y)$$

$$Var\ (Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2$$
$$= \theta \sum_{y=1}^{\infty} y^2 f(y) + \left[\theta \sum_{y=1}^{\infty} y f(y)\right]^2$$

3.2.1 Model Regresi *Hurdle Poisson*

Misalkan $Y_i, i = 1,2,3, \dots, n$ adalah sebuah nilai non-negatif dari variabel acak, dan misalkan $Y_i = 0$ adalah observasi dengan frekuensi nilai 0 yang terlalu banyak, sehingga tidak bisa ditangani dengan menggunakan model regresi *Poisson* biasa. Pandang bahwa model regresi *Hurdle Poisson* dengan variabel respon $Y_i, (\ i = 1,2,3, \dots, n)$ memiliki distribusi sebagai berikut (Saffari. dkk, 2012):

$$P(Y_i = y_i) = \begin{cases} 1 - \pi_i & , y_i = 0 \\ (\pi_i) \frac{e^{-\mu_i} {\mu_i}^{y_i}}{(1-\pi_i) y_i!} & , y_i > 0 \end{cases}$$

dimana $0 < \pi_i < 1$ dan $\pi_i = \pi_i(x_i)$ memenuhi

Model logit dengan j variabel prediktor dinyatakan sebagai:

$$\pi_i = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} \qquad (3.7)$$

Model logit π pada Persamaan (3.7) ditransformasikan menggunakan transformasi logit dinyatakan pada uraian sebagai berikut:

$$\pi_i = \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}$$

$$(\pi_i)\left(\frac{1}{1-\pi_i}\right) = \left(\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right)\left(\frac{1}{1-\pi_i}\right)$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \left(\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}}\right)$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \left(\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right)\left(\frac{1}{\frac{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} - \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}}\right)$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \left(\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right)\left(\frac{1}{\frac{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)-\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}}\right)$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \left(\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}}\right)$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \left(\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right)\left(\frac{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1}\right)$$

$$\frac{\pi_i}{1-\pi_i} = \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)$$

$$log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = log\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)\right)$$

$$log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right) \qquad (3.8)$$

Berdasarkan persamaan (3.8), maka dapat ditulis model Logit sebagai berikut:

$$logit(\pi_i) = log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j \qquad (3.9)$$

dimana :

z : vektor kovariat pada variabel prediktor

$z_i = \left[z_{i1} = 1, z_{i2}, \dots, z_{ip}\right]$

δ : vektor kolom parameter koefisien regresi untuk model logit

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_p \end{bmatrix}$$

Model *Truncated Poisson* dapat ditulis sebagai berikut:

$$\log(\mu_i) = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j$$

$$\mu_i = exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right) \qquad (3.10)$$

dimana :

x : vektor kovariat pada variabel prediktor

$x_i = \left[x_{i1} = 1, x_{i2}, \ldots, x_{ip}\right]$

β : vektor kolom parameter koefisien regresi untuk model *Truncated Poisson*

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}$$

3.2.2 Penaksiran Parameter Model Regresi *Hurdle Poisson*

Distribusi peluang model *Hurdle Poisson* ditulis sebagai berikut:

$$P(Y_i = y_i) = \begin{cases} 1 - \pi_i & , y_i = 0 \\ (\pi_i)\frac{e^{-\mu_i}\mu_i{}^{y_i}}{(1-\pi_i)y_i!} & , y_i > 0 \end{cases} \qquad (3.11)$$

dimana,

$$\pi_i = \frac{exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} \qquad (3.12)$$

$$\mu_i = exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right) \qquad (3.13)$$

$$P(Y_i = 0) = 1 - \pi_i \qquad (3.14)$$

$$P(Y_i > 0) = (\pi_i)\frac{e^{-\mu_i}\mu_i{}^{y_i}}{(1-\pi_i)y_i!} \qquad (3.15)$$

Substitusi Persamaan (3.12) ke dalam Persamaan (3.14) , maka Persamaan (3.14) dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
P(Y_i = 0) &= 1 - \pi_i \\
&= 1 - \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} \\
&= \frac{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} - \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} \\
&= \frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(Y_i > 0) &= (\pi_i)\frac{e^{-\mu_i}{\mu_i}^{y_i}}{(1-\pi_i)y_i!} \\
&= (\pi_i)\frac{\frac{\exp(-\mu_i){\mu_i}^{y_i}}{y_i!}}{(1-\pi_i)y_i!} \\
&= (\pi_i)\frac{\exp(-\mu_i){\mu_i}^{y_i}[y_i!]}{(1-\pi_i)y_i!}
\end{aligned}
$$

$$
= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\frac{\exp(-\mu_i){\mu_i}^{y_i}[y_i!]^{-1}}{[1-\exp(-\mu_i)]}\right]
$$

$$
= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\left(\frac{\exp(-\mu_i)}{[1-\exp(-\mu_i)]}\right)\left({\mu_i}^{y_i}[y_i!]^{-1}\right)\right]
$$

$$
= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\left(\frac{\exp(-\mu_i)}{[1-\exp(-\mu_i)]}\right)\left(\frac{\frac{1}{\exp(-\mu_i)}}{\frac{1}{\exp(-\mu_i)}}\right)\left({\mu_i}^{y_i}[y_i!]^{-1}\right)\right]
$$

$$
= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1 + \exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\left(\frac{\frac{\exp(-\mu_i)}{\exp(-\mu_i)}}{\frac{[1-\exp(-\mu_i)]}{\exp(-\mu_i)}}\right)\left({\mu_i}^{y_i}[y_i!]^{-1}\right)\right]
$$

$$= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\left(\frac{1}{\frac{[1-\exp(-\mu_i)]}{\exp(-\mu_i)}}\right)\left(\mu_i^{y_i}[y_i!]^{-1}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\left(\frac{1}{\frac{1}{\exp(-\mu_i)}-\frac{\exp(-\mu_i)}{\exp(-\mu_i)}}\right)\left(\mu_i^{y_i}[y_i!]^{-1}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\left(\frac{1}{\frac{1}{\exp(-\mu_i)}-1}\right)\left(\mu_i^{y_i}[y_i!]^{-1}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\left(\frac{1}{[\exp(\mu_i)-1]}\right)\left(\mu_i^{y_i}[y_i!]^{-1}\right)\right]$$

$$= \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\frac{\mu_i^{y_i}}{[exp(\mu_i)-1]y_i!}\right] \tag{3.17}$$

Substitusi Persamaan (3.13) kedalam Persamaan (3.17) , maka Persamaan (3.17) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(y_i > 0) = \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\frac{\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right]y_i!}\right] \tag{3.18}$$

Substitusi Persamaan (3.16) dan Persamaan (3.18) kedalam Persamaan (3.11), maka distribusi peluang model *Hurdle Poisson* yang terbentuk dapat ditulis sebagai berikut:

$$P(Y_i = y_i) = \begin{cases} \frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} & , y_i = 0 \\ \left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\frac{\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right]y_i!}\right] & , y_i > 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Dalam model regresi *Hurdle Poisson* untuk menaksir parameter digunakan metode kemungkinan maksimum yaitu dengan memaksimumkann fungsi kemungkinan. Seperti yang telah dijelaskan bahwa fungsi peluang terbentuk dari kombinasi model logit dan *Truncated Poisson*. Model logit observasi bernilai nol atau nilai positif dan *Truncated Poisson* untuk observasi bernilai positif saja , hal ini dapat dilakukan secara terpisah karena model Logit dan *Truncated Poisson* independen.

Berdasarkan Persamaan (3.19), maka fungsi kemungkinan dari model regresi *Hurdle Poisson* adalah sebagai berikut:

$$L(\delta,\beta) = \prod P(Y_i = y_i)$$

$$L(\delta,\beta) = L(\delta)L(\beta)$$

$$= \prod\left(I_{y_i=0}\frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} I_{y_i>0}\left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\frac{\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right]y_i!}\right]\right) \quad (3.20)$$

Sehingga ln fungsi kemungkinan (*likelihood*) dari model regres *Hurdle Poisson* sebagai berikut:

$$\ln L(\delta,\beta) = \ln L(\delta) \ln L(\beta)$$

$$\ln\left\{\prod\left(I_{y_i=0}\frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} I_{y_i>0}\left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\frac{\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right]y_i!}\right]\right)\right\} \quad (3.21)$$

$$\ln L(\delta,\beta) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i=0}\ln\left(\frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right) + \sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\ln\left(\left[\frac{\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\left[\frac{\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right]y_i!}\right]\right)$$

$$\ln L(\delta,\beta) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i=0}\left\{-\ln\left[1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)\right]\right\} + \sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\left\{\ln\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)\right] - \ln\left[1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)\right] + y_i\ln\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right] - \ln\left(exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right) - \ln y_i!\right\}$$

$\ln L(\delta,\beta) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i=0}\{-\ln[1+\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j)]\} +$
$\sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\left\{(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j) - \ln[1+\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j)] + y_i(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j) -\right.$
$\left.\left[exp\left(exp(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j)\right) - 1\right] - \ln y_i!\right\}$ (3.22)

3.2.2.1 Penaksiran Parameter Model Logit pada Model Regresi *Hurdle Poisson*

Berdasarkan Persamaan (3.20), fungsi kemungkinan dari model Logit pada model regresi *Hurdle Poisson* dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(\delta_j) = \prod\left(I_{y_i=0}\frac{1}{1+\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j)} I_{y_i>0}\left[\frac{\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j)}{1+\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j)}\right]\right) \quad (3.23)$$

Berdasarkan Persamaan (3.23), ln fungsi kemungkinan dapat ditulis sebagai berikut:

$$lnL(\delta_j) = ln\left\{\prod\left(I_{y_i=0}\frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)} I_{y_i>0}\left[\frac{\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\right)\right\}$$

$$lnL(\delta_j) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i=0}\ln\left(\frac{1}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right) + \sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\ln\left(\left[\frac{\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right]\right)$$

$$lnL(\delta_j) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i=0}\left\{-\ln\left[1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)\right]\right\} + \sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\left\{\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right) - \ln\left[1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)\right]\right\}$$

$$lnL(\delta_j) = \sum_{i=1}^{n}\left[I_{y_i>0}\left\{(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j) - \ln(1+\exp(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j))\right\}\right] \quad (3.24)$$

Dari Persamaan (3.24) dapat diturunkan, nilai turunan pertama δ adalah:

$$lnL(\delta_j) = lnL(\delta_j) = \sum_{i=1}^{n}\left[I_{y_i>0}\left\{\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right) - \ln\left(1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)\right)\right\}\right]$$

$$\frac{\partial lnL(\delta_j)}{\partial \delta_j} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{y_i>0}\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\right) - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right) \qquad (3.25)$$

Metode maksimum kemungkinan, taksiran parameter tidak bisa menghasilkan taksiran secara eksplisit dan tidak menghasilkan taksiran δ yang eksplisit, tetapi menghasilkan persamaan nonlinear yang cukup kompleks, sehingga perlu algoritma khusus untuk mendapatkan nilai taksiran parameter. Salah satu algoritma yang dapat digunakan adalah algoritma *Broyden-Fletcher-Goldfarb-ShannoI*. Menurut Yuan,G dan Lu,X (2011) persamaan umum Quasi-Newton yaitu:

$$\boldsymbol{H}^{(k+1)} + \boldsymbol{s}^{(k)} = \boldsymbol{y}^{(k)}$$

Dengan

$$\boldsymbol{s}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{y}^{(k)} = \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right) - \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

sehingga matriks BFGS pembaruannya adalah

$$\boldsymbol{H}^{(k+1)} = \boldsymbol{H}^{(k)} - \frac{\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}\left(\boldsymbol{s}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{H}^{(k)}}{(\boldsymbol{s}^k)^T\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}} + \frac{\boldsymbol{y}^{(k)}\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right)^T}{(\boldsymbol{s}^k)^T\boldsymbol{y}^{(k)}}$$

Langkah-langkah algoritma BFGS adalah sebagai berikut:

- Algoritma untuk mengestimasi parameter δ,
  a. Tentukan nilai awal dari parameter yang akan ditaksir ($\delta^{(0)}$) , $\varepsilon \,\epsilon (0,1)$ dan $H^{(0)}$, jika $H^{(0)}$ tidak diketahui maka dapat menggunakan $H^{(0)}$= I

$$\delta^{(0)} = \begin{bmatrix}\delta_0\\ \delta_1\\ \vdots\\ \delta_p\end{bmatrix}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{H}^{(0)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix}$$

  b. Hitung $\boldsymbol{c}^{(k)} = \nabla - f(\delta^{(k)})$ dengan k = 0 (menandakan iterasi)
     $\boldsymbol{c}^{(k)}$: nilai turunan negatif dari fungsi kemungkinan maksimum dengan memasukkan nilai parameter $\delta^{(k)}$

$$\boldsymbol{c}^{(k)} = \frac{\partial \ln[L(\delta)]}{\partial \delta}$$

$$\boldsymbol{c}^{(k)} = \frac{\partial lnL(\delta_j)}{\partial \delta_j} = -\sum_{i=1}^{n}\left(I_{y_i>0}\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\right) - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}{1+\exp\left(\sum_{j=1}^{p} z_{ij}\delta_j\right)}\right)$$

c. Hitung norm dari $\boldsymbol{c}^{(k)}$ yaitu $\left\|\boldsymbol{c}^{(k)}\right\|$.

$$\left\|\boldsymbol{c}^{(k)}\right\| = \sqrt{\boldsymbol{c}^{(k)}}$$

d. Setelah diperoleh nilai $\left\|\boldsymbol{c}^{(k)}\right\|$, kemudian akan diuji dengan nilai ε, dimana nilai ε yang kita inisialisasi di langkah nomer 1 yaitu $\varepsilon \, \epsilon (0,1)$. Jika $\left\|\boldsymbol{c}^{(k)}\right\| < \varepsilon$ maka iterasi dihentikan, berarti estimasi sudah didapatkan. Jika $\left\|\boldsymbol{c}^{(k)}\right\| < \varepsilon$ tidak terpenuhi, maka lanjut ke langkah berikutnya.

e. Hitung nilai $\boldsymbol{d}^{(k)}$, dimana $\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)} = -\boldsymbol{c}^{(k)}$
Kemudian mencari nilai $\boldsymbol{d}^{(k)}$, dengan cara menyelesaikan persamaan $\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)} = -\boldsymbol{c}^{(k)}$. Berarti bisa mendapatkan $\boldsymbol{d}^{(k)} = -\boldsymbol{H}^{(-k)}\boldsymbol{c}^{(k)}$ dengan $\boldsymbol{H}^{(-k)}$ adalah invers dari matriks $\boldsymbol{H}^{(k)}$.

f. Hitung nilai $a^{(k)} = a$. Nilai a adalah min dari fungsi $f\left(\boldsymbol{\delta}^{(k)} + a^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}\right)$
Karena $\boldsymbol{\delta}^{(k)}$ dan $\boldsymbol{d}^{(k)}$ sudah bernilai maka nantinya fungsi $f\left(\boldsymbol{\delta}^{(k)} + a^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}\right)$ hanya mempunyai satu variable yaitu a.

g. Hitung $\boldsymbol{\delta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\delta}^{(k)} + a\,\boldsymbol{d}^{(k)}$.

h. Hitung $\boldsymbol{s}^{(k)} = \boldsymbol{\delta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\delta}^{(k)} = a\boldsymbol{d}^{(k)}, \boldsymbol{c}^{(k+1)}, \boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{c}^{(k+1)} - \boldsymbol{c}^{(k)}$ untuk menghitung matriks pembaruan BFGS :

$$\boldsymbol{H}^{(k+1)} = \boldsymbol{H}^{(k)} - \frac{\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}\left(\boldsymbol{s}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{H}^{(k)}}{(\boldsymbol{s}^{k})^T\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}} + \frac{\boldsymbol{y}^{(k)}\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right)^T}{(\boldsymbol{s}^{k})^T\boldsymbol{y}^{(k)}}$$

i. Kembali ke langkah 3 dengan k = k+1.

3.2.2.2 Penaksiran Parameter Model *Truncated Poisson* pada Model Regresi *Hurdle Poisson*

Berdasarkan Persamaan (3.20), fungsi kemungkinan dari model *Truncated Poisson* pada model regresi *Hurdle Poisson* dapat ditulis sebagai berikut:

$$L(\beta_j) = \prod\left(\left[\frac{\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right]y_i!}\right]\right) \quad (3.26)$$

Berdasarkan Persamaan (3.26), ln fungsi kemungkinan dapat ditulis sebagai berikut:

$$lnL(\beta_j) = ln\left\{\prod\left(\left[\frac{\left[exp(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right) - 1\right] y_i!}\right]\right)\right\}$$

$$lnL(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\left[\frac{\left[exp(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j)\right]^{y_i}}{\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right) - 1\right] y_i!}\right]$$

$$lnL(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\, y_i \ln\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right] - \ln\left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right) - 1\right] - \ln y_i!$$

$$lnL(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i>0}\, y_i\left[exp(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j)\right] - \left[exp\left(exp(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j)\right) - 1\right] - \ln y_i! \qquad (3.27)$$

Dari Persamaan (3.27) dapat diturunkan, nilai turunan pertama δ adalah:

$$lnL(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n}\left[I_{y_i>0}\, y_i\left[exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right] - \left[exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right) - 1\right] - \ln y_i!\right]$$

$$\frac{\partial lnL(\beta_j)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[I_{y_i>0}\left[y_i\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)\right] - \left[\frac{\exp\left[\exp(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}) + (\sum_{j=1}^{p} x_{ij})\right]}{\left[\exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right) - 1\right]}\right]\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)\right]$$

$$\frac{\partial lnL(\beta_j)}{\partial\beta_j} = \sum_{i=1}^{n}\left[I_{y_i>0}\left(y_i - \frac{\exp\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{p}x_{ij}\right)+\left(\sum_{j=1}^{p}x_{ij}\right)\right]}{\left[\exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p}x_{ij}\beta_j\right)\right)-1\right]}\right)\left(\sum_{j=1}^{p}x_{ij}\right)\right] \quad (3.28)$$

Dengan melihat hasil di atas dengan menggunakan metode maksimum kemungkinan, taksiran parameter tidak bisa menghasilkan taksiran secara eksplisit dan tidak menghasilkan taksiran β yang eksplisit, tetapi menghasilkan persamaan nonlinear yang cukup kompleks, sehingga perlu algoritma khusus untuk mendapatkan nilai taksiran parameter. Salah satu algoritma yang dapat digunakan adalah algoritma *Broyden-Fletcher-Goldfarb-ShannoI*. Menurut Yuan,G dan Lu,X (2011) persamaan umum Quasi-Newton yaitu:

$$\boldsymbol{H}^{(k+1)} + \boldsymbol{s}^{(k)} = \boldsymbol{y}^{(k)}$$

Dengan

$$\boldsymbol{s}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(k+1)} - \boldsymbol{x}^{(k)}$$

$$\boldsymbol{y}^{(k)} = \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)}\right) - \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

sehingga matriks BFGS pembaruannya adalah

$$\boldsymbol{H}^{(k+1)} = \boldsymbol{H}^{(k)} - \frac{\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}\left(\boldsymbol{s}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{H}^{(k)}}{\left(\boldsymbol{s}^{k}\right)^T\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}} + \frac{\boldsymbol{y}^{(k)}\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right)^T}{\left(\boldsymbol{s}^{k}\right)^T\boldsymbol{y}^{(k)}}$$

Langkah-langkah algoritma BFGS:

- Algoritma untuk mengestimasi parameter β, yaitu sebagai berikut:
  a. Tentukan nilai awal dari parameter yang akan ditaksir ($\boldsymbol{\beta}^{(0)}$) , $\varepsilon \in (0,1)$ dan $\boldsymbol{H}^{(0)}$, jika $\boldsymbol{H}^{(0)}$ tidak diketahui maka dapat menggunakan $\boldsymbol{H}^{(0)}$= I

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_p\end{bmatrix}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{H}^{(0)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

  b. Hitung $\boldsymbol{c}^{(k)} = \nabla - f(\boldsymbol{\beta}^{(k)})$ dengan k = 0 (menandakan iterasi)
     $\boldsymbol{c}^{(k)}$: nilai turunan negatif dari fungsi kemungkinan maksimum dengan memasukkan nilai parameter $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$

$$\boldsymbol{c}^{(k)} = \frac{\partial lnL(\beta_j)}{\partial \beta_j}$$

$$\boldsymbol{c}^{(k)} = -\sum_{i=1}^{n}\left[I_{y_i>0}\left(y_i - \frac{\exp\left[\exp(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}) + (\sum_{j=1}^{p} x_{ij})\right]}{\left[\exp\left(exp\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\beta_j\right)\right) - 1\right]}\right)\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)\right]$$

c. Hitung norm dari $\boldsymbol{c}^{(k)}$ yaitu $\|\boldsymbol{c}^{(k)}\|$.

$$\|\boldsymbol{c}^{(k)}\| = \sqrt{\boldsymbol{c}^{(k)}}$$

d. Setelah diperoleh nilai $\|\boldsymbol{c}^{(k)}\|$, kemudian akan diuji dengan nilai ε, dimana nilai ε yang kita inisialisasi di langkah nomer 1 yaitu $\varepsilon \in (0,1)$. Jika $\|\boldsymbol{c}^{(k)}\| < \varepsilon$ maka iterasi dihentikan, berarti estimasi sudah didapatkan. Jika $\|\boldsymbol{c}^{(k)}\| < \varepsilon$ tidak terpenuhi, maka lanjut ke langkah berikutnya.

e. Hitung nilai $\boldsymbol{d}^{(k)}$, dimana $\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)} = -\boldsymbol{c}^{(k)}$
   Kemudian mencari nilai $\boldsymbol{d}^{(k)}$, dengan cara menyelesaikan persamaan $\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)} = -\boldsymbol{c}^{(k)}$. Berarti bisa mendapatkan $\boldsymbol{d}^{(k)} = -\boldsymbol{H}^{(-k)}\boldsymbol{c}^{(k)}$ dengan $\boldsymbol{H}^{(-k)}$ adalah invers dari matriks $\boldsymbol{H}^{(k)}$.

f. Hitung nilai $a^{(k)} = a$. Nilai a adalah min dari fungsi $f\left(\boldsymbol{\beta}^{(k)} + a^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}\right)$
   Karena $\boldsymbol{\beta}^{(k)}$ dan $\boldsymbol{d}^{(k)}$ sudah bernilai maka nantinya fungsi $f\left(\boldsymbol{\beta}^{(k)} + a^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}\right)$ hanya mempunyai satu variable yaitu a.

g. Hitung $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} + a\, \boldsymbol{d}^{(k)}$.

h. Hitung $\boldsymbol{s}^{(k)} = \boldsymbol{\beta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\beta}^{(k)} = a\boldsymbol{d}^{(k)}, \boldsymbol{c}^{(k+1)}, \boldsymbol{y}^{(k)} = \boldsymbol{c}^{(k+1)} - \boldsymbol{c}^{(k)}$ untuk menghitung matriks pembaruan BFGS :

$$\boldsymbol{H}^{(k+1)} = \boldsymbol{H}^{(k)} - \frac{\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}\left(\boldsymbol{s}^{(k)}\right)^T\boldsymbol{H}^{(k)}}{(\boldsymbol{s}^k)^T\boldsymbol{H}^{(k)}\boldsymbol{s}^{(k)}} + \frac{\boldsymbol{y}^{(k)}\left(\boldsymbol{y}^{(k)}\right)^T}{(\boldsymbol{s}^k)^T\boldsymbol{y}^{(k)}}$$

i. Kembali ke langkah 3 dengan $k = k+1$.

3.2.3 Pengujian Signifikansi Parameter secara Serempak (*overall*) pada Model *Hurdle Poisson*

Setelah taksiran parameter dari model regresi *Hurdle Poisson*, selanjutnya akan dilakukan pengujian parameter secara serempak (*overall*). Pengujian ini dilakukan terhadap parameter secara serempak (*overall*) melalui uji rasio kemungkinan (*Likelihood Ratio Test*).

3.2.3.1 Pengujian Signifikansi Parameter secara Serempak (*overall*) Model Logit pada Model *Hurdle Poisson*

Uji parameter secara serempak (*overall*) model Logit dengan uji *likelihood Ratio Test* sebagai berikut:

1. Perumusan hipotesis
   $H_0 := \delta_2 = \delta_3 = \cdots = \delta_p = 0$ (semua variabel prediktor dalam model logit yang tidak berpengaruh)
   H_1 : Paling sedikit ada satu $\delta_j \neq 0$ dimana $j = 1,2,3, \dots, p$ (paling sedikit ada satu variabel prediktor dalam model logit yang berpengaruh)
2. Statistik uji
   $$G^2 = -2\ln\left[\frac{L(\Omega_0)}{L(\Omega)}\right]$$
   $$= -2(\ln L(\Omega_0) - \ln L(\Omega))$$
   $$= 2(\ln L(\Omega) - \ln L(\Omega_0)) \qquad (3.29)$$
   Dengan
   $L(\Omega_0)$: fungsi likelihood untuk model yang tidak mengandung variabel prediktor
   $L(\Omega)$: fungsi likelihood untuk model yang mengandung semua variabel prediktor
3. Kriteria pengujian
   Dengan mengambil taraf nyata sebesar α, maka H_0 ditolak jika
   $G^2 > \chi^2_{\alpha,p}$
   atau
   p-value < α
4. Kesimpulan
   Interpretasi ditolak atau diterimanya H_0

3.2.3.2 Pengujian Signifikansi Parameter secara Serempak (*overall*) Model *Tuncated Poisson* pada Model *Hurdle Poisson*

Uji parameter secara serempak (*overall*) model *Truncated Poisson* dengan uji *likelihood Ratio Test* sebagai berikut:

1. Perumusan hipotesis
   $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \cdots = 0$ (semua variabel prediktor dalam model *Truncated Poisson* yang tidak berpengaruh)

H_1 : Paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0$ dimana $j = 1,2,3, \dots, p$ (paling sedikit ada satu variabel prediktor dalam model *Truncated Poisson* yang berpengaruh)

2. Statistik uji

$$G^2 = -2\ln\left[\frac{L(\Omega_0)}{L(\Omega)}\right]$$
$$= -2(\ln L(\Omega_0) - \ln L(\Omega))$$
$$= 2(\ln L(\Omega) - \ln L(\Omega_0)) \qquad (3.30)$$

Dengan

$L(\Omega_0)$: fungsi likelihood untuk model yang tidak mengandung variabel prediktor

$L(\Omega)$: fungsi likelihood untuk model yang mengandung semua variabel prediktor

3. Kriteria pengujian

Dengan mengambil taraf nyata sebesar α, maka H_0 ditolak jika

$G^2 > \chi^2_{\alpha,p}$

atau

p-value < α

4. Kesimpulan

Interpretasi ditolak atau diterimanya H_0

3.2.4 Pengujian Signifikansi Masing-masing Parameter secara Parsial pada Model *Hurdle Poisson*

Pengujian signifikansi taksiran parameter secara parsial yang digunakan adalah *Wald Test* (Agresti, 2002). Untuk mengetahui variabel prediktor apa saja yang berpengaruh pada kasus, akan dilakukan uji parameter secara parsial.

3.2.4.1 Pengujian Signifikansi Masing-masing Parameter secara Parsial Model Logit pada Model *Hurdle Poisson*

Uji parameter parsial model Logit dengan uji *Wald Test* sebagai berikut:

1. Perumusan hipotesis

$H_0 : \delta_j = 0$

$H_1 : \delta_j \neq 0$

2. Statistik uji

$$W_j = \left(\frac{\widehat{\delta_j}}{SE(\widehat{\delta_j})}\right)^2 \quad (3.31)$$

Dengan:

$\widehat{\delta_j}$: penaksir dari parameter δ_j pada model Logit

$SE(\widehat{\delta_j})$: kekeliruan baku taksiran dari $\widehat{\delta_j}$ pada model Logit

3. Kriteria pengujian

Dengan mengambil taraf nyata sebesar α, maka H_0 ditolak jika

$W_j > \chi^2_{\alpha,p}$

atau

p-value < α

4. Kesimpulan

Interpretasi ditolak atau diterimanya H_0

3.2.4.2 Pengujian Signifikansi Masing-masing Parameter secara Parsial Model *Truncated Poisson* pada Model *Hurdle Poisson*

Uji parameter parsial model *Truncated Poisson* dengan uji *Wald Test* sebagai berikut:

1. Perumusan hipotesis

$H_0 : \beta_j = 0$

$H_1 : \beta_j \neq 0$

Statistik uji

$$W_j = \left(\frac{\widehat{\beta_j}}{SE(\widehat{\beta_j})}\right)^2 \quad (3.32)$$

Dengan:

$\widehat{\beta_j}$: penaksir dari parameter β_j pada model *Truncated Poisson*

$SE(\widehat{\beta_j})$: kekeliruan baku taksiran dari β_j pada model *Truncated Poisson*

2. Kriteria pengujian

Dengan mengambil taraf nyata sebesar α, maka H_0 ditolak jika

$W_j > \chi^2_{\alpha,p}$

atau

p-value < α

3. Kesimpulan

    Interpretasi ditolak atau diterimanya H_0

3.3 Langkah Analisis

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Melakukan analisis deskriptif data variabel penelitian
2. Membuat model regresi *Poisson*
3. Pendeteksian adanya overdispersi dengan Statistik Uji
4. Membuat model regresi *Hurdle Poisson*
    a. Membuat bentuk model umum regresi *Hurdle Poisson*
    b. Menaksir Parameter Regresi *Hurdle Poisson* dengan metode kemungkinan maksimum
    c. Menguji signifikansi parameter secara serempak (*Overall*) dengan uji rasio kemungkinan (*Likelihood Ratio Test*).
    d. Menguji signifikansi masing-masing parameter secara parsial dengan Statistik Uji Wald
    e. Membuat bentuk model regresi *Hurdle Poisson* yang signifikan
5. Menginterpretasi dan menyimpulkan hasil.