BAB III

GAME THEORY

3.1 Pengantar *Game Theory*

Dalam kehidupan sehari-hari sering dijumpai kegiatan-kegiatan yang bersifat kompetitif yang diwarnai persaingan atau konflik. Persaingan atau konflik ini dapat terjadi antara dua orang (dua pihak) atau sejumlah orang (grup). Beberapa contoh kegiatan itu antara lain :

1. Persaingan bisnis tertentu seperti bisnis jual beli telepon seluler, laptop,dll.
2. Permainan catur.
3. Dua buah partai politik yang bersaing dalam kampanye untuk memperoleh suara terbanyak.
4. Para jenderal tentara yang ditugaskan dalam perencanaan dan pelaksaan strategi dan teknik militer dalam peperangan,dll.

Tidak setiap keadaan persingan dapat disebut sebagai permainan (*game*). Situasi kompetitif yang mempunyai ciri-ciri sebagai berikut dapat disebut sebagai permainan (*games)* :

1. Jumlah pemain terbatas.
2. Untuk setiap pemain, ada sejumlah kemungkinan tindakan yang terbatas.
3. Ada pertentangan kemungkinan *(conflict of interest)* antara pemain.
4. Aturan permainan untuk mengatur di dalam memilih tindakan diketahui oleh setiap pemain.

5. Hasil seluruh kombinasi tindakan yang mungkin dilakukan berupa bilangan yang positif, negatif atau nol.

Jadi, permainan (*game*) adalah suatu bentuk persaingan antara antara dua orang atau pihak atau antara dua kelompok atau grup yang saling berhadapan dan menggunakan aturan-aturan yang diketahui oleh kedua belah pihak yang saling berhadapan. Sedangkan teori permainan (*game theory*) adalah suatu pendekatan matematis untuk merumuskan situasi persaingan dan konflik antara berbagai kepentingan. Teori ini dikembangkan untuk menganalisa proses pengambilan keputusan dari situasi-situasi persaingan yang berbeda-beda dan melibatkan dua atau lebih kepentingan. Dalam permainan, pihak pertama disebut dengan pemain baris sedangkan pihak kedua disebut pemain kolom. Anggapannya adalah bahwa setiap pemain (individual atau kelompok) mempunyai kemampuan untuk mengambil keputusan secara bebas dan rasional. Setiap pemain dianggap mempunyai suatu seri rencana atau suatu set strategi untuk dipilih. Strategi menunjukkan untuk setiap situasi yang timbul dalam proses permainan dipergunakan untuk memutuskan tindakan apa yang harus diambil.

Aturan-aturan dalam permainan meliputi :

1. Langkah atau strategi yang dapat dipilih oleh tiap-tiap pemain.
2. Informasi yang digunakan oleh setiap pemain yang memilih langkah atau strategi.
3. Pembayaran, yang didefinisikans secara numerik, yang harus dipenuhi oleh setiap pemain setelah permainan selesai.

Model teori permainan dapat diklasifikasikan dengan sejumlah cara seperti jumlah pemain, jumlah keuntungan dan kerugian serta jumlah stategi yang digunakan dalam permainan. Contohnya : bila jumlah pemain adalah dua, permainan disebut sebagai permainan dua-pemain. Jika jumlah keuntungan dan kerugian adalah nol disebut sebagai permainan dengan jumlah nol. Sebaliknya bila tidak sama dengan nol, permainan disebut dengan permainan bukan jumlah nol (*non zero sum game*). Kemudian pada permainan dua pemain dapat dibagi lagi menjadi dua, yaitu permainan berjumlah nol dua pemain (*two person zero sum game*) dan permainan berjumlah tak nol dua pemain (*two person non zero sum game*). Permainan berjumlah nol dua pemain merupakan persaingan dari dua pemain dimana kemenangan yang satu merupakan kekalahan pemain lainnya, sehingga jumlah kemenangan dan kekalahan adalah nol. Sedangkan pada permainan berjumlah tak nol dua pemain, kemenangan satu pemain belum tentu merupakan kekalahan pemain lainnya.

3.2 Matriks *Pay off* Suatu Permainan

Nilai pembayaran dalam suatu permainan disebut *pay off*. Matriks *pay off* merupakan matriks yang elemen-elemennya merupakan matriks jumlah nilai yang harus dibayarkan dari pihak pemain yang kalah kepada yang menang pada akhir suatu permainan. Pengertian *pay off* tidak selalu berarti pembayaran uang, akan tetapi bisa juga kenaikan / penurunan *market share.*

Contoh 3.1

Tabel 3.1 Matriks *pay off* persaingan bisnis
antara perusahaan A dan perusahaan B.

		PERUSAHAAN B	
		Perbaikan Mutu	Perluasan Distribusi
PERUSAHAAN A	Potong Harga	1,2	0,1
	Iklan Gencar	2,1	1,0

Jika perusahaan A memilih memotong harga sedangkan perusahaan B memilih perbaikan mutu maka A mendapatkan 1 dan B mendapatkan 2.

Jika perusahaan A memilih iklan sedangkan perusahaan B memilih perbaikan mutu maka A mendapatkan 2 dan B mendapatkan 1.

Jika perusahaan A memilih memotong harga sedangkan perusahaan B memilih perluasan distribusi maka A mendapatkan 0 dan B mendapatkan 1.

Jika perusahaan A memilih iklan sedangkan perusahaan B memilih perluasan distribusi maka A mendapatkan 1 dan B mendapatkan 0.

Contoh 3.2

Perusahaan C dan Perusahaan D sedang memperebutkan pangsa pasar. Besarnya pangsa pasar dapat bertambah atau berkurang, tetapi prosentase jumlah pangsa akan selalu tetap yaitu 100% . ini berarti tambahan pangsa pasar bagi suatu perusahaan merupakan bagian yang hilang dari perusahaan lain.

Tabel 3.2 Matriks *pay off market share* perusahaan C dan D.

		PERUSAHAAN B		
		Perbaikan Mutu	Perluasan Distribusi	Iklan Gencar
PERUSAHAAN B	Potong Harga	8%, -8%	4%, -4%	7.5%, -7.5%
	Iklan Gencar	7%, -7%	3.5% , -3.5%	3%, -3%

Jika Perusahaan A memilih memotong harga dan Perusahaan B memilih mutu, maka pangsa pasar Perusahaan A bertambah 8% dan pangsa pasar Perusahaan B berkurang 8%. Jadi jumlah *pay off*nya 0% (yaitu 8% + (-8%)

3.3 Metode Maksimin dan Minimaks

Prinsip maksimin untuk keuntungan dan prinsip minimaks untuk kerugian. Menurut prinsip maksimin, pemain A adalah pesimistik, sehingga akan memilih strategi yang memaksimumkan keuntungan dari kemungkinan pay 0ff yang minimum. Pada waktu yang sama, B berusaha meminimumkan kerugian dari kerugian yang diperkirakan maksimum.

Dalam menentukan metode yang digunakan untuk menyelesaikan sebuah permainan, pertama dilihat apakah permainan tersebut mempunyai titik sadel (titik keseimbangan). Titik sadel adalah nilai dimana kemenangan yang diperoleh oleh pemain A dapat diterima oleh pemain B atau sebaliknya. Metode minimaks dan maksimin digunakan untuk mencari titik sadel.

Contoh 3.3

Tabel 3.3 *Pay off* strategi A dan B

		STRATEGI B		Minimum baris	
		B1	B2		
STRATEGI A	A1	7	1	1	
	A2	8	10	8	Maksimin
	A3	3	11	3	
Maksimum kolom		8	11		
		Minimaks			

Jika pemain A memainkan strategi pertama maka A akan memperoleh 7 atau 1 tergantung pada strategi yang dipilih oleh B. Tetapi dapat dipastikan A akan memperoleh setidaknya min{7, 1} = 1 tanpa bergantung pada strategi yang dipilih B. Demikian pula jika A memilih strategi kedua maka A akan memperoleh setidaknya min{8, 10} = 8, dan jika A memilih strategi ketiga maka A akan memperoleh setidaknya min{3, 11} = 3. Jadi nilai minimum di setiap baris mewakili keuntungan minimum yang didapat A jika memainkan strategi murni. Nilai-nilai tersebut ditunjukkan dalam Contoh 3.3 pada "minimum baris". Dengan memilih strategi yang kedua, pemain A memaksimumkan keuntungan minimumnya, dan keuntungan ini diketahui max{1, 8, 3} = 8. Pemilihan pemain A disebut strategi maksimin dari permainan.

Sebaliknya pemain B ingin meminimumkan kerugian, jika B memilih strategi pertama, B akan mengalami kerugian tidak lebih dari max{7, 8, 3} = 8 tanpa bergantung pada strategi yang dipilih A. Dan jika memainkan strategi kedua, B akan mengalami kerugian tidak lebih dari max{1, 10, 11} = 11. Hasil yang bersesuaian ditunjukkan dalam Contoh 3.3 pada "maksimum kolom". Jadi pemain B akan memilih strategi yang meminimumkan kerugian maksimumnya, yaitu diketahui min{8, 11} = 8. Pemilihan pemain B disebut strategi minimaks dan kerugiannya disebut nilai minimaks. Dalam Contoh 3.3 titik sadel terdapat pada baris kedua kolom pertama yaitu elemen a_{21} = 8. Hal ini dapat terjadi karena pemain A akan mendapat keuntungan yang paling besar jika memilih strategi 2, maka pemain B akan meminimumkan kerugian maksiminnya dengan memilih strategi pertama.

Secara umum jika pemain A mempunyai *m* strategi dan pemain B mempunyai *n* strategi. Elemen a_{ij} merupakan besarnya *pay off* yang diterima oleh A (Taha, 1996). Jika pemain A memilih strategi *i* maka paling sedikit A akan memenangkan

$$\min_j \{a_{ij}\}$$

pemain A akan memilih strategi yang akan memberikan nilai maksimum yaitu:

$$\max_i \; i \min_j \{a_{ij}\}$$

pemain B berusaha mencegah A untuk mencapai kemenangan. Maka dari itu jika pemain B memilih strategi *j* dia yakin bahwa pemain A akan mendapat keuntungan tidak lebih dari:

$$\max_i \{a_{ij}\}$$

pemain B akan memilih strategi yang meminimumkan kerugian yaitu:

$$\min_j \; i \max_i \{a_{ij}\}$$

Jika diperoleh suatu elemen a_{kl} dimana:

$$a_{kl} = \max_i i \min_j \{a_{ij}\} = \min_j i \max_i \{a_{ij}\}$$

maka elemen a_{kl} dikatakan sebagai titik sadel. Dalam suatu permainan dimana nilai maksimin sama dengan nilai minimaks, strategi murni yang bersangkutan disebut strategi optimum dan permainan tersebut dikatakan mempunyai titik sadel. Nilai permainan pada strategi murni yang optimum sama dengan nilai maksimin dan nilai minimaks tersebut.

3.4 Peranan Dominasi

Konsep dominasi berguna untuk matriks *pay off* ukuran besar. Aturan dominasi digunakan untuk mengurangi ukuran matriks sebelum analisis untuk menentukan solusi optimum dilakukan.

Contoh 3.4

Tabel 3.4 Matriks *pay off* pemain A dan B

		Pemain B			
		w	x	y	z
Pemain A	1	4	8	3,5	6
	2	6,5	9	5,5	7
	3	5,5	4	4,5	7,5
	4	4,5	2,5	5	5

Tabel 3.5 Matriks *pay off* setelah direduksi

		Pemain B			
		w	x	y	z
Pemain A	2	6,5	9	5,5	7
	3	5,5	4	4,5	7,5

Masing-masing pemain yang berebut pangsa pasar memiliki empat strategi. Bagi pemain A, strategi 1 dan 4 didominasi oleh strategi 2, karena itu dapat dihilangkan dari matriks *pay off*. Kemudian, dalam matriks yang tersisa terlihat bahwa untuk pemain B, strategi w dan z didominasi oleh y. Sehingga kolom-kolom itu dapat dihapus seperti berikut :

Tabel 3.6 Matriks penyelesaian permainan

		Pemain B	
		x	y
Pemain A	2	9	5,5

3.5 Permainan Berjumlah Nol Dua Pemain

Permainan berjumlah nol dua pemain merupakan persaingan dari dua pemain dimana kemenangan yang satu merupakan kekalahan pemain lainnya, sehingga jumlah kemenangan dan kekalahan adalah nol (Trueman, 1974).

Ada dua tipe permainan berjumlah nol dua pemain, yaitu :

1. Permainan strategi murni (*pure strategy games*), yaitu setiap pemain mempergunakan strategi tunggal.
2. Permainan strategi campuran (*mixed strategy games*), yaitu kedua pemain memakai campuran dari beberapa strategi yang berbeda-beda.

3.5.1 Permainan Strategi Murni (*Pure Strategy Games*).

Dalam permainan strategi murni, pemain baris meng-identifikasikan strategi optimalnya melalui aplikasi metode maksimin, sedangkan pemain kolom menggunakan metode minimaks untuk meng-identifikasikan strategi optimalnya. Nilai yang dicapai harus merupakan maksimum dari minimaks baris dan minimum dari dari maksimin kolom, Dalam hal ini diperoleh suatu titik keseimbangan (*equibrilium)* dan titik ini disebut titik sadel (*saddle point*).

Bila nilai maksimin tidak sama dengan nilai minimaks, titik sadel tidak dapat dicapai, sehingga permainan tidak dapat diselesaikan dengan mempergunakan strategi murni, tetapi dengan strategi campuran.

Contoh 3.5

Dua perusahaan sedang dalam proses penentuan strategi periklanannya. Anggaplah bahwa perusahaan A mempunyai dua strategi dan perusahaan B mempunyai tiga strategi. Strategi tersebut dan *pay off* (misalnya kenaikan *market share*) disusun dalam bentuk permainan dua pemain dengan jumlah nol sebagai berikut :

Tabel 3.7 Matriks *pay-off* perusahaan A dan Perusahaan B
Dalam permainan strategi murni

<table>
<tr><td rowspan="2">PERUSAHAAN A</td><td colspan="3">PERUSAHAAN B</td><td>Minimum Baris</td><td>Maksimin</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>B2</td><td>B3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A1</td><td>1</td><td>9</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>A2</td><td>8</td><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Maksimum Kolom</td><td>8</td><td>9</td><td>4</td><td colspan="2" rowspan="2">Titik Sadel = 4</td></tr>
<tr><td>Minimaks</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
</table>

Perusahaan A :

Saat A memilih strategi A1, maka perusahaan B akan memilih strategi B1, sehingga *pay off* perusahaan A adalah 1. Saat A memilih strategi A2, maka perusahaan B akan memilih strategi B3, sehingga *pay off* perusahaan A adalah 4. Perusahaan A paling optimal jika memilih strategi tunggal A2.

Perusahaan B :

Saat Perusahaan B memilih strategi B1, maka perusahaan A akan memilih strategi A2, sehingga kerugian yang diderita perusahaan B adalah 8. Saat B memilih strategi B2, maka perusahaan A akan memilih strategi A1, sehingga kerugian perusahaan B adalah 9. Saat perusahaan B memilih strategi B3, maka perusahaan A akan memilih strategi A2. Perusahaan B paling optimal jika memilih strategi tunggal B3.

Dengan metode maksimin dan minimaks diperoleh titik keseimbangan (*equilibrium)* yaitu nilai maksimin = nilai maksimaks = titik sadel = 4.

3.5.2 Permainan Strategi Campuran (*Mixed Strategy Games*).

Dalam permainan yang menggunakan strategi campuran (*mixed strategy)*, setiap pemain tidak mengetahui strategi apa yang akan digunakan oleh pemain lain, setiap pemain akan berusaha merumuskan suatu strategi yang nilai *pay off*-nya tidak berpengaruh terhadap strategi yang dipilih pemain lawan.

Langkah pertama terapkan metode maksimin dan minimaks. Permainan strategi campuran terjadi apabila nilai maksimin tidak sama dengan nilai minimaks, maka games ini tidak memiliki titik sadel atau strategi murni bukan merupakan strategi optimal, sebagai gantinya keseimbangan dapat dicapai jika menggunakan *mixed strategy.* Langkah berikutnya, terapkan strategi dominan, dengan harapan ukuran matriks *pay off* dapat diperkecil.

Contoh 3.6

Tabel 3.8 Matriks *pay-off* perusahaan A dan Perusahaan B

dalam permainan strategi campuran

		PERUSAHAAN B			Minimum Baris	Maksimin
		B1	B2	B3		
PERUSAHAAN A	A1	2	5	7	2	2
	A2	-1	2	4	-1	
	A3	6	1	9	1	
	Maksimum Kolom	6	5	9	Minimaks ≠Maksimin	
	Minimaks		5			

Dari tabel diatas, diketahui bahwa nilai maksimin tidak sama dengan nilai minimaks. Oleh karena itu, tidak dapat diketemukan titik pelana. Kemudian dengan menerapkan aturan dominan, strategi B3 didominasi oleh B2, sehingga kolom B3 dapat dihilangkan. Kemudian strategi A2 juga didominasi oleh strategi A1 sehingga baris A2 dapat dihilangkan. Matriks permainan telah berubah menjadi permainan 2×2, seperti tabel 3.9 di bawah ini.

Tabel 3.9 Matriks permainan yang direduksi

		PERUSAHAAN B		Minimum Baris	Maksimin
		B1	B2		
PERUSAHAAN	A1	2	5	2	2

A	A3	6	1	1	
	Maksimum Kolom	6	5	Minimaks ≠ Maksimin	
	Minimaks		5		

Pada tabel 3.9 diatas tidak ada titik pelana maka permainan dapat dipecahkan dengan menerapkan konsep strategi campuran. Penyelesaian permainan dapat dilakukan dengan :

1. **Metoda grafik.** Semua permainan $2 \times n$ (yaitu, pemain baris mempunyai dua strategi dan pemain kolom mempunyai n strategi) dan permainan $m \times 2$ (yaitu pemain baris mempunyai m strategi dan pemain kolom mempunyai 2 strategi) dapat diselesaikan secara grafik.
2. **Metoda analisa.** Pendekatan ini bertujuan mengembangkan pola strategi-campuran agar keuntungan atau kerugian yang dialami kedua perusahaan adalah sama. Pola ini dikembangkan dengan menentukan suatu distribusi probabilitas untuk strategi-strategi yang berbeda. Nilai-nilai probabilitas ini memungkinkan untuk ditemukannya strategi campuran yang optimum. Nilai-nilai probabilitas dapat dihitung dengan cara berikut ini.

   Misalkan matriks *pay off* pemain A dan pemain B adalah sebagai berikut.

Tabel 3.10 Matriks *pay off* permainan

		STRATEGI PEMAIN B	
		B1	B2
STRATEGI PEMAIN A	A1	a	b
	A2	c	d

maka *expected pay off* bagi Pemain A adalah:

- $ap_1 + c(1 - p_1)$ jika Pemain B menjalankan strategi 1
- $bp_1 + d(1 - p_1)$ jika Pemain B menjalankan strategi 2

Selanjutnya, dengan menyamakan kedua *expected pay off* tersebut, diperoleh:

$$ap_1 + c(1 - p_1) = bp_1 + d(1 - p_1)$$

$$p_1(a - b - c + d) = d - c$$

$$p1 = \frac{d - c}{a - b - c + d}$$

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{a - b}{a - b - c + d}$$

Dengan cara serupa, *expected pay off* bagi Pemain B dapat pula dihitung:

$$aq_1 + b(1 - q_1) = cq_1 + c(1 - q_1)$$

$$q_1(a - b - c + d) = d - b$$

$$q_1 = \frac{d - b}{a - b - c + d}$$

$$q_2 = 1 - q_1 = \frac{a - c}{a - b - c + d}$$

Nilai permainan

M =

a	b
c	d

(bagi Pemain X) adalah :

$$v = ap_1 + c(1 - p_1) = bp_1 + d(1 - p_1)$$

$$= -[aq_1 + b(1 - q_1)] = -[cq_1 + d(1 - q_1)]$$

$$= \frac{ad - bc}{a - b - c + d}$$

Contoh 3.7

Matriks permainan pada tabel 3.8 dapat diselesaikan menggunakan metode analisis sebagai berikut.

<u>Untuk perusahaan A :</u>

Anggap bahwa digunakan strategi A1 dengan Probabilitas p, dan untuk A3 dengan probabilitas 1-p. Anggap bahwa B menggunakan strategi B1, maka keuntungan yang diharapkan A adalah:

Bila, apapun strategi yang digunakan A, perusahaan B meresponnya dengan strategi S1, maka :

2p + 6(1-p) = 2p + 6 – 6p = 6 – 4p

Bila, apapun strategi yang digunakan A, perusahaan B meresponnya dengan strategi S2, maka :

5p + 1(1-p) = 5p + 1 – 1p = 1 + 4p

Bila kedua hasil persamaan tersebut digabung, maka :

6 – 4p = 1 + 4p

5 = 8p

P = 5/8

= 0,625

Dan apabila nilai p = 0,625, maka nilai (1-p) adalah (1 – 0,625) = 0,375, sehingga kedua nilai probabilitas untuk strategi S1 dan S3 milik perusahaan A sudah diketahui nilainya. Apabila kedua nilai probabilitas tersebut dimasukkan dalam kedua persamaan di atas, maka keuntungan yang diharapkan oleh perusahaan A adalah :

Dengan persamaan ke-1	Dengan persamaan ke-2
= 2p + 6(1-p)	= 5p + 1(1-p)
= 2 (0,625) + 6 (0,375)	= 5 (0,625) + 1 (0,375)
= 3,5	= 3,5

Perhatikan, bahwa keduanya menghasilkan keuntungan yang diharapkan adalah sama, yakni sebesar 3,5. Sebelum menggunakan strategi campuran ini keuntungan perusahaan A hanya sebesar 2, berarti dengan digunakan strategi campuran ini, keuntungan perusahaan A bisa meningkat 1,5 menjadi 3,5.

Untuk perusahaan B :

Dengan cara serupa, dapat dihitung *pay off* yang diharapkan untuk perusahaan B. probabilitas untuk strategi B1 adalah q dan B2 adalah 1-q.

Bila, apapun strategi yang digunakan B, perusahaan A meresponnya dengan strategi S1, maka :

2q + 5(1-q) = 2q + 5 – 5q = 5 – 3p

Bila, apapun strategi yang digunakan B, perusahaan A meresponnya dengan strategi S3, maka :

6q + 1(1-q) = 6q + 1 – 1q = 1 + 5p

Bila kedua hasil persamaan tersebut digabung, maka :

5 – 3q = 1 + 5q

4 = 8q

Q = 4/8

= 0,5

Dan apabila nilai p = 0,5, maka nilai (1-p) adalah (1 – 0,5) = 0,5, sehingga kedua nilai probabilitas untuk strategi S1 dan S2 milik perusahaan B sudah diketahui nilainya.

Apabila kedua nilai probabilitas tersebut dimasukkan dalam kedua persamaan di atas, maka kerugian minimal yang diharapkan oleh perusahaan B adalah :

Dengan persamaan ke-1	Dengan persamaan ke-2
= 2q + 5(1-q)	= 6q + 1(1-q)
= 2 (0,5) + 5 (0,5)	= 6 (0,5) + 1 (0,5)
= 3,5	= 3,5

Perhatikan, bahwa keduanya menghasilkan kerugian minimal yang diharapkan adalah sama, yakni sebesar 3,5. Sebelum menggunakan strategi campuran ini kerugian minimal perusahaan B adalah sebesar 5, berarti dengan digunakan strategi campuran ini, kerugian minimal perusahaan B bisa menurun sebesar 1,5 menjadi 3,5.

3. Metode Aljabar Matriks

Metoda aljabar matriks adalah cara lain untuk menyelesaikan suatu permainan yang mempunyai matriks segi empat atau ordo 2 × 2.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_2 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \{P_{ij}\}$$

Dimana P_{ij} menunjukkan jumlah *pay off* dalam baris ke I dan kolom ke j.

Strategi optimal untuk perusahaan A dan B da nilai permainan (V), dapat dicari dengan rumus-rumus berikut :

$$\text{Strategi optimal A } = \frac{[1 \quad 1] \; [P_{adj}]}{[1 \quad 1] \; [P_{adj}] \; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\text{Strategi optimal A } = \frac{[1 \quad 1] \; [P_{cof}]}{[1 \quad 1] \; [P_{adj}] \; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$Nilai\ Permainan\,(V) = \begin{bmatrix} strategi \\ optimal\ A \end{bmatrix} [P_{ij}] \begin{bmatrix} strategi \\ optimal\ B \end{bmatrix}$$

$$= \frac{[P_{ij}]}{[1 \quad 1][P_{adj}]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$Dimana \quad P_{ij} = game\ matrix = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$P_{cof} = cofactor\ matrix = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$P_{adj} = adjoint\ matrix = [P_{cof}]^T \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$[P_{ij}] = a.d - b.c$$

Jadi dapat diketahui:

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{cof} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{adj} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = (2\,.1) - (5.6) = -28$$

Dari hasil pencarian dengan rumus maka didapat :

$$Strategi\ optimal\ A = \frac{[-5 - 3]}{-8}$$

$$Strategi\ optimal\ A = \frac{[-4 - 4]}{-8}$$

Jadi, strategi yang optimal adalah

$$A_1 = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8} \qquad A_2 = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$B_1 = \frac{-4}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad B_2 = \frac{-4}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Jadi, nilai permainan (V)

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}}{-8} = \frac{-28}{-8} = 3,5$$

4. Metode Program Linear

Metoda grafik, analisis, dan aljabar matriks yang dibahas sebelumnya mempunyai ruang lingkup agak terbatas. Untuk menyelesaikan permainan strategi-campuran dengan ordo 3 × 3 atau ordo yang lebih besar, dapat mempergunakan linear programming.

Untuk menguraikan teknik dan prosedur linear programming ini, akan kembali digunakan contoh permainan dua-pemain jumlah-nol dalam tabel 3.7.

Notasi yang dipergunakan :

V = *nilai permainan*
$\overline{X}_1, \overline{X}_2$ = *probabilitas pemilihan strategi* A_1 *dan* A_2
$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2$ = *probabilitas pemilihan strategi* B_1 *dan* B_2

Dengan A sebagai maximizing player, maka dapat dinyatakan keuntungan yang diharapkan untuk A dalam tanda ketidaksamaan ≥. Ini berarti bahwa A mungkin memperoleh keuntungan lebih dari V bila B menggunakan strategi yang lemah. Jadi, nilai keuntungan yang diharapkan untuk pemain A adalah sebagai berikut:

$2\overline{X}_1 + 6\overline{X}_2 \geq V$ (*bila pemain B menggunakan strategi B*1)
$5\overline{X}_1 + 1\overline{X}_2 \geq V$ (*bila pemain B menggunakan strategi B*2)

Diketahui bahwa:

$\overline{X}_1 + \overline{X}_2 = 1$
dan
$\overline{X}_1, \overline{X}_2 \geq 0$

Dengan B sebagai minimizing player, maka dapat dinyatakan kerugian yang diharapkan B dalam tanda ketidaksamaan ≤. Ini berarti B mungkin mengalami kerugian kurang dari V bila A menggunakan strategi yang lemah. Jadi, nilai kerugian yang diharapkan untuk pemain B adalah sebagai berikut:

$$2\overline{Y_1} + 5\overline{Y}_2 \leq V \quad (bila\ pemain\ A\ menggunakan\ strategi\ A1)$$
$$6\,\overline{Y}_1 + 1\overline{Y}_2 \leq V \quad (bila\ pemain\ A\ menggunakan\ strategi\ A3)$$

Diketahui bahwa :

$$\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 = 1$$
$$dan$$
$$\overline{Y}_1, \overline{Y}_2 \geq 0$$

Dengan membagi setiap ketidaksamaan dan persamaan diatas dengan V, didapatkan :

Untuk perusahaan A

$$\frac{2\overline{X}_1}{V} + \frac{6\overline{X}_2}{V} \geq 1$$
$$\frac{5\overline{X}_1}{V} + \frac{1\overline{X}_2}{V} \geq 1$$
$$\frac{\overline{X}_1}{V} + \frac{\overline{X}_2}{V} \geq 1$$

Untuk perusahaan B

$$\frac{2\overline{Y}_1}{V} + \frac{5\overline{Y}_2}{V} \leq 1$$
$$\frac{6\overline{Y}_1}{V} + \frac{1\overline{Y}_2}{V} \leq 1$$
$$\frac{\overline{Y}_1}{V} + \frac{\overline{Y}_2}{V} \leq 1$$

Bila ditentukan variabel-variabel barunya :

$$\frac{\overline{X}_1}{V} = X_1 \quad , \quad \frac{\overline{X}_2}{V} = X_2$$
$$\frac{\overline{Y}_1}{V} = Y_1 \quad , \quad \frac{\overline{Y}_2}{V} = Y_2$$

Maka didapatkan :

Untuk perusahaan A

$2\ X1 + 6\ X2 \geq 1$

$5\ X1 + 1\ X2 \geq 1$

$X1 + X2 = 1/V$

Untuk perusahaan B

$2\ Y1 + 5\ Y2 \leq 1$

$6\ Y1 + 1\ Y2 \leq 1$

$Y1 + Y2 = 1/V$

Karena perusahaan A adalah maximizing player, maka tujuannya adalah memaksimumkan V, atau sama dengan meminimumkan 1/V. Dengan X1 + X2 = 1/V, dapat dirumuskan masalah linear programming untuk perusahaan A sebagai berikut:

Minimumkan

$Z = X1 + X2 \rightarrow Z = 1/V$

Batasan-batasan:

$2\ X1 + 6\ X2 \geq 1$

$5\ X1 + 1\ X2 \geq 1$

$X1\ ,\ X2 \geq 0$

Sedangkan perusahaan B adalah minimizing player, maka tujuannya adalah meminimumkan V, atau ini berarti B harus memaksimalkan 1/V. Dengan Y1 + Y2 = 1/V, dapat dirumuskan masalah linear programming untuk perusahaan B sebagai berikut:

Maksimumkan

Z = Y1 + Y2 → Z = 1/V

Batasan-batasan:

2 Y1 + 5 Y2 ≤ 1

6 Y1 + 1 Y2 ≤ 1

Y1 , Y2 ≥ 0

Dengan metoda simplex, masalah linear programming primal dapat dipecahkan.

Penyelesaian optimalnya :

$$Y_1 = \frac{1}{7} \qquad Y_2 = \frac{1}{7}$$

$$X_1 = \frac{5}{28} \qquad X_2 = \frac{3}{28}$$

Jadi, dapat ditentukan nilai V-nya

$$Z = \frac{1}{V} = X_1 + X_2 = \frac{5}{28} + \frac{3}{28} = \frac{2}{7}$$

Jadi

$$V = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Hasilnya sama dengan metoda-metoda lain. Selanjutnya dapat dicari:

$$\overline{X}_1 = V.X_1 = \frac{7}{2} \times \frac{5}{28} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$\overline{X}_2 = V.X_2 = \frac{7}{2} \times \frac{3}{28} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

Dan

$$\overline{Y}_1 = V.Y_1 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

$$\overline{Y}_2 = V.Y_2 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{2} = 0{,}50$$

3.6 *Prisoners Dilemma*

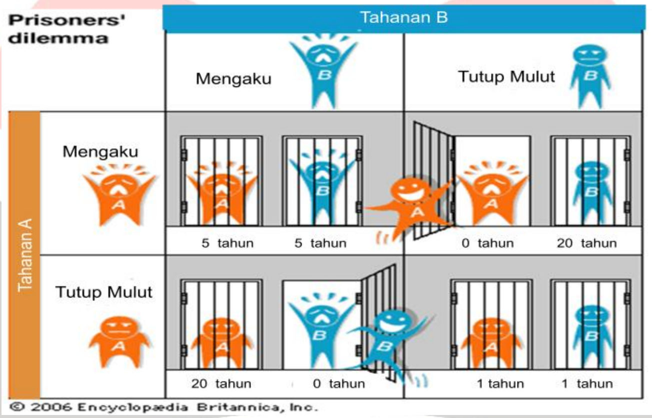
Dua orang penjahat ditahan karena melakukan perampokan bersenjata.Mereka langsung dipisahkan. Apabila terbukti dan dihukum, maka mereka dapat 20 tahun di penjara. Akan tetapi bukti tidak cukup untuk mendakwa mereka.barang bukti hanya ada untuk kasus memiliki barang curian, yang hukumannya 1 tahun.

Penjahat tersebut diminta untuk melakukan hal berikut: Apabila Anda mengaku dan teman Anda tidak, maka Anda akan dibebaskan. Apabila Anda tidak mengaku dan teman Anda mengaku, Anda akan memperoleh 20 tahun penjara. Apabila kalian berdua mengaku maka Anda memperoleh 5 tahun penjara.

Tabel 3.11 Matrik *pay off prisoners dilemma*

		Individu B	
		Mengaku	Tidak mengaku
Individu A	Mengaku	5 , 5	0 , 20
	Tidak mengaku	20 , 0	1 , 1

Suatu permainan dengan pay-off seperti dalam tabel di atas dikenal dengan dilema tahanan (*prisoners dilemma)*, karena game seperti itu pertama kali untuk membahas dua orang tahanan yang bersekongkol untuk melakukan tindak kejahatan. Kemudian diinterogasi secara terpisah oleh kepolisian karena belum memiliki bukti yang kuat. Dilema tahanan sering terjadi dalam negosiasi politik maupun ekonomi, misalnya dalam pengawasan senjata dan masalah penjatahan produksi dalam suatu kartel.



Gambar 3.1 *Prisoners Dilemma*

3.7 Permainan Berjumlah Tak Nol Dua Pemain

Permainan berjumlah tak nol dua pemain merupakan perluasan permainan berjumlah nol dua pemain pada subbab 3.5, perbedaannya adalah kemenangan satu pemain belum tentu kekalahan pemain lainnya. Karena itu penyelesaiaannya pun menjadi lebih kompleks dan lebih sulit untuk menentukan hasil permainannya, tetapi pada dunia nyata permasalahan permainan berjumlah tak nol dua pemain lebih sering ditemui daripada permasalahan berjumlah nol. Metode yang digunakan untuk menyelesaikannya menggunakan pemikiran pada permainan berjumlah nol dua pemain.

Misalkan ada dua pemain, A dan B yang sedang bersaing untuk memenangkan suatu permainan. Dalam usahanya untuk memenangkan permainan, A mempuyai *m* kemungkinan strategi. Sedangkan B mempunyai *n* kemungkinan strategi. Pemain A memperoleh keuntungan sebesar a_{ij} jika menggunakan strategi ke-*i* dengan syarat B memilih strategi ke-*j*. Permainan di atas dapat dinyatakan dengan matriks *pay off* sebagai berikut:

Tabel 3.12 Matriks *Pay off* Umum Bagi Pemain (A,B)

		Strategi B					
		B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
	X_1	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	…	(a_{1j},b_{1j})	…	(a_{1n},b_{1n})
	X_2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	…	(a_{2j},b_{2j})	…	(a_{2n},b_{2n})
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
Strategi A	X_i	(a_{i1},b_{i1})	(a_{i2},b_{i2})	…	(a_{ij},b_{ij})	…	(a_{in},b_{in})
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
	X_m	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	…	(a_{mj},b_{mj})	…	(a_{mn},b_{mn})

Angka positif pada setiap elemen (a_{ij}, b_{ij}) menyatakan kemenangan yang didapat oleh masing-masing pemain, sedangkan angka negatif menyatakan kekalahan yang didapat oleh masing-masing pemain jika A memainkan strategi A_i dan B memainkan strategi B_j.

Contoh 3.8

Jika pemain A mempunyai 3 strategi A_1, A_2, A_3 dan B mempunyai 2 strategi B_1, B_2. Maka matriks permainan di atas adalah sebagai berikut:

		Strategi B	
		B_1	B_2
Strategi A	A_1	$(-2,3)$	$(1, 2)$
	A_2	$(4, 3)$	$(2, 1)$
	A_3	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	$(3, 1)$

Elemen (1, 2) menyatakan bahwa jika A memainkan strategi A_1, dan B memainkan strategi B_2 maka *pay off* yang didapatkan oleh A adalah 1 dan *pay off* yang didapatkan oleh B adalah 2. Jika *pay off* A dijumlahkan dengan *pay off* B yaitu 1 + 2 adalah 3 dimana hasilnya tidak sama dengan nol. Jika diperlukan, matriks *pay off* pemain A dan B dapat ditulis secara terpisah sehingga menjadi:

	B_1	B_2
A_1	-2	1
A_2	4	2
A_3	$\frac{3}{2}$	3

	B_1	B_2
A_1	3	2
A_2	3	1
A_3	2	1

Dengan menggunakan metode maksimin pada permainan berjumlah nol akan ditentukan *pay off* minimum masing-masing pemain.

	B_1	B_2	Minimum baris	
A_1	-2	1	-2	
A_2	4	2	2	
A_3	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	← Maksimin

Matriks *Pay off* dengan Maksimin untuk A

	B_1	B_2
A_1	3	2
A_2	3	1
A_3	2	1
Minimum kolom	2 ↑	1
	Maksimin	

Matriks *Pay off* dengan Maksimin untuk B

Nilai maksimum untuk pemain A dan B adalah 2, dan nilai tersebut berada pada baris A_2 dan kolom B_1 dengan *pay off* (4, 3). Karena pada subbab ini dibahas mengenai permainan berjumlah tak nol dua pemian maka metode maksimin dan minimaks tidak digunakan, karena masing-masing pemain berusaha untuk memaksimumkan keuntungan. Selain metode maksimin dapat juga digunakan metode *dominance*. Pada contoh di atas, dapat dilihat bahwa B_1 mendominasi B_2 maka dengan memainkan strategi B_1, pemain B akan mendapatkan *pay off* lebih besar daripada memainkan strategi B_2. Karena itu B akan memainkan strategi B_1, dan jika dilihat pada matriks *pay off* untuk A, keuntungan terbesar yang didapat oleh A adalah jika A memainkan strategi A_2. Dengan demikian, A akan memainkan strategi A_2 dan B memainkan strategi B_1, sehingga *pay off* yang didapat oleh pemain A adalah 4 dan untuk pemain B adalah 3.

3.7.1. Keseimbangan Nash (Nash *Equilibrium*)

Titik sadel adalah istilah yang digunakan pada permainan berjumlah nol dua pemain, sedangkan pada permainan berjumlah tak nol digunakan istilah titik keseimbangan Nash (Nash *Equilibrium*). Keseimbangan Nash menggambarkan kondisi dimana satu pihak mengambil keputusan berdasarkan keputusan pihak lain. Pembahasan sebelumnya menunjukkkan bahwa untuk menentukan titik keseimbangan Nash masih digunakan pemikiran pada permainan dua pemain.

3.7.1.1. Keseimbangan Murni Nash (*Pure* Nash *Equilibrium*)

Titik keseimbangan murni Nash adalah kondisi dimana masing-masing pemain memainkan satu strategi secara pasti. Pada Contoh 3.8 untuk mencari keseimbangan murni Nash dimisalkan elemen paling besar atau sama besar pada matriks diberi tanda #. Contohnya pada (A_1, B_1) komponennya adalah (−2, 3) dan (A_2, B_2) komponennya adalah (1, 2), karena 3 merupakan nilai terbesar pada komponen kedua yang menyatakan *pay off* bagi B maka nilai 3 diberi tanda #. Kemudian dilihat pada komponen pertama yang menyatakan *pay off* bagi pemain A, contohnya pada kolom pertama (−2, 3), (4, 3), dan $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, nilai 4 merupakan nilai terbesar maka 4 diberi tanda #. Tititk keseimbangna Nash adalah dimana setiap kemungkinan *pay off* pada semua komponen mempunyai tanda #. Permainan pada Contoh 3.8 menjadi seperti berikut:

		Strategi B	
		B_1	B_2
Strategi A	A_1	$(-2, 3^{\#})$	$(1, 2)$
	A_2	$(4^{\#}, 3)$	$(2, 1)$
	A_3	$\left(\frac{3}{2}, 2^{\#}\right)$	$(3^{\#}, 1)$

Pada elemen (4, 3) semua komponen mempunyai tanda #. Sehingga dapat disimpulkan bahwa (4, 3) adalah titik keseimbangan Nash karena elemen tersebut merupakan hasil optimum bagi kedua pemain.

3.7.1.2. Keseimbangan Campuran Nash (*Mixed* Nash *Equilibrium*)

Jika suatu permainan tidak mempunyai titik keseimbangan murni Nash maka dapat dicari titik keseimbangan campuran Nash. Untuk mencari titik keseimbangan campuran Nash yang juga masih menggunakan pemikiran metode strategi pada permainan berjumlah nol, perbedaannya adalah digunakan perhitungan turunan parsial pada keseimbangan campuran Nash.

Contoh 3.9

		Strategi B	
		y	$1 - y$
Strategi A	x	(3, 6)	(6, 3)
	$1 - x$	(4, 1)	(2, 4)

Pemain A mempunyai strategi A_1 dan A_2 , dan pemain B mempunyai strategi B_1 dan B_2, dimisalkan:

$X = (x, 1 - x)$ adalah peluang strategi campuran bagi A

$Y = (y, 1 - y)$ adalah peluang strategi campuran bagi B

$P_A(x, y)$ adalah nilai ekspektasi *pay off* bagi A saat A memainkan strategi X dan B memainkan strategi Y.

$P_B(x, y)$ adalah nilai ekspektasi *pay off* bagi B saat A memainkan strategi X dan B memainkan strategi Y.

$$\begin{aligned} P_A(x, y) &= x(3y + 6(1 - y) + (1 - x)(4y + 2(1 - y)) \\ &= x(6 - 3y) + (1 - x)(3y + 1) \\ &= -5xy + 4x + 2y + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_B(x, y) &= x(6y + 3(1 - y) + (1 - x)(y + 4(1 - y)) \\ &= x(3y + 3) + (1 - x)(4 - 3y) \\ &= 6xy - x + 4 - 3y \end{aligned}$$

Kemudian akan dicari titik keseimbangan Nash (X*, Y*), dimana X* = (x*, 1 − x*) dan Y* = (y*, 1 − y*). Pertama, akan dicari *pay off* yang paling maksimum di antara semua nilai *pay off* P_A(X, Y*). Nilai *pay off* maksimum dengan $0 \leq x \leq 1$ diperoleh pada saat $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, sehingga diperoleh y* = $\frac{4}{5}$. Dengan cara yang sama, dapat dicari nilai *pay off* $P_B(X^*, Y^*)$ yang paling maksimum di antara semua nilai *pay off* $P_B(X^*, Y^*)$. Nilai *pay off* maksimum dengan $0 \leq y \leq 1$ diperoleh pada saat $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, sehingga diperoleh x* = $\frac{1}{2}$.

Berdasarkan perhitungan di atas didapat $X^* = \left(\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$ dan $Y^* = \left(\frac{4}{5}, \ \frac{1}{5}\right)$. Sehingga nilai ekspektasi *pay off* bagi A adalah dan nilai ekspektasi *payoff* bagi B adalah $\frac{18}{5}$ dan nilai *pay off* bagi B adalah $\frac{7}{2}$.

3.8. Permainan dengan N Pemain

Sebelumnya sudah dibahas permainan dengan dua pemain, tetapi pada dunia nyata permainan yang melibatkan lebih dari dua pemain ($N \geq 3$) lebih sering ditemui. Permainan dengan N pemain juga dapat dibagi menjadi dua berdasarkan jumlah *pay off* yang didapat masing-masing pemain yaitu permainan berjumlah nol dan permainan berjumlah tak nol dengan N pemain.

Pada permainan dengan N = 3 pemain A mempunyai strategi $(A_1, \ldots, A_r)$, pemain B mempunyai $(B_1, \ldots, B_m)$ dan C mempunyai strategi $(C_1, \ldots, C_n)$. Untuk setiap A_i dapat dinyatakan dengan matriks m x *n* dengan *m* baris menyatakan strategi B $(B_1, \ldots, B_m)$ dan kolom *n* menyatakan strategi C $(C_1, \ldots, C_n)$. Elemen baris ke-*j* dan kolom ke-*k* akan menyatakan tiga jumlah *pay off* bagi A, B, dan C jika memainkan strategi A_i, B_j, C_k.

3.8.1. Permainan Berjumlah Nol

Permainan berjumlah nol denagn N pemain, pada kasus ini N = 3, jumlah *pay off* dari masing-masing pemain adalah nol. Pada permainan ini salah satu atau ketiga pemain mempunyai kemungkinan mendapat keuntungan ataupun kerugian.

Misalkan ada tiga pemain A, B, dan C masing-masing mempunyai dua strategi. Permainan di atas dapat dinyatakan dalam matriks permainan 2 x 2 sebagai berikut:

Contoh 3.10

A_1	C_1	C_2
B_1	(2, −1,−1)	(−1, 0, 1)
B_2	(0, 0, 0)	(0, 1, −1)

A_2	C_1	C_2
B_1	(−2, 1, 1)	(0, 2, −2)
B_2	(1, −1, 0)	(1, 0, −1)

Dengan menggunakan matriks *pay off* di atas akan dicari strategi optimum bagi masing-masing pemain agar mendapatkan keuntungan optimum. Jika matriks *pay off* untuk pemain A, B, dan C pada Contoh 3.10 ditulis secara terpisah maka diperoleh:

A_1	C_1	C_2
B_1	2	−1
B_2	0	0

A_2	C_1	C_2
B_1	−2	0
B_2	1	1

Matriks *Pay off* Bagi Pemain A pada Contoh 3.10

A_1	C_1	C_2
B_1	-1	0
B_2	0	1

A_2	C_1	C_2
B_1	1	2
B_2	-1	0

Matriks *Pay off* Bagi Pemain B pada Contoh 3.10

A_1	C_1	C_2
B_1	-1	1
B_2	0	1

A_2	C_1	C_2
B_1	1	-2
B_2	0	-1

Matriks *Pay off* Bagi Pemain C pada Contoh 3.10

Ekspektasi *pay off* dari masing-masing pemain diperoleh sebagai berikut:

$P_A = x[2yz - y(1 - z)] + (1 - x)[-2yz + (1 - y)z + (1 - y)z + (1 - y)(1 - z)]$

$= x\,[3yz - y] + (1 - x)[-2yz - y + 1]$

$= 5xyz - 2yz - x - y + 1$

$P_B = x[-yz + (1 - y)(1 - z)] + (1 - x)[yz + 2y(1 - z) - (1 - y)z]$

$= x[1 - y - z] + (1 - x)(2y - z)$

$= -3xy + x + 2y - z$

$P_C = x[-3xyz + 2y + z - 1] + (1 - x)[2yz - y + z - 1]$

$= -5xyz + 3xy + yz - y + z - 1$

Kemudian dengan menghitung turunan parsial P_A terhadap z diperoleh X = $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, Y = $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, dan Z = $\left(\frac{4}{15}, \frac{11}{15}\right)$ dengan *pay off* $\left(-\frac{3}{20}, \frac{2}{5}, \frac{13}{12}\right)$. Sehingga dapat disimpulkan dengan memainkan A_1 dengan peluang $\frac{2}{3}$ dan memainkan A_2 dengan peluang $\frac{1}{3}$ pemain A akan mengalami kerugian sebesar $-\frac{3}{20}$, dengan memainkan B_1 dengan peluang $\frac{3}{4}$ dan memainkan B_2 dengan peluang $\frac{1}{4}$ pemain B akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{2}{5}$, dan dengan memainkan C_1 dengan peluang $\frac{4}{15}$ dan memainkan C_2 dengan peluang $\frac{11}{15}$ pemain A akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{13}{12}$.

3.8.2. Permainan Berjumlah Tak Nol

Permainan berjumlah tak nol pemain dengan N pemain, pada kasus ini N = 3, jumlah *pay off* dari masing-masing pemain belum tentu nol. Pada permainan ini ketiga pemain mempunyai kemungkinan kerugian atau keuntungan masing-masing. Permainan berjumlah tak nol pemain dengan N pemain dapat mempunyai titik keseimbangan murni Nash atau titik keseimbangan campuran Nash. Berikut diberikan contoh permainan dengan titik keseimbangna murni Nash dan titik keseimbangan campuran Nash.

3.8.2.1. Keseimbangan Murni Nash N Pemain

Misalkan ada tiga pemain A, B, dan C masing-masing mempunyai dua strategi. Permainan di atas dapat dinyatakan dalam dua matriks permainan 2 x 2 sebagai berukut:

Contoh 3.11

A_1	C_1	C_2
B_1	(1, 0, 2)	(2, −1, 0)
B_2	(0, 4, 3)	(3, 1, 2)

A_2	C_1	C_2
B_1	(2, 1, 3)	(4, 1, 2)
B_2	(2, 2, 2)	(0, 0, 1)

Jika pemain A, B, dan C memainkan strategi A_2, B_1, dan C_2 maka *pay off* untuk pemain A adalah 4, untuk pemain B adalah 1, dan untuk pemain C adalah 2. Untuk mencari keseimbangan murni Nash akan dicari elemen paling besar (sama besar) pada nilai *pay off* masing-masing pemain dan diberi tanda #. Nilai *pay off* terbesar bagi pemain A diberi tanda #, contohnya (A_1, B_1, C_1) dan (A_2, B_1, C_1) adalah (1, 0, 2) dan (2, 1, 3), karena 2 merupakan nilai terbesar pada komponen pertama yang menyatakan *pay off* bagi A maka nilai 2 diberi tanda #. Kemudian *pay off* bagi pemain B dilihat pada komponen kedua dari keempat kolom yang menyatakan *pay off* bagi B, contohnya pada kolom kedua (2, - 1, 0) dan (3, 1, 2), nilai 1 merupakan nilai terbesar maka 1 diberi tanda #. Dengan cara yang sama, *pay off* bagi pemain C dilihat pada komponen ketiga dari keempat baris yang menyatakan *pay off* bagi pemain C, contohnya pada baris keempat (2, 2, 2) dan (0, 0, 1), nilai 2 merupakan nilai terbesar maka nilai 2 diberi tanda #. Titik keseimbangna Nash adalah dimana setiap kemungkinan *pay off* semua komponen mempunyai tanda # yang pada permainan pada Contoh 3.11 digambarkan sebagai berikut:

A_1	C_1	C_2
B_1	$(1, 0, 2^{\#})$	$(2, -1, 0)$
B_2	$(0, 4^{\#}, 3^{\#})$	$(3^{\#}, 1^{\#}, 2)$

A_2	C_1	C_2
B_1	$(2^{\#}, 1, 3^{\#})$	$(4^{\#}, 1^{\#}, 2)$
B_2	$(2^{\#}, 2^{\#}, 2^{\#})$	$(0, 0, 1^{\#})$

Dalam permainan di atas, pada (A_2, B_2, C_1) yaitu (2, 2, 2) semua komponen mempunyai tanda # maka disebut dengan titik keseimbangan murni Nash yang artinya jika A memainkan strategi 2, B memainkan strategi 2, dan C memainkan strategi 1 maka ketiga pemain akan mendapat keuntungan optimum yaitu 2 untuk pemain A, 2 untuk pemian B, dan 3 untuk pemain C.

3.8.2.2. Keseimbangan Campuran Nash N Pemain

Misalkan ada tiga pemain A, B, dan C masing-masing mempunyai dua strategi dengan matriks *pay off* sebagai berikut:

Contoh 3.12

A_1	C_1	C_2
B_1	(1, 2, −1,)	(−1, 1, 0)
B_2	(0, 1, 0)	(2, 0, 1)

A_2	C_1	C_2
B_1	(0, 3, 1)	(1, −1, 2)
B_2	(2, 1, 0)	(0, 0, 1)

Permainan di atas tidak mempunyai titik keseimbangan Nash, karena itu akan dicari titik keseimbangan campuran Nash dengan menggunakan turunan parsial. Dimisalkan X = (x, 1 − x), Y = (y, 1 − y), dan Z = (z, 1 − z) berturut-turut adalah strategi campuran bagi pemain A, B, dan C. Maka *pay off* bagi masing-masing pemain adalah sebagai berikut:

$$P_A = x[yz - y(1 - z) + 2(1 - y)(1 - z) + (1 - x)[y(1 - z) + 2(1 - y)z]$$

$$= x[4xyz - 3y - 2z + 2] + (1 - x)[-3yz + y + 2z]$$

$$= 7xyz - 4xy - 4xz - 3yz + 2x + y + 2z$$

$$P_B = x[2yz + y(1 - z) + (1 - y)z] + (1 - x)[3yz - y(1 - z) + (1 - y)z]$$

$$= x[yz + y] + (1 - x)[3yz - y + z]$$

$$= -2xyz + 2xy - xz + 3yz - y + z$$

$$P_C = x[-yz + (1 - y)(1 - z)] + (1 - x)[yz + 2y(1 - z) + (1 - y)(1 - z)]$$

$$= x[-y - z + 1] + (1 - x)[y - z + 1]$$

$$= -2xy + y - z + 1$$

Selanjutnya akan dicari nilai nilai x, y, z yang menghasilkan *pay off* maksimum dengan menghitung turunan parsial P_A terhadap x sama dengan nol didapat $z = \frac{4y-2}{7y-4}$. Kemudian *pay off* bagi B diturunkan terhadap y didapat $x = \frac{1-3z}{-2z+2}$. Selanjutnya *pay off* bagi C diturunkan terhadap z didapat z = 0 dan jika disubstitusi ke persamaan sebelummnya maka diperoleh $x = \frac{1}{2}$, dan $y = \frac{1}{2}$. Dengan demikian titik keseimbangan campuran Nash adalah X = $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, Y =

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, Z = (0, 1) sehingga *pay off* yang didapat masing-masing pemain adalah $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

3.4.3. Penggabungan Pemain (*Coalitions*)

Pada permainan dengan N pemain terdapat kemungkinan dua atau lebih pemain bergabung untuk melawan pemain lainnya. Para pemain yang bergabung dapat menyerasikan pilihan strategi masing-masing untuk mengalahkan lawannya.

3.4.3.1. Penggabungan Pemain Berjumlah Nol

Dengan menggunakan Contoh 3.10 jika pemain A dan pemain C bergabung untuk melawan B, maka didapat matriks *pay off* sebagai berikut:

	A_1C_1	A_1C_2	A_2C_1	A_2C_2
B_1	−1	0	1	2
B_2	0	1	−1	0

Karena permainan pada Contoh 3.10 adalah permainan berjumlah nol maka hanya perlu dituliskan *pay off* untuk B. Kemudian untuk menyelesaikannya dapat digunakan metode pada permainan berjumlah nol dua pemain, yaitu dengan metode grafik. Matriks diperkecil menjadi matriks 2 x 2 dengan menghapus kolom kedua dan keempat, sehingga matriks permainan menjadi:

	A_1C_1	A_2C_1
B_1	−1	1
B_2	0	−1

Matriks *Pay off* bagi Pemain B pada Contoh 3.10

Dengan menggunakan strategi campuran pada permainan berjumlah tak nol dua pemain diperoleh $x = \frac{1}{3}$ dan $y = \frac{2}{3}$, dengan nilai permainan adalah $-\frac{1}{3}$, yang artinya kekalahan maksimum yang mungkin dialami oleh C adalah $\frac{1}{3}$ dan pemain AC akan mendapat keuntungan paling sedikit $\frac{1}{3}$. Saat pemain B dan AC memainkan strategi campuran optimum maka *pay off* yang didapat adalah $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(2, -1, -1) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(-2, 1, 1) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(0, 0, 0) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(1, -1, 0) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$. Pemain B akan mengalami kekalahan sebesar $\frac{1}{3}$, C mengalami kekalahan sebesar $\frac{1}{9}$, sedangkan A akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{4}{9}$.

Jika pemain B dan pemain C bergabung untuk melawan A, maka didapat matriks *pay off* untuk A sebagai berikut:

	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
C_1	−1	0	1	0
C_2	1	−1	−2	−1

Menggunakan metode grafik, kolom ketiga dan keempat dihapus sehingga matriks *pay off* menjadi:

	B_1C_1	B_1C_2	B_2C_1	B_2C_2
A_1	2	−1	0	0
A_2	−2	0	1	1

Menggunakan metode grafik, kolom ketiga dan keempat dihapus sehingga matriks *pay off* menjadi:

	B_1C_1	B_1C_2
A_1	2	−1
A_2	−2	0

Matriks *Pay off* bagi Pemain C pada Contoh 3.10

Dengan menggunakan strategi campuran diperoleh $x = \frac{2}{5}$ dan $y = \frac{1}{5}$, dengan nilai permainan adalah $-\frac{2}{3}$. Sehingga kekalahan maksimum yang mungkin dialami oleh pemian A adalah $\frac{2}{5}$ dan kemenangan minimum pemain BC adalah $\frac{2}{5}$. Saat A dan BC memainkan strategi campuran optimum maka *pay off* yang didapat adalah $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(2, -1, -1) + \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(-1, 0, 1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(-2, 1, 1) + \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(0, 2, -2)$ $= \left(-\frac{2}{25}, \frac{3}{25}, -\frac{1}{25}\right)$. Pemain A akan mengalami kekalahan sebesar $\frac{1}{25}$ sedangkan B akan mendapat kemenangan sebesar $\frac{3}{25}$.

Jika pemain A dan pemain B bergabung untuk melawan C, maka didapat matriks *pay off* untuk C sebagai berikut:

	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
C_1	−1	0	1	0
C_2	1	−1	−2	−1

Menggunakan metode grafik, kolom ketiga dihapus sehingga matriks *pay off* sebagai menjadi:

	A_1B_1	A_1B_2
C_1	−1	0
C_2	1	1

Matriks *Payoff* bagi Pemain C pada Contoh 3.10

Dengan menggunakan strategi campuran diperoleh $x = \frac{2}{3}$ dan $y = \frac{1}{3}$, dengan nilai permainan adalah $-\frac{1}{3}$. Sehingga kekalahan maksimin yang mungkin dialami pemain C adalah $\frac{1}{3}$ dan kekalahan minimum pemain AB adalah $\frac{2}{3}$. Saat C dan AB memainkan strategi campuran optimum maka *pay off* yang didapat adalah $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(2, -1, -1) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(0, 0, 0) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(0, 1, -1) = \left(\frac{1}{9}, 0, -\frac{1}{3}\right)$. Pemain A akan mendapat kemenangan sebesar $\frac{1}{9}$, sedangkan B tidak mengalami kekalahan maupun kemenangan. Berdasarkan perhitungan penggabungan pemain di atas dapat disimpulkan pemain A memilih bergabung dengan C, tetapi pemain B dan C lebih memilih tidak bergabung dengan pemain lain karena dengan menggunakan strategi pemain B dan pemain C akan mengalami kerugian.

3.4.3.2. Penggabungan Pemain Berjumlah Tak Nol

Dengan menggunakan Contoh 3.8 akan dilihat kemungkinan *pay off* yang di dapat masing-masing pemain jika melakukan penggabungan strategi. Jika matriks *pay off* untuk pemain A, B, dan C pada Contoh 3.8 ditulis secara terpisah maka diperoleh:

A_1	C_1	C_2
B_1	1	−1
B_2	0	2

A_2	C_1	C_2
B_1	0	1
B_2	2	9

Matriks *Pay off* Bagi Pemain A pada Contoh 3.12

A_1	C_1	C_2
B_1	2	1

B_2	1	0

A_2	C_1	C_2
B_1	3	−1
B_2	1	0

Matriks *Payoff* Bagi Pemain B pada Contoh 3.12

A_1	C_1	C_2
B_1	−1	0
B_2	1	0

A_2	C_1	C_2
B_1	1	2
B_2	0	1

Matriks *Pay off* Bagi Pemain C pada Contoh 3.12

Dilihat pada matriks *pay off* bagi pemain B, strategi C_2 mendominasi C_1, sehingga untuk penggabungan pemain B dan C diperoleh matriks *pay off* sebagai berikut:

	B_1C_1	B_2C_2
A_1	(−1, 1)	(2, 1)
A_2	(1, 1)	(0, 1)

Ekspektasi *pay off* bagi pemain A dan BC adalah:

$P_A = x[y + 2(1 - y)] + (1 - x)y$

$= -4xy + 2x + y$

$P_{BC} = x[y + (1 - y)] + (1 - x)[y + (1 - y)]$

$= x + (1 - x)$

$= 1$

Dengan menghitung turunan parsial P_A terhadap x didapat $y = \frac{1}{2}$, menghitung turunan parsial P_A terhadap *y* didapat $x = \frac{1}{4}$. Sehingga nilai *v(A)* = = $\frac{1}{2}$ dan *v(BC)* = 1 . *Pay off* yang didapat masing-masing pemain jika pemain A dan B bergabung adalah $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(-1, 1, 0) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(2, 0, 1) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1, -1, 2) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$. Sehingga pemain A akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{1}{2}$, B akan mengalami kerugian sebesar $\frac{1}{4}$, dan C akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{5}{4}$.

Kemudian jika pemain A dan C yang bergabung maka akan diperoleh matriks *pay off* sebagai berikut:

	A_1C_2	A_2C_2
B_1	(1, −1)	(−1, 3)
B_2	(0, 3)	(0, 1)

Ekspektasi *pay off* bagi pemain B dan AC adalah :

$$P_B = x[y(1-y)] + (1-x)[2y + (1-y)]$$
$$= 2xy - x$$
$$P_{AC} = x[-y + 3(1-y)] + (1-x)[3y + (1-y)]$$
$$= -6xy + 2x + 2y + 1$$

Dengan menghitung turunan parsial P_B terhadap *x* didapat $y = \frac{1}{2}$, menghitung turunan parsial P_{AC} terhadap *y* didapat $x = \frac{1}{3}$. Sehingga nilai *v(B)* = 0 dan *v(AC)* = $\frac{5}{3}$. *Pay off* yang didapat masing-masing pemain jika pemain B dan C bergabung adalah $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(-1, 1, 0) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1, -1, 2) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(2, 0, 1) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(0, 0, 1) = \left(\frac{2}{3}, 0, 1\right)$. . Sehingga pemain B akan mendapat keuntungan sebesar $\frac{2}{3}$, B tidak mendapat keuntungan maupun kerugian, dan C mendapat keuntungan sebesar 1.

Sedangkan jika pemain A dan B yang bergabung maka diperoleh matriks *pay off* sebagai berikut:

	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2
C_1	(−1, 3)	(0, 1)	(1, 3)	(0, 3)
C_2	(0, 0)	(1, 2)	(2, 0)	(1,0)

Karena strategi C_2 mendominasi strategi C_1, maka pemain C akan selalu memilih strategi 2. Sedangkan AB akan memilih strategi A_1B_2 karena dengan penggabungan strategi tersebut AB akan mendapat *pay off* optimum, dengan $v(C) = 1$ dan $v(AB) = 2$. *Pay off* yang didapat masing-masing pemain jika pemain B dan C bergabung adalah (2, 0, 1).

Berdasarkan perhitungan penggabungan di atas dapat disimpulkan pemain A mendapat keuntungan sebesar 2 jika bergabung dengan B, jika bergabung dengan C dan jika tidak bergabung dengan pemain lain. Pemian B mendapat *pay off* sebesar 0 jika bergabung dengan A, $-\frac{1}{4}$ jika bergabung dengan C, dan 0 jika tidak bergabung dengan pemain lain. Pemain C mendapat keuntungan sebesar $\frac{5}{4}$ jika bergabung dengan B, 1 jika bergabung dengan pemain A, dan 1 jika tidak bergabung dengan pemain lain. Sehingga dapat disimpulkan sendiri , jika bergabung dengan C maka A akan mengalami kerugian. Sedangkan pemain A dan C memilih untuk bergabung dengan B, tetapi kemungkinan yang paling mungkin adalah penggabungan antara pemain A dan B.