BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika memiliki banyak topik yang menarik untuk dikaji, salah satunya mengenai integral. Banyak manfaat yang diperoleh dari pengaplikasian integral baik itu dalam bidang matematika, teknik, bahkan ekonomi. Oleh karena itu, banyak ahli khususnya matematikawan yang terus melakukan pengembangan dalam teori integral, di antaranya George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866 M), seorang matematikawan dari Gottingen, Jerman. Meskipun Teorema Dasar Kalkulus telah dikemukakan oleh Newton, namun Riemann memberi definisi mutakhir tentang integral tentu. Atas sumbangan inilah integral tentu sering disebut sebagai Integral Riemann.

Pendefinisian integral oleh Riemann dilakukan pada fungsi-fungsi terbatas dengan cara kostruktif, yaitu dengan membagi daerah di bawah kurva ke dalam partisi-partisi yang berbentuk persegi panjang sehingga nilai integral Rieman bawah didefinisikan sebagai supremum dari himpunan semua jumlah luas persegi panjang di bawah kurva, dan integral rieman atas didefinisikan sebagai infimum dari himpunan semua jumlah luas persegi panjang yang bagiannya berada sedikit di atas kurva, sehingga untuk suatu fungsi yang terbatas dan kontinu kecuali pada titik-titik berhingga dikatakan terintegralkan rieman jika nilai integral rieman atas dan nilai integral Riemann bawah adalah sama. Kemudian masalah muncul ketika terdapat suatu fungsi terbatas yang diskontinu pada takhingga banyak titik. Contohnya seperti fungsi $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ yang di definisikan sebagai berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & jika\ x\ bilangan\ irrasional\ pada\ [-4,4] \\ -2, & jika\ x\ bilangan\ rasional\ pada\ [-4,4] \end{cases}$$

Fungsi di atas disebut fungsi Dirichlet. Pendefinisian integral yang dilakukan oleh Riemann tidak dapat menyelesaikan masalah pengintegralan pada fungsi tersebut.

Pada tahun 1962, H. Lebesgue mendefinisikan integral dengan menggunakan ukuran Lebesgue yang kemudian dikenal dengan integral Lebesgue. Pendefinisian yang dilakukan oleh Lebesgue hampir sama dengan

Riemann, bedanya partisi yang dilakukan oleh Lebesgue menggunakan himpunan terukur. Nilai integral Lebesgue atas didefinisikan sebagai infimum dari himpunan semua jumlah Lebesgue atas, dan nilai integral Lebesgue bawah sebagai supremum dari himpunan semua jumlah Lebesgue bawah, sehingga untuk suatu fungsi terbatas dikatakan terintegralkan Lebesgue jika nilai integral Lebesgue bawah dan nilai integral Lebesgue atas adalah sama. Dengan pendefinisian seperti ini, suatu fungsi terbatas yang diskontinu pada tak hingga banyak titik seperti fungsi Dirichlet dapat terintegralkan.

Meskipun integral Lebesgue dapat menyelesaikan masalah pada integral Riemann, ternyata integral Lebesgue masih memiliki kekurangan karena terdapat sifat dari integral Lebesgue yang menyatakan bahwa suatu fungsi f terintegralkan Lebesgue jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi F yang kontinu mutlak sehingga $F' = f$ *almost everywhere* pada $[a, b]$. Sifat ini menyebabkan definisi Integral Lebesgue dari suatu interval tidak secara lengkap menyelesaikan masalah rekonstruksi fungsi primitif dari turunannya, karena terdapat suatu fungsi F yang kontinu pada interval [0,1], yang mempunyai turunan berhingga F' yang tidak terintegralkan Lebesgue. Contohnya : (Hamzah, 2009)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & jika\ 0 < x \leq 1 \\ 0, & jika\ x = 0 \end{cases}$$

Fungsi tersebut mempunyai turunan pada setiap titik di [0,1], tetapi F tidak kontinu mutlak pada [0,1]. Akibatnya, fungsi F' tidak terintegralkan Lebesgue pada [0,1].

Pada tahun 1912, A. Denjoy memperkenakan suatu proses pengintegrasian yang merupakan pengembangan dari integral Lebesgue. Pendefinisian integral yang dilakukan oleh Denjoy mengganti syarat kekontinuan mutlak pada integral Lebesgue menjadi lebih lemah, sehingga definisi ini dapat memecahkan masalah pada integral Lebesgue, yaitu dapat merekonstruksi fungsi primitive dari turunannya.

Pada tahun 1914, O.Perron mengembangkan perluasan lain dari integral Lebesgue yang memiliki prinsip berbeda dengan Denjoy tetapi integral ini juga dapat memecahkan masalah yang sama pada integral Lebesgue.

Pendefinisian integral oleh Perron melibatkan fungsi mayor dan fungsi minor yang didefinisikan dengan menggunakan turunan atas dan turunan bawah. Pendefinisian ini menyebabkan setiap turunan dari suatu fungsi dapat terintegralkan.

Meskipun definisi dasar dari integral Denjoy dan integral Perron berbeda, namun keduanya merupakan pengembangan dari integral Lebesgue dan dapat memecahkan masalah yang sama pada integral Lebesgue, hal ini menunjukkan adanya keterkaitan antara integral Denjoy dan integral Perron. Pada skripsi ini penulis tertarik untuk membahas mengenai "Integral Perron dan Ekuivalensinya dengan Integral Denjoy", juga membahas sifat-sifat integral Perron dan integral Denjoy.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut :

1.2.1. Apa saja sifat-sifat yang dimiliki oleh integral Perron?

1.2.2. Bagaimana ekuivalensi integral Perron dengan integral Denjoy?

1.3. Batasan Masalah

Kajian mengenai "Integral Perron dan Ekuivalensinya dengan Integral Denjoy" ini dibatasi hanya pada fungsi dengan domain bernilai real yang terbatas.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan karya tulis ini sebagai berikut :

1.4.1. Mengetahui sifat-sifat apa saja yang dimiliki oleh integral Perron.

1.4.2. Mengetahui bagaimana ekuivalensi integral Perron dengan integral Denjoy.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat baik bagi penulis, maupun bagi para pembaca. Manfaat secara khusus yang diharapkan dari penelitian ini yaitu :

a. Menjadi sumber kajian bagi para mahasiswa untuk menambah pengetahuan mengenai teori integral, khususnya integral Perron dan integral Denjoy.
b. Memberikan motivasi bagi peneliti selanjutnya untuk mengembangkan pembahasan mengenai teori integral.

1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan karya ilmiah ini adalah sebagai berikut :

1.6.1. BAB I (Pendahuluan), pada bagian ini dibahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.

1.6.2. BAB II (Kajian Teori), pada bagian ini dibahas mengenai teori-teori yang menjadi landasan dan acuan dalam pembahasan integral Perron dan ekuivalensinya dengan integral Denjoy. Materi yang dibahas pada bagian ini diantaranya teori himpunan dan fungsi, interval, barisan dan limit, fungsi kontinu, fungsi terbatas, fungsi konvergen, limit fungsi, turunan fungsi, ukuran lebesgue, fungsi terukur, integral lebesgue, perfect set, perfect portion,variasi terbatas dan kontinu mutlak, fungsi mayor dan fungsi minor, serta integra Denjoy dan sifat-sifatnya.

1.6.3. BAB III (Metodologi Penelitian), pada bagian ini dibahas mengenai tahapan penulis dalam menyelesaikan karya tulis ini.

1.6.4. BAB IV (Pembahasan), pada bagian ini dibahas mengenai integral Perron dan sifat-sifatnya, serta ekuivalensi integral Perron dan integral Denjoy.

1.6.5. BAB V (Penutup), pada bagian ini dibahas mengenai kesimpulan penulis terhadap kajian dalam skripsi ini dan saran untuk pembahasan selanjutnya mengenai teori integral.