BAB III
METODE PENELITIAN

3.1. Model Regresi Linier *Piecewise*

Dalam menganalisis hubungan antara variabel bebas X dan variabel respon Y, ada kemungkinan terjadi hubungan linear yang berbeda untuk setiap interval X. Pada kasus ini, model regresi linear sederhana tidak memberikan deskripsi yang menyeluruh tentang data dan model nonlinear pun juga demikian. Regresi linear *piecewise* merupakan bentuk regresi yang meliputi berbagai model regresi linier yang cocok dengan data untuk setiap interval X. *Breakpoints* adalah nilai-nilai x di mana kemiringan fungsi linear berubah. Nilai dari *breakpoint* ini mungkin tidak diketahui sebelum analisis dilakukan, tetapi harus ditaksir. Fungsi regresi pada *breakpoint* ini mungkin terputus, tetapi sebuah model harus dicocokkan sedemikian sehingga fungsi kontinu di semua titik termasuk *breakpoint*. (Ryan and Porth, 2007:2)

Analisis regresi linear *piecewise* dengan satu *breakpoint* disebut juga dengan analisis regresi linear *piecewise* dua segmen. Pada metode ini, garis regresi tidak lagi disajikan dalam satu garis linear, melainkan disajikan dalam dua garis linear yang bertemu pada satu titik, yaitu titik $x = c$. Dengan demikian, terdapat dua model regresi berikut :

$$\begin{aligned} y &= a_1+b_1x \qquad x\leq c \\ y &= a_2+b_2x \qquad x\geq c \end{aligned} \tag{3.1}$$

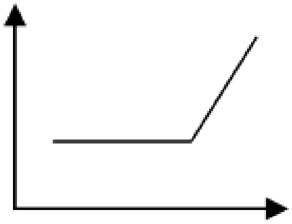
pada saat titik $x= c$,

$$a_1+b_1c= a_2+b_2 \tag{3.2}$$

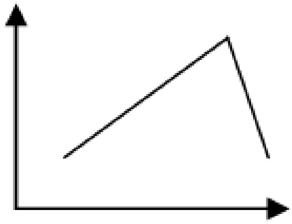
dimana, titik $x = c$ disebut juga *breakpoint* (Seber, 1977 : 205).

3.2 Bentuk Model Regresi Linear Tersegmen

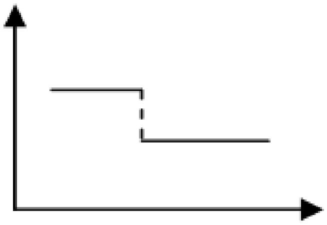
Model regresi linear tersegmen adalah model regresi yang terdiri dari dua submodel yang bersifat linear. Model ini banyak digunakan di berbagai bidang, seperti ekonomi, kedokteran, dan sebagainya, serta digunakan apabila terdapat indikasi perubahan parameter setelah nilai tertentu pada variabel bebas. Dengan demikian, nilai-nilai pada variabel bebas terbagi menjadi dua bagian (segmen). Secara umum, model regresi linear tersegmen dibagi menjadi dua tipe, yaitu model regresi yang kontinu, di mana model regresi linear di segmen pertama bertemu dengan model regresi linear di segmen kedua pada breakpoint, seperti tampak pada gambar 3.1a dan 3.1b dan model regresi yang tidak kontinu , dimana model regresi linear di segmen pertama tidak bertemu dengan model regresi linear di segmen kedua pada *breakpoint*, seperti terlihat pada Gambar 3.1c dan 3.1d (Diniz and Brochi, 2005).



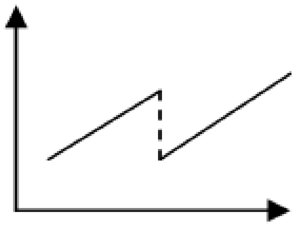
a. Regresi linier tersegmen yang kontinu pada *breakpoint* dengan slope1 = 0 dan slope2 > 0



b. Regresi linier tersegmen yang kontinu pada *breakpoint* dengan slope1 > 0 dan slope2 < 0



c. Regresi linier tersegmen yang tidak kontinu pada *breakpoint* dengan slope = 0



d. Regresi linier tersegmen yang tidak kontinu pada *breakpoint* dengan slope1 dan slope2 >0

Gambar 3.1 Bentuk Fungsi Regresi Linear Tersegmen

Secara khusus, ada 7 tipe model pada analisis reg resi linear tersegmen, yaitu:

1. Tipe 0 – sebuah garis horizontal tanpa breakpoint
2. Tipe 1 – sebuah garis miring tanpa breakpoint (seperti garis regresi linear sederhana)
3. Tipe 2 – garis miring pada segmen pertama dan kedua (seperti Gambar 3.1b)
4. Tipe 3 – garis horizontal pada segmen pertama dan garis miring pada segmen kedua (seperti Gambar 3.1a)

5. Tipe 4 – garis miring pada segmen pertama dan garis horizontal pada segmen kedua
6. Tipe 5 – garis horizontal pada segmen pertama dan kedua dengan level yang berbeda (seperti Gambar 3.1c)
7. Tipe 6 – dua garis miring yang terpisah (seperti Gambar 3.1d).

3.3. Analisis Varian Regresi Linear *Piecewise* Dua Segmen

Analisi varian (ANAVA) regresi linear piecewise dua segmen merupakan pemgembangan dari analisis varian regresi linear sederhana. Pada tahap ini, terdapat penguraian jumlah kuadrat regresi dan jumlah kuadrat sisa. Nilai statistik uji F pada tabel ANAVA dapat digunakan untuk menguji signifikansi *breakpoint* optimum, dengan persamaan hipotesisnya:

H_0 : breakpoint optimum tidak signifikan atau tidak memberikan kontribusi dalam perbaikan model regresi (β=0)

H_1 : breakpoint optimum signifikan atau memberikan kontribusi dalam perbaikan model regresi (β=0)

Tabel 3.1. Tabel Analisis Varian Regresi Linier *Piecewise* Dua Segmen

Sumber Variasi	Derajat kebebasan	Jumlah Kuadrat	Rataan Kuadrat	F Hitung	F tabel
Regresi	3	JKRP= $\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	RKRP=JKRP/3	RKRP/RKSP	F^{α}_{n-2}
Sisa	n-4	JKS= $\sum(y_i - \hat{y})^2$	RKSP = $\frac{JKSP}{n-4}$		
Total	n-1	JKT= $\sum(y_i - \bar{y})^2$			

(Oosterban dalam Syilfi dkk, 2012 : 5)

3.4 Penaksiran Kuadrat Terkecil Jika *Breakpoint* Diketahui

Misalkan terdapat suatu model regresi *piecewise* dua segmen :

$$y_{si} = \alpha_s + \beta_s x_{si} + \varepsilon_{si} \text{ dengan } i = 1,2,\dots,n_s \text{ dan S} = 1,2$$

dengan $x_{[11]} < x_{[12]} < \cdots < x_{[1n_1]} < \gamma < x_{[21]} < x_{[22]} < \cdots < x_{[2n_2]}$ dan γ diketahui, dimana :

$x_{[si]}$ = nilai peubah penjelas yang telah diurutkan dari nilai terkecil ke nilai terbesar

γ = *breakpoint*

n_s = banyaknya pasangan data pada segmen ke– s

S = banyaknya segmen

Jika nilai *breakpoint* diketahui, maka penaksiran parameter model regresi linear tersegmen dilakukan dengan metode kuadrat terkecil terkendala (MKTK) dengan kendala pada Persamaan 3.2, yang diselesaikan dengan metode *Lagrange*. Sehingga, jumlah kuadrat sisa pada model regresi linear tersegmen adalah:

$$JKSK = \sum_{s=1}^{2}\sum_{i=1}^{n_2}(y_{si} - \alpha_s - \beta_s x_{si})^2 + 2\lambda(\alpha_2 - \alpha_1 + \gamma(\beta_2 - \beta_1)) \qquad (3.4)$$

-2λ adalah pengganda *Lagrange*. Setelah diturunkan JKSK terhadap α_s, β_s kemudian disamakan dengan nol, dan diperoleh persamaan:

$$-2\left(\sum_i y_{1i} - n_1\tilde{\alpha}_1 - \sum_i x_{1i}\tilde{\beta}_1\right) - 2\lambda = 0 \qquad (3.5)$$

$$-2\left(\sum_i y_{2i} - n_2\tilde{\alpha}_2 - \sum_i x_{2i}\tilde{\beta}_2\right) + 2\lambda = 0 \qquad (3.6)$$

$$-2\left(\sum_i x_{1i}\left(y_{1i} - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1 x_{1i}\right)\right) - 2\lambda\gamma = 0 \qquad (3.7)$$

$$-2\left(\sum_i x_{2i}\left(y_{2i} - \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2 x_{2i}\right)\right) + 2\lambda\gamma = 0 \qquad (3.8)$$

Dari Persamaan (3.5) diperoleh :

$$-2\left(\sum_i y_{1i} - n_1\tilde{\alpha}_1 - \sum_i x_{1i}\tilde{\beta}_1\right) - 2\lambda = 0$$

$$\sum_i y_{1i} - n_1\tilde{\alpha}_1 - \sum_i x_{1i}\tilde{\beta}_1 + \lambda = 0$$

$$\sum_i y_{1i} - \sum_i x_{1i}\tilde{\beta}_1 + \lambda = n_1\tilde{\alpha}_1$$

$$\frac{ny_1 - nx_1\tilde{\beta}_1 + \lambda}{n_1} = \tilde{\alpha}_1$$

$$\bar{y}_1 - \bar{x}_1\tilde{\beta}_1 + \lambda n_1^{-1} = \tilde{\alpha}_1 \qquad (3.9)$$

Dengan cara yang sama maka dari Persamaan (3.6) diperoleh :

$$-2\left(\sum_i y_{2i} - n_2\tilde{\alpha}_2 - \sum_i x_{2i}\tilde{\beta}_2\right) + 2\lambda = 0$$

$$\sum_i y_{2i} - n_2\tilde{\alpha}_2 - \sum_i x_{2i}\tilde{\beta}_2 - \lambda = 0$$

$$\sum_i y_{2i} - \sum_i x_{2i}\tilde{\beta}_2 - \lambda = n_2\tilde{\alpha}_2$$

$$\frac{ny_2 - nx_2\tilde{\beta}_2 - \lambda}{n_2} = \tilde{\alpha}_2$$

$$\bar{y}_2 - \bar{x}_2\tilde{\beta}_2 - \lambda n_2^{-1} = \tilde{\alpha}_2 \qquad (3.10)$$

$\tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_s$ adalah penaksir parameter $\alpha_s\beta_s$ dari metode kuadrat terkecil terkendala dengan s = 1,2.

Dengan mensubstitusikan Persamaan (3.9) dan (3.10) kedalam Persamaan (3.5) diperoleh:

$$a_1 + b_1c = a_2 + b_2c$$

$$\bar{y}_1 - \tilde{\beta}_1\bar{x}_1 + \lambda n_1^{-1} + \beta_1\gamma = \bar{y}_2 - \tilde{\beta}_2\bar{x}_2 - \lambda n_2^{-1} + \beta_2\gamma$$

$$\lambda n_1^{-1} + \lambda n_2^{-1} = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \tilde{\beta}_1\bar{x}_1 - \tilde{\beta}_1\gamma - \tilde{\beta}_2\bar{x}_2 + \tilde{\beta}_2\gamma$$

$$\lambda(n_1^{-1} + n_2^{-1}) = \bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \tilde{\beta}_1(\bar{x}_1 - \gamma) - \tilde{\beta}_2(\bar{x}_2 - \gamma)$$

$$\lambda(n_1^{-1} + n_2^{-1})(n_1n_2) = (n_1n_2)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \tilde{\beta}_1(\bar{x}_1 - \gamma) - \tilde{\beta}_2(\bar{x}_2 - \gamma))$$

$$\lambda(n_1^{-1}n_1n_2 + n_2^{-1}n_1n_2) = (n_1n_2)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \tilde{\beta}_1(\bar{x}_1 - \gamma) - \tilde{\beta}_2(\bar{x}_2 - \gamma))$$

$$\lambda(n_1 + n_2) = (n_1n_2)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \tilde{\beta}_1(\bar{x}_1 - \gamma) - \tilde{\beta}_2(\bar{x}_2 - \gamma))$$

$$\lambda = \frac{(n_1n_2)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \tilde{\beta}_1(\bar{x}_1 - \gamma) - \tilde{\beta}_2(\bar{x}_2 - \gamma))}{(n_1 + n_2)}$$

$$\lambda = w\{\bar{y}_2 - \bar{y}_1 + \tilde{\beta}_1(\bar{x}_1 - \gamma) - \tilde{\beta}_2(\bar{x}_2 - \gamma)\} \qquad (3.11)$$

dengan $w = n_1 n_2/(n_1+n_2)$

Selanjutnya substitusi Persamaan (3.9), (3.10) dan (3.11) kedalam Persamaan (3.7) dan (3.8) untuk menghitung nilai $\tilde{\beta}_s$:

$$-2\left(\sum_i x_{1i}\left(y_{1i}-\tilde{\alpha}_1-\tilde{\beta}_1 x_{1i}\right)\right)-2\lambda\gamma=0$$

$$-\left(\sum_i x_{1i}\left(y_{1i}-\tilde{\alpha}_1-\tilde{\beta}_1 x_{1i}\right)\right)-\lambda\gamma=0$$

$$-\left(\sum_i x_{1i}\left(y_{1i}-\bar{y}_1+\bar{x}_1\tilde{\beta}_1-\lambda n_1^{-1}-\tilde{\beta}_1 x_{1i}\right)\right)-\lambda\gamma=0$$

$$\left(\sum_i x_{1i}\left(-(y_{1i}-\bar{y}_1)+\tilde{\beta}_1 x_{1i}-\bar{x}_1\tilde{\beta}_1+\lambda n_1^{-1}\right)\right)-\lambda\gamma=0$$

$$\left(\sum_i x_{1i}\left(-(y_{1i}-\bar{y}_1)+(x_{1i}-\bar{x}_1)\tilde{\beta}_1+\lambda n_1^{-1}\right)\right)-\lambda\gamma=0$$

$$\left(-\sum_i x_{1i}(y_{1i}-\bar{y}_1)+\sum_i x_{1i}(x_{1i}-\bar{x}_1)\tilde{\beta}_1+\sum_i x_{1i}\lambda n_1^{-1}\right)-\lambda\gamma=0$$

$$\left(-\sum_i x_{1i}(y_{1i}-\bar{y}_1)+\sum_i x_{1i}(x_{1i}-\bar{x}_1)\tilde{\beta}_1+n_1\bar{x}_1\lambda n_1^{-1}\right)-\lambda\gamma=0$$

$$-\sum_i x_{1i}(y_{1i}-\bar{y}_1)+\sum_i x_{1i}(x_{1i}-\bar{x}_1)\tilde{\beta}_1+\bar{x}_1\lambda-\lambda\gamma=0$$

$$-\sum_i x_{1i}(y_{1i}-\bar{y}_1)+\sum_i x_{1i}(x_{1i}-\bar{x}_1)\tilde{\beta}_1+\lambda(\bar{x}_1-\gamma)=0$$

$$-\sum_i x_{1i}(y_{1i}-\bar{y}_1)+\sum_i x_{1i}(x_{1i}-\bar{x}_1)\tilde{\beta}_1+w\left\{(\bar{y}_2-\bar{y}_1)+(\bar{x}_1-\gamma)\tilde{\beta}_1-(\bar{x}_2-\gamma)\tilde{\beta}_2\right\}$$
$$(\bar{x}_1-\gamma)=0$$

$$-\sum_i x_{1i}(y_{1i}-\bar{y}_1)+\sum_i x_{1i}(x_{1i}-\bar{x}_1)\tilde{\beta}_1+w(\bar{y}_2-\bar{y}_1)(\bar{x}_1-\gamma)+w(\bar{x}_1-\gamma)^2\tilde{\beta}_1$$
$$-w(\bar{x}_1-\gamma)(\bar{x}_2-\gamma)\tilde{\beta}_2=0$$

$$\left[\sum_i x_{1i}(x_{1i}-\bar{x}_1)+w(\bar{x}_1-\gamma)^2\right]\tilde{\beta}_1-w(\bar{x}_1-\gamma)(\bar{x}_2-\gamma)\tilde{\beta}_2=\sum_i x_{1i}(y_{1i}-\bar{y}_1)$$
$$-w(\bar{y}_2-\bar{y}_1)(\bar{x}_1-\gamma)$$

dan

$$-2\left(\sum_i x_{2i}\left(y_{2i}-\tilde{\alpha}_2-\tilde{\beta}_2 x_{2i}\right)\right)+2\lambda\gamma=0$$

$$-\left(\sum_i x_{2i}\left(y_{2i}-\tilde{\alpha}_2-\tilde{\beta}_2 x_{2i}\right)\right)+\lambda\gamma=0$$

$$-\left(\sum_i x_{2i}\left(y_{2i}-\bar{y}_2+\bar{x}_2\tilde{\beta}_2+\lambda n_2^{-1}-\tilde{\beta}_2 x_{2i}\right)\right)+\lambda\gamma=0$$

$$\left(\sum_i x_{2i}\left(-(y_{2i}-\bar{y}_2)+\tilde{\beta}_2 x_{2i}-\bar{x}_2\tilde{\beta}_2-\lambda n_2^{-1}\right)\right)+\lambda\gamma=0$$

$$\left(\sum_i x_{2i}\left(-(y_{2i}-\bar{y}_2)+(x_{2i}-\bar{x}_2)\tilde{\beta}_2-\lambda n_2^{-1}\right)\right)+\lambda\gamma=0$$

$$\left(-\sum_i x_{2i}(y_{2i}-\bar{y}_2)+\sum_i x_{2i}(x_{2i}-\bar{x}_2)\tilde{\beta}_2-\sum_i x_{2i}\lambda n_2^{-1}\right)+\lambda\gamma=0$$

$$\left(-\sum_i x_{2i}(y_{2i}-\bar{y}_2)+\sum_i x_{2i}(x_{2i}-\bar{x}_2)\tilde{\beta}_2-n_2\bar{x}_2\lambda n_2^{-1}\right)+\lambda\gamma=0$$

$$-\sum_i x_{2i}(y_{2i}-\bar{y}_2)+\sum_i x_{2i}(x_{2i}-\bar{x}_2)\tilde{\beta}_2-\bar{x}_2\lambda+\lambda\gamma=0$$

$$-\sum_i x_{2i}(y_{2i}-\bar{y}_2)+\sum_i x_{2i}(x_{2i}-\bar{x}_2)\tilde{\beta}_2-\lambda(\bar{x}_2-\gamma)=0$$

$$-\sum_i x_{2i}(y_{2i}-\bar{y}_2)+\sum_i x_{2i}(x_{2i}-\bar{x}_2)\tilde{\beta}_2-w\left\{(\bar{y}_2-\bar{y}_1)+\left(\bar{x}_1-\gamma\right)\tilde{\beta}_1-\left(\bar{x}_2-\gamma\right)\tilde{\beta}_2\right\}$$
$$(\bar{x}_2-\gamma)=0$$

$$-\sum_i x_{2i}(y_{2i}-\bar{y}_2)+\sum_i x_{2i}(x_{2i}-\bar{x}_2)\tilde{\beta}_2-w(\bar{y}_2-\bar{y}_1)(\bar{x}_2+\gamma)-w(\bar{x}_1-\gamma)\left(\bar{x}_2-\gamma\right)\tilde{\beta}_1$$
$$+w\left(\bar{x}_2-\gamma\right)^2\tilde{\beta}_2=0$$

$$-w(\bar{x}_1-\gamma)\left(\bar{x}_2-\gamma\right)\tilde{\beta}_1+\left[\sum_i x_{2i}(x_{2i}-\bar{x}_2)+w\left(\bar{x}_2-\gamma\right)^2\right]\tilde{\beta}_2=\sum_i x_{2i}(y_{2i}-\bar{y}_2)$$
$$+w(\bar{y}_2-\bar{y}_1)(\bar{x}_1-\gamma)$$

atau dapat ditulis

$$c_{11}\tilde{\beta}_1+c_{12}\tilde{\beta}_2=c_{13} \tag{3.12}$$

$$c_{21}\tilde{\beta}_1+c_{22}\tilde{\beta}_2=c_{23} \tag{3.13}$$

dimana :

$$c_{ss} = \sum_i x_{si}\left(x_{si} - \bar{x}_s\right) \; + w\left(\bar{x}_s - \gamma\right)^2$$

$$c_{12} = c_{21} = -w\left(\bar{x}_1 - \gamma\right)\left(\bar{x}_2 - \gamma\right)$$

$$c_{s3} = \sum_i x_{si}\left(y_{si} - \bar{y}_s\right) + (-1)^s w\left(\bar{y}_2 - \bar{y}_1\right)\left(\bar{x}_s - \gamma\right)$$

Setelah $\tilde{\beta}_1$ dan $\tilde{\beta}_2$ diketahui, diperoleh nilai persamaan dan $\tilde{\alpha}_s$ pada persamaan. Berkaitan dengan sisa ε, maka :

$$\varepsilon'\varepsilon = \sum_{s=1}^{2}\sum_{i=1}^{ns}\left(y_{si} - \tilde{\alpha}_s - \tilde{\beta}_s x_{si}\right)^2$$

$$= \sum\sum\left\{y_{si} - \bar{y}_s - \tilde{\beta}_s\left(x_{si} - \bar{x}_s\right) + (-1)^s \lambda n_s^{-1}\right\}^2$$

$$= \sum\sum\left(y_{si} - \bar{y}_s\right)^2 - 2\sum\sum\tilde{\beta}_s\left(y_{si} - \bar{y}_s\right)\left(x_{si} - \bar{x}_s\right) + \sum\sum\tilde{\beta}_s^2\left(x_{si} - \bar{x}_s\right)^2 + \frac{\lambda^2}{w} \quad (3.14)$$

yang selanjutnya disebut JKSK. (Seber, 1977 : 206)

3.5. Penaksiran Kuadrat Terkecil Jika *Breakpoint* Tidak Diketahui

Apabila nilai *breakpoint* tidak diketahui, maka harus ditaksir terlebih dahulu. Langkah pertama adalah membagi titik-titik data menjadi dua segmen, hanya untuk menentukan n_1 dan n_2 tanpa mengetahui nilai γ sesungguhnya. Dari setiap bagian dengan n_s pasangan data, dibentuk model regresi linear sederhana untuk memperoleh nilai $\hat{\alpha}_s$ dan $\hat{\beta}_s$. Sehingga berdasarkan Persamaan 2.7 dan asumsi bahwa $x_{1n_1} < \gamma < x_{21}$ nilai taksiran untuk γ adalah :

$$\hat{\gamma} = -\left(\frac{\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2}{\hat{\beta}}\right) \quad (3.15)$$

Penaksiran terhadap breakpoint dilakukan tidak hanya pada satu titik, melainkan pada beberapa titik dengan tujuan mendapatkan breakpoint optimum. Breakpoint optimum ditentukan dengan memilih breakpoint yang memberikan jumalah kuadrat sisa paling kecil dan R^2 paling besar diantara penaksir breakpoint yang lain. Besaran, R^2 untuk model regresi linear tersegmen didefinisikan :

$$R^2 = 1 - \frac{JKSK}{JKT} \quad (3.16)$$

Selang kepercayaan untuk model regresi linear tersegmen juga mempunyai prinsip yang sama seperti selang kepercayaan pada analisis regresi linear sederhana, *n* (ukuran contoh) yang digunakan bukan *n* pada setiap segmen, melainkan *n* secara keseluruhan (Oosterbaan dalam Shofiyati, 2008 : 11).