BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ruang Lebesgue $L_p(X)$ merupakan ruang fungsi atas himpunan terukur X. Ruang Lebesgue merupakan himpunan semua kelas ekuivalen fungsi terukur Lebesgue $f: X \to \mathbb{R}$ yang terintegralkan Lebesgue dengan integral Lebesgue dari $|f|^p$ bernilai hingga dan dinotasikan dengan,

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

(Castillo & Rafeiro, 2016). Ruang Lebesgue pada sebarang nilai $1 \leq p \leq \infty$ yang dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_{L_p}$ merupakan ruang bernorm, dengan

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

untuk sebarang fungsi terukur Lebesgue f anggota $L_p(X)$. Sebagai ruang bernorm, ruang Lebesgue juga memiliki sifat kekonvergenan dan kriteria Cauchy. Ruang Lebesgue merupakan ruang Banach yang dilengkapi dengan norm,

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Bartle, 1966).

Ruang Lebesgue sebagai himpunan dari fungsi terukur Lebesgue ternyata masih memiliki kekurangan, faktanya tidak semua fungsi terukur terintegralkan Lebesgue, sehingga fungsi terukur tersebut bukan merupakan anggota dari ruang Lebesgue. Salah satu contohnya terdapat sebuah fungsi terukur pada suatu himpunan terukur $X := (0,1)$, dengan fungsi tersebut didefinisikan sebagai

$$f(x) := \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} \ \forall \, x \in X := (0,1).$$

Berdasarkan definisi dari ruang Lebesgue, fungsi tersebut bukan anggota dari ruang Lebesgue $L_p(X)$ untuk $1 \leq p \leq \infty$, dikarenakan fungsi tersebut memiliki nilai integral Lebesgue tak hingga.

Di lain pihak, untuk fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ pada himpunan terukur X, fungsi distribusi dari f adalah fungsi $d_f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ yang didefinisikan dengan

$$d_f(\alpha) := \mu(\{x \in X : \ |f(x)| > \alpha\})$$

dengan sebarang nilai $\alpha > 0$ (Grafakos, 2008). Fungsi distribusi yang telah didefinisikan sebelumnya dapat menentukan ukuran dari domain fungsi terukur X yang memenuhi $|f(x)| > \alpha$ untuk setiap $x \in X$. Melalui pendefinisian dari fungsi distribusi tersebut dapat didefinisikan sebuah ruang baru yang merupakan pengembangan dari ruang Lebesgue yaitu ruang Lebesgue lemah.

Ruang Lebesgue lemah $L_{(p,\infty)}(X)$ atas himpunan terukur X merupakan perluasan dari ruang Lebesgue $L_p(X)$ (Castillo & Rafeiro, 2016). Ruang Lebesgue lemah merupakan himpunan semua kelas ekuivalen fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$, dengan

$$\mu(\{x \in X: |f(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^p$$

untuk suatu $C > 0$. Notasi μ menyatakan ukuran Lebesgue dari suatu himpunan dan X merupakan himpunan terukur. Sebagai ruang fungsi, ruang Lebesgue lemah tidak dilengkapi dengan norm, namun dilengkapi dengan quasi-norm. Dengan pendefinisian quasi-norm pada ruang Lebesgue lemah

$$\|f\|_{L_{(p,\infty)}} := \sup_{\alpha > 0} \left\{\alpha \left(d_f(\alpha)\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \infty$$

untuk sebarang fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ anggota $L_{(p,\infty)}(X)$ dan untuk sebarang $0 < p < \infty$ menyebabkan ketaksamaan segitiga pada syarat norm tidak terpenuhi.

Sebagai perluasan ruang Lebesgue dapat ditunjukkan ruang Lebesgue lemah memuat ruang Lebesgue. Dengan quasi-norm yang didefinisikan, ruang Lebesgue lemah dapat ditunjukkan sebagai ruang quasi-norm sehingga ruang Lebesgue lemah memiliki sifat kekonvergenan dan kriteria Cauchy. Sebagai perluasan ruang yang memuat ruang Lebesgue, kekonvergenan di ruang Lebesgue menyebabkan kekonvergenan di ruang Lebesgue lemah (Castillo & Rafeiro, 2016). Castillo & Rafeiro (2016) telah menunjukkan pula bahwa ruang lebesgue lemah merupakan ruang quasi-norm yang lengkap atau dapat disebut sebagai ruang quasi-Banach.

Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk melakukan kajian tentang ekuivalensi kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah dengan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue. Lebih jauh akan dikaji kembali kelengkapan dari quasi-norm ruang Lebesgue lemah.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang masalah di atas, maka permasalahannya dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat ruang Lebesgue lemah sebagai perluasan dari ruang Lebesgue?
2. Bagaimana sifat kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah serta ekuivalensinya dengan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue?
3. Apakah ruang Lebesgue lemah merupakan ruang quasi-Banach?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini, sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat dari ruang Lebesgue lemah sebagai perluasan dari ruang Lebesgue
2. Mengetahui sifat kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah serta ekuivalensinya dengan kekonvergenan dalam ruang Lebesgue.
3. Mengetahui bahwa ruang Lebesgue lemah merupakan ruang quasi-Banach.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat secara teoritis maupun praktis. Khususnya kepada penulis dan umumnya kepada para pembaca, maupun peneliti lainnya.

Manfaat teoritis yang diharapkan penulis adalah memberikan wawasan dalam matematika khususnya bidang analisis fungsional, tentang konsep ruang Lebesgue lemah sebagai salah satu ruang quasi-Banach. Manfaat praktis yang diharapkan penulis adalah hasil dari penilitian ini menjadi referensi dari penelitian lanjutan mengenai ruang Lebesgue lemah maupun ruang quasi-Banach.

1.5 Sistematika Penulisan

Hasil penelitian ini dipublikasikan dalam bentuk skripsi sebagai sebagian dari syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika. Pada skripsi ini terbagi dalam lima bab utama, diantaranya Bab I Pendahuluan, Bab II Kajian Pustaka, Bab III Metodologi Penelitian, Bab IV Pembahasan, dan Bab V Kesimpulan dan Saran.

Pada Bab I Pendahuluan berisi latar belakang masalah yang merupakan merupakan dasar dan asal mula dari penelitian mengenai karakteristik ruang Lebesgue lemah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada Bab II Kajian Pustaka berisi teori-teori pendukung yang digunakan pada pembahasan di Bab IV. Diantaranya, ruang Banach, teori ukuran, ruang Lebesgue, fungsi distribusi, dan ruang quasi-Banach.

Pada Bab III Metodologi Penelitian berisi langkah-langkah penelitian. Mulai dari menemukan topik, mempelajari beberapa konsep, mendapat berbagai temuan, dan penyelesaian penelitian.

Pada Bab IV Pembahasan berisi hasil temuan berdasarkan rumusan masalah dan batasan masalah. Pada bab ini berisi pemaparan sifat-sifat ruang Lebesgue lemah sebagai perluasan dari ruang Lebesgue, kekonvergenan dalam ruang Lebesgue lemah, ruang Lebesgue lemah sebagai ruang quasi-Banach.

Pada Bab V Kesimpulan dan Saran berisi simpulan dari rumusan masalah yang ada serta saran mengenai penelitian lanjutan yang disarankan penulis.