BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Analisis Faktor

Analisis faktor pada prinsipnya merupakan bagian dari analisis multivariat yang berguna untuk mereduksi variabel. Cara kerjanya adalah megumpulkan variabel-variabel yang berkorelasi ke dalam satu atau beberapa faktor umum, di mana satu faktor dengan faktor lainnya saling bebas atau tidak berkorelasi. (Usman dan Sobari, 2013 : 34). Analisis faktor tergolong metode *interdependence*, yaitu metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antar obyek di mana semua variabel berstatus sama, tidak ada variabel independen yang menjadi prediktor bagi variabel dependence, seperti yang terdapat pada regresi. Pada dasarnya analisis faktor mencoba memberikan dimensi evaluasi yang lebih luas terhadap variabel-variabel yang terkait dengan permasalahan sehingga memudahkan interpretasi melalui penggambaran pola hubungan ataupun reduksi data. Hal ini dilakukan dengan cara mengidentifikasi hubungan yang terdapat dalam set variabel terobservasi.

Dalam analisis faktor terdapat dua model faktor, yaitu model faktor *orthogonal* dan model faktor *oblique*. Dalam skripsi ini hanya akan dibahas tentang model faktor *orthogonal*.

3.2 *Measure of Sampling Adequacy* (MSA)

MSA digunakan untuk mengetahui apakah variabel sudah memadai untuk dianalisis lebih lanjut. Nilai ini dapat dilihat pada nilai *anti-image correlation matrix*. Jika nilai MSA lebih besar dari 0,5 maka variabel tersebut sudah memadai untuk dianalisis lebih lanjut. Apabila terdapat nilai MSA dari variabel-variabel awal yang kurang dari 0,5 harus dikeluarkan satu per satu dari analisis, diurutkan dari variabel yang nilai MSA nya terkecil dan tidak digunakan lagi dalam analisis selanjutnya (Usman dan Sobari , 2013 : 36).

3.3 *Kaiser-Meyer-Olkin* (KMO) dan *Bartlett's Test of Sphericity*

Uji KMO dan *Bartlett's Test of Sphericity* yang digunakan untuk meneliti ketepatan penggunaan analisis faktor. Apabila nilai KMO antara 0,5 sampai 1 dan signifikansi *Bartlett's Test of Sphericity* ini kurang dari taraf signifikansi ($\alpha = 0{,}05$) yang digunakan dapat diartikan bahwa analisis faktor tepat digunakan (Usman dan Sobari, 2013 : 38).

Setelah variabel ditentukan dan dipilih serta perhitungan korelasinya telah memenuhi persyaratan untuk dilakukan analisis, langkah selanjutnya adalah membentuk faktor untuk menemukan struktur yang mendasari hubungan antar variabel awal tersebut. Metode yang digunakan dalam pembentukan faktor adalah metode analisis *Principal Component Factoring* (PCF) dan *Principal Axis Factoring* (PAF). Dua langkah utama dalam pembentukan faktor adalah penentuan jumlah faktor dan rotasi faktor-faktor yang terbentuk.

3.4 Model Faktor *Orthogonal*

Definisi 3.1 :

Vektor acak $\mathbf{X}$ teramati, dengan p komponen, mempunyai rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan matriks variansi-kovariansi $\boldsymbol{\Sigma}$. Dalil model faktor menyatakan bahwa $\mathbf{X}$ secara linear bergantung pada faktor umum yaitu variabel acak yang tidak teramati $F_1, F_2, \dots, F_m$ dan faktor khusus yaitu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p$. Model analisis faktornya adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1 &= \ell_{11}F_1 + \ell_{12}F_2 + \cdots + \ell_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\ \mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2 &= \ell_{21}F_1 + \ell_{22}F_2 + \cdots + \ell_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}_p &= \ell_{p1}F_1 + \ell_{p2}F_2 + \cdots + \ell_{pm}F_m + \varepsilon_p \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Atau dalam notasi matriks,

$$\underset{(px1)}{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}}\ \underset{(mx1)}{\mathbf{F}} + \underset{(\mathrm{px1})}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.4.2}$$

di mana :

X = Vektor acak dari variabel acak ke-*i* yang teramati

μ = Vektor rata – rata dari variabel ke-*i*

ε = Vektor dari faktor khusus ke-*i*

F = Vektor dari faktor umum ke-*j*

L = matriks loading ℓ_{ij} dari variabel ke-*i* pada faktor ke-*j*

Untuk memperoleh model faktor *orthogonal* diperlukan beberapa asumsi berikut ini :

1. $E(\boldsymbol{F}) = \mathbf{0}_{(\boldsymbol{mx1})}, \text{kov}(\boldsymbol{F}) = E(\boldsymbol{FF}') = \mathbf{I}_{(\boldsymbol{mxm})}$
2. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{(\boldsymbol{mx1})}, \text{kov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \boldsymbol{\psi}_{(\boldsymbol{pxp})} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_p \end{bmatrix}$ (3.4.3)
3. $\boldsymbol{F}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ saling bebas, sehingga kov $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{F}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{F}) = \mathbf{0}_{(\boldsymbol{pxm})}$

Model *orthogonal* dari sebuah analisis faktor adalah

$$\underset{(px1)}{\mathbf{X}} = \underset{(px1)}{\boldsymbol{\mu}} + \underset{(pxm)}{\mathbf{L}}\;\underset{(mx1)}{\mathbf{F}} + \underset{(\text{px1})}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (3.4.4)$$

Model faktor *orthogonal* menghasilkan struktur kovariansi untuk variabel acak **X,** yaitu :

$$\begin{aligned}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' &= (\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})' \\ &= (\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})((\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon}') \\ &= (\mathbf{LF}(\mathbf{LF})' + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} = \textbf{kov}\left(X_i, X_j\right) &= \boldsymbol{E}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \\ &= \boldsymbol{E}(\mathbf{LF}(\mathbf{LF})' + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})' + \boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') \\ &= (\mathbf{LE}(\mathbf{FF}')\mathbf{L}' + \mathbf{LE}(\mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}') + \mathbf{LE}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}') + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\end{aligned}$$

$$= \left(\mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}\right) \tag{3.4.5}$$

atau

$$\text{Var}\ (X_i) = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2 + \psi_i \tag{3.4.6}$$

$$\text{Kov}\ (X_i, X_j) = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2 \tag{3.4.7}$$

Kovariansi untuk variabel acak **X** dan faktor umum **F** adalah

$$\begin{aligned}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{F}' &= (\mathbf{LF} + \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F}' \\ &= \mathbf{LFF}' + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}'\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\text{Kov}(\mathbf{X},\mathbf{F}) &= E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\mathbf{F}' \\ &= E(\mathbf{LFF}' + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}') \\ &= \mathbf{L}\text{E}(\mathbf{FF}') + \text{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}') \\ &= \mathbf{L}\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

atau

$$\text{Kov}(\mathbf{X},\mathbf{F}) = \ell_{ij} \tag{3.4.9}$$

Proporsi variansi dari variabel ke-*i* yang disumbangkan oleh *m* faktor umum disebut komunalitas ke-*i*. Nilai Var $(X_i) = \sigma_{ii}$ merupakan nilai komunalitas yang ditambahkan dengan nilai variansi khusus atau unikya. Komunalitas ke-*i* dinotasikan sebagai h_i^2. Dari persamaan (3.2.6) dan (3.2.7) diperoleh :

$$\underbrace{\sigma_{ii}}_{\text{var}\ (X_i)} = \underbrace{\ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2}_{\text{komunalitas}} + \underbrace{\psi_i}_{\text{variansi khusus}} \tag{3.4.10}$$

atau

$$h_i^2 = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2 \tag{3.4.11}$$

dan

$$\sigma_{ii} = h_i^2 + \psi_i$$

Komunalitas ke-*i* merupakan jumlah kuadrat dari faktor *loading* variabel ke-*i* pada *m* faktor umum.

Pada kasus di mana satuan dari variabel tidak setara, biasanya dilakukan terlebih dari dahulu standarisasi variabel. Standarisasi dilakukan untuk menghindari adanya satu variabel dengan variansi besar yang terlalu berpengaruh pada pembentukan faktor *loading*.

$$Z_i = \frac{\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} = \frac{\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}_i}{\sqrt{\sigma_i^{\,2}}} \text{, untuk setiap } i = 1,2,\ldots,p \qquad (3.4.12)$$

Maka diperoleh vektor acak yang telah distandarisasi, yaitu :

$$Z_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{X}_{i1} - \boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \dfrac{\mathbf{X}_{i2} - \boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathbf{X}_{ip} - \boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \qquad (3.4.13)$$

Matriks variansi-kovariansi dari variabel yang dibakukan adalah :

$$E\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)' = E\left[\begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \dfrac{\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{\mathbf{X}_p - \boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}.\frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}.\frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{\mathbf{X}_1-\boldsymbol{\mu}_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}.\frac{\mathbf{X}_p-\boldsymbol{\mu}_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{p2}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \qquad (3.2.14)$$

dari penjelasan mengenai koefisien korelasi pada bab sebelumnya diketahui bahwa :

$$r_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$$ untuk setiap i dan k = 1,2,..p

Sehingga matriks variansi-kovariansi untuk variabel yang distandarisasi dapat dinyatakan sebagai matriks korelasi **R**.

kov (**Z**) = kor (**X**) = **R** (3.4.15)

Jika variabel yang distandarisasi digunakan pada model faktor maka persamaan (3.2.5) menjadi :

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}' + \boldsymbol{\psi} \qquad (3.4.16)$$

dan matriks loading menjadi korelasi dari X dan F, yaitu :

Kor(**X**,**F**) = **L** (3.4.17)

3.5 Pemilihan Jumlah Faktor

Untuk menghasilkan suatu model terlebih dahulu ditentukan berapa jumlah faktor umum (m). Untuk memilih beberapa faktor umum (m) tersebut terdapat beberapa kriteria yang harus dipenuhi. Kriteria tersebut yaitu (Rencher, 1934 : 426-427) :

1. Faktor umum (m) dipilih sama dengan banyaknya dengan faktor yang dibutuhkan pada perhitungan variansi untuk memperoleh presentase awal (80%) dari variansi total, tr($\mathbf{\Sigma}$) atau tr($\mathbf{R}$).
2. Faktor umum (m) dipilih sama dengan banyaknya nilai eigen yang lebih besar dari pada rata-rata seluruh nilai eigennya. Untuk matriks korelasi $\mathbf{R}$ rata-rata nilai eigen sama dengan 1 jadi jumlah faktor umum (m) adalah jumlah nilai eigen yang lebih dari satu dan untuk matriks variansi kovariansi $\mathbf{\Sigma}$ rata-ratanya adalah $\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{p}$.
3. Faktor umum (m) dipilih dengan menggunakan *scree* plot. Dari nilai eigen dari $\mathbf{\Sigma}$ maupun dari $\mathbf{R}$, jika grafik dari nilai eigen turun secara drastis dan kemudian membentuk garis lurus dengan sedikit kecekungan maka pilih m sebanyak nilai eigen sebelum membentuk garis lurus.
4. Setelah mendapat nilai loading. Memilih banyaknya faktor umum (m) dengan hipotesis nol bahwa m sesuai untuk model faktor

   H_0 : $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}$ di mana $\mathbf{L}$ adalah matriks p x m

   lawan

   H_1 : $\mathbf{\Sigma}$ adalah matriks dari bentuk matriks definit positif yang lain

   Kriteria keempat ini khusus digunakan pada analisis faktor dengan metode penaksiran *maximum likelihood*.

Setelah menentukan jumlah faktor langkah selanjutnya adalah estimasi parameter yaitu faktor loading dan komunalitas. Karena pada peneltian ini data yang diperoleh dari penggunaan skala likert tidak mempunyai satuan ukur maka pada pernaksiran estimasi parameter faktor loading dan komunalitas cukup menggunakan matriks variansi-kovariansi saja.

3.6 Metode Estimasi Parameter

Metode estimasi parameter yang popular digunakan pada analisis faktor adalah *Principal Component Factoring* (PCF), *Principal Axis Factoring* (PAF) dan *Maximum Likehood*. Parameter yang akan diestimasi adalah *loading* dan komunalitas. Pada skripsi ini hanya akan digunakan metode PCF dan PAF.

Tujuan khusus dari metode analisis faktor *Principal Component* adalah mengetahui struktur yang mendasari variabel-variabel awal dalam analisis dan melakukan penyederhanaan struktur sekumpulan variabel awal tersebut melalui reduksi data. Prosedur matematis untuk mencari struktur matriks variansi-kovariansi **Σ** dapat dilakukan dengan menggunakan matriks dekomposisi spektral. Misal **Σ** mempunyai pasangan nilai eigen dan vektor eigen (λ_i, e_i) dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$, maka

$$\mathbf{\Sigma} = \lambda_1 \boldsymbol{e_1 e_1'} + \lambda_2 \boldsymbol{e_2 e_2'} + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{e_p e_p'} \quad (3.6.1)$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\,\boldsymbol{e_1} \quad \sqrt{\lambda_2}\,\boldsymbol{e_2} \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_p}\,\boldsymbol{e_p}\right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\,\boldsymbol{e_1'} \\ \sqrt{\lambda_2}\,\boldsymbol{e_2'} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_p}\,\boldsymbol{e_p'} \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

Model ini adalah gambaran struktur kovariansi dari analisis faktor yang mempunyai variabel awal sama dengan jumlah faktor yang terbentuk $(m = p)$ dan variansi khususnya $\psi_i = 0$ untuk semua *i*. Matriks faktor *loading* pada kolom ke-*j* dituliskan $\sqrt{\lambda_j}\,\boldsymbol{e_j}$. Dalam bentuk umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\underset{(pxp)}{\mathbf{\Sigma}} = \underset{(pxp)}{\mathbf{L}}\ \underset{(pxp)}{\mathbf{L}'} + \underset{(\mathrm{pxp})}{\mathbf{0}} = \mathbf{LL}' \quad (3.6.3)$$

Selanjutnya faktor *loading* yang terbentuk tersebut merupakan koefisien faktor pada metode *principal component*. Dalam persamaan (3.4.3) belum sesuai dengan tujuan analisis faktor karena belum diperoleh jumlah faktor yang lebih sedikit dari varibel-variabel awalnya. Selain itu, beberapa variansi pada faktor khusus $\boldsymbol{\varepsilon}$ belum dilibatkan. Untuk itu, dibuat sebuah model baru yang dapat dijelaskan struktur kovariansi dengan melibatkan jumlah faktor yang lebih sedikit. Pendekatan yang digunakan dalam model ini adalah dengan menggunakan nilai eigen. Apabila $p - m$ nilai eigen terkahir mempunyai nilai eigen yang cukup kecil, maka kontribusi dari $\lambda_{m+1}\boldsymbol{e_{m+1}e'_{m+1}} + \cdots + \lambda_p \boldsymbol{e_p e'_p}$ terhadap $\boldsymbol{\Sigma}$ pada persamaan (3.4.3) dapat diabaikan. Dengan mengabaikan kontribusi ini, diperoleh persamaan berikut :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, e_1 & \sqrt{\lambda_2}\, e_2 & \cdots & \sqrt{\lambda_m}\, e_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, e'_1 \\ \sqrt{\lambda_2}\, e'_2 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m}\, e'_m \end{bmatrix} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}} \ \underset{(mxp)}{\mathbf{L}'} \qquad (3.6.4)$$

Pada pendekatan di atas diasumsikan bahwa faktor khusus $\boldsymbol{\varepsilon}$ pada (3.42) keberadaannya tidak terlalu penting dan dapat diabaikan pada pemfaktoran $\boldsymbol{\Sigma}$. Akan tetapi, jika faktor khusus tetap dilibatkan dalam model, dapat dilakukan pendekatan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{LL}' + \boldsymbol{\psi}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, e_1 & \sqrt{\lambda_2}\, e_2 & \cdots & \sqrt{\lambda_m}\, e_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\, e'_1 \\ \sqrt{\lambda_2}\, e'_2 \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_m}\, e'_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_p \end{bmatrix}$$

di mana $\psi_i = \sigma_{ii} - \sum_{j=1}^{m} \ell_{ij}^2$ untuk $i = 1,2,...,p$

Tujuan analisis faktor adalah menemukan struktur yang lebih sederhana maka yang diperlukan adalah jumlah variabel baru lebih sedikit dari jumlah variabel awal ($m < p$).

3.6.1 *Principal Component Factoring* (PCF)

Dari sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_p$ kita mendapatkan matriks sampel variansi-kovariansi **S** yang mempunyai pasangan nilai eigen-vektor eigen $(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1)$, $(\hat{\lambda}_2, \hat{e}_2), \cdots, (\hat{\lambda}_p, \hat{e}_p)$, di mana dengan $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \cdots \geq \hat{\lambda}_p$. Misalkan $m < p$ adalah jumlah faktor umum, maka matriks estimasi faktor *loading* $\hat{\ell}_{ij}$ diberikan oleh :

$$\underset{(pxm)}{\hat{\mathbf{L}}} = \underset{(pxm)}{\left[\sqrt{\hat{\lambda}_1}\,\hat{e}_1 \quad | \quad \sqrt{\hat{\lambda}_2}\,\hat{e}_2 \quad | \quad \cdots \quad | \quad \sqrt{\hat{\lambda}_m}\,\hat{e}_m\right]} \tag{3.6.1.1}$$

Estimasi variansi khusus diberikan oleh elemen diagonal dari matriks $\mathbf{S} - \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}'$, sehingga

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}} = \begin{bmatrix} \hat{\psi}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\psi}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\psi}_p \end{bmatrix} \quad \text{dengan } \hat{\psi}_i = \sigma_{ii} - \textstyle\sum_{j=1}^{m} \hat{\ell}_{ij}^2 \tag{3.6.1.2}$$

Sedangkan nilai estimasi komunalitasnya adalah :

$$\hat{h}_i^2 = \hat{\ell}_{i1}^2 + \hat{\ell}_{i2}^2 + \cdots + \hat{\ell}_{im}^2$$

Definisi 3.2 :

Proporsi dari variansi sampel total yang berasal dari faktor umum ke-*j* adalah :

$$\frac{\sum_{j=1}^{p} \ell_{ij}^2}{\mathrm{tr}(\mathbf{S})} = \frac{\lambda_j}{\mathrm{tr}(\mathbf{S})}$$

atau

$$\frac{\sum_{j=1}^{p} \ell_{ij}^2}{\mathrm{tr}(\mathbf{R})} = \frac{\lambda_j}{p}$$

di mana λ_j adalah nilai eigen dari **S** atau **R**.

3.6.2 Algoritma *Principal Component Factoring* (PCF)

Dari penjelasan mengenai analisis faktor dengan menggunakan metode PCF dengan matriks variansi-kovariansi dapat dibuat suatu algoritma seperti berikut ini:

1. Masukkan semua data sampel dengan *p* variabel dan *n* pengamatan.
2. Hitung matriks sampel variansi-kovariansi **S**.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} & \cdots & s_{p1} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

dengan $\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=i}^{n} (\mathrm{X}_j - \bar{X})(\mathrm{X}_j - \bar{X})'$ untuk setiap *i* dan *j* = 1,2,…,*p*

3. Dari matriks **S** diperoleh nilai eigen, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ dan vektor eigen, $e_{1i}, e_{2i}, \dots, e_{mi}$ dengan *i* = 1,2,...,*p* dan *j* = 1,2,...,*m*.
4. Kemudian dapat dibuat tabel sebagai berikut :

	Faktor loading				Komunalitas	Variansi Khusus
Variabel	F_1	F_2	$\cdots$	F_m	h_i^2	ψ_i
X_1	ℓ_{11}	ℓ_{12}	$\cdots$	ℓ_{1m}	h_1^2	ψ_1
X_2	ℓ_{21}	ℓ_{22}	$\cdots$	ℓ_{2m}	h_2^2	ψ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_p	ℓ_{p1}	ℓ_{p2}	$\cdots$	ℓ_{pm}	h_p^2	ψ_p

dengan

$\ell_{ij} = \sqrt{\lambda_i}\, e_{ij}$ untuk setiap *i* = 1,2,...,*p* dan *j* = 1,2,...,*m*

$h_i^2 = \ell_{i1}^2 + \ell_{i2}^2 + \cdots + \ell_{im}^2$

$\psi_i = s_{ii} - h_i^2$

Yang merupakan estimasi dari faktor loading dan komunalitas untuk model faktor dengan faktor umum sebanyak *m*.

3.6.3 *Principal Axis Factoring* (PAF)

Dalam metode PAF digunakan estimasi awal dari $\boldsymbol{\psi}$ dan matriks $\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi}$ atau $\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi}$ untuk mendapatkan :

$$\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi} \cong \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' \qquad (3.6.3.1)$$

atau

$$\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi} \cong \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' \qquad (3.6.3.2)$$

di mana $\hat{\mathbf{L}}$ $(p\ x\ m)$ dan dihitung seperti pada (3.4.1.1) menggunakan nilai eigen dan vektor eigen dari $\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi}$ atau $\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi}$.

Dari persamaan (3.2.11) diketahui bahwa diagonal dari $\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi}$ adalah komunalitas $\hat{h}_i^2 = s_{ii}^2 - \hat{\psi}_i$, dan diagonal matriks $\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi}$ adalah komunalitas $\hat{h}_i^2 = 1 - \hat{\psi}_i$ (Nilai $\hat{\psi}_i$ dan $\hat{h}_i^2$ yang berbeda untuk $\mathbf{S}$ dan $\mathbf{R}$). Sehingga $\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi}$ atau $\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi}$ memiliki bentuk :

$$\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^2 & s_{21} & \cdots & s_{p1} \\ s_{12} & \hat{h}_2^2 & \cdots & s_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & \hat{h}_p^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^2 & r_{21} & \cdots & r_{p1} \\ r_{12} & \hat{h}_2^2 & \cdots & r_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1p} & r_{2p} & \cdots & \hat{h}_p^2 \end{bmatrix} \qquad (3.6.3.3)$$

Untuk mendapatkan estimasi komunalitas awal pada matriks $\mathbf{R}-\boldsymbol{\psi}$ digunakan persamaan :

$$\hat{h}_i^2 = 1 - \hat{\psi}_i = 1 - \frac{1}{r^{ii}} \qquad (3.6.3.4)$$

yang merupakan korelasi kuadrat antara X_i dengan $p-1$ variabel yang lain. Dengan $\mathbf{R}$ merupakan matriks tidak singular dan r^{ii} adalah diagonal ke-i dari matriks $\mathbf{R}^{-1}$. Serupa dengan (3.4.3.4) didapatkan estimasi komunalitas awal untuk matriks variansi-kovariansi $\mathbf{S}-\boldsymbol{\psi}$, yaitu :

$$\hat{h}_i^2 = s_{ii} - \frac{1}{s^{ii}} \tag{3.6.3.5}$$

di mana s^{ii} adalah diagonal ke-i dari matriks $\mathbf{S}^{-1}$.

Untuk meningkatkan nilai komunalitas, proses di atas diiterasikan hingga perubahan nilai estimasi komunalitas mencapai nilai konvergen.

Definisi 3.3:

Proporsi variansi yang diterangkan oleh faktor ke-j adalah

$$\frac{\lambda_j}{\mathrm{tr}(\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi})} = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}$$

atau

$$\frac{\lambda_j}{\mathrm{tr}(\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi})} = \frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j}$$

di mana λ_j adalah nilai eigen dari $\mathbf{S} - \boldsymbol{\psi}$ atau $\mathbf{R} - \boldsymbol{\psi}$.

3.6.4 Algoritma *Principal Axis Factoring* (PAF)

Dari penjelasan mengenai analisis faktor dengan menggunakan metode PAF dengan matriks variansi-kovariansi dapat dibuat suatu algoritma seperti berikut ini:

1. Masukkan semua data sampel dengan p variabel dan n pengamatan.
2. Hitung matriks sampel variansi-kovariansi $\mathbf{S}$.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} & \cdots & s_{p1} \\ s_{12} & s_{22} & \cdots & s_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

dengan $\boldsymbol{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=i}^{n} (\mathrm{X}_j - \bar{X})(\mathrm{X}_j - \bar{X})'$ untuk setiap i dan j = 1,2,…,p

3. Hitung nilai eigen dan vektor eigen untuk $\mathbf{S}$.
4. Hitung matriks invers variansi-kovariansi dari $\mathbf{S}$ yang dinotasikan dengan $\mathbf{S}^{-1}$ dengan $\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}$.

5. Pilih nilai awal $h_i^{2*} = s_{ii} - \frac{1}{s^{ii}}$, di mana i = 1,2,…,p dengan s^{ii} adalah nilai diagonal matriks $\mathbf{S^{-1}}$.
6. Subtitusi nilai diagonal pada matriks **S** dengan h_i^{2*} sehingga diperoleh matriks $\mathbf{S_r}$ sebagai berikut

$$\mathbf{S_r} = \begin{bmatrix} h_1^{2*} & s_{21} & \cdots & s_{p1} \\ s_{12} & h_2^{2*} & \cdots & s_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & h_p^{2*} \end{bmatrix}$$

7. Dari matriks $\mathbf{S_r}$ diperoleh nilai eigen dan vektor eigen ($\lambda_i{}^*$, $e_{ij}{}^*$) dengan i = 1,2,…,p dan j =1,2,…,m.

8. Didapat tabel :

	Faktor loading				Komunalitas
Variabel	F_1	F_2	$\cdots$	F_m	h_i^{2**}
X_1	ℓ_{11}^{2*}	ℓ_{12}^{2*}	$\cdots$	ℓ_{1m}^{2*}	h_1^{2**}
X_2	ℓ_{21}^{2*}	ℓ_{22}^{2*}	$\cdots$	ℓ_{2m}^{2*}	h_2^{2**}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
X_p	ℓ_{p1}^{2*}	ℓ_{p2}^{2*}	$\cdots$	ℓ_{pm}^{2*}	h_p^{2**}

dengan

$h_i^{2**} = \ell_{i1}^{2*} + \ell_{i2}^{2*} + \cdots + \ell_{im}^{2*}$

$\ell_{ij}^{2*} = \sqrt{\lambda_i{}^*}\, e_{ij}{}^*$, untuk setiap i = 1,2,...,p dan j = 1,2,...,m.

9. Pilih nilai h_i^{2**}terkecil hingga h_i^{2*}- h_i^{2**} merupakan nilai terbesar.
10. Bila nilai h_i^{2*} - h_i^{2**} belum mencapai konvergen maka iterasi kembali dilakukan mulai dari langkah 5 dengan mengambil nilai $h_i^{2*} = h_i^{2**}$.

11. Apabila nilai h_i^{2*} - h_i^{2**} sudah konvergen, maka diperoleh tabel akhir sebagai berikut :

	Faktor loading				Komunalitas
Variabel	F_1	F_2	$\cdots$	F_m	h_i^{2**}
X_1	ℓ_{11}^{2*}	ℓ_{12}^{2*}	$\cdots$	ℓ_{1m}^{2*}	h_1^{2**}
X_2	ℓ_{21}^{2*}	ℓ_{22}^{2*}	$\cdots$	ℓ_{2m}^{2*}	h_2^{2**}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
X_p	ℓ_{p1}^{2*}	ℓ_{p2}^{2*}	$\cdots$	ℓ_{pm}^{2*}	h_p^{2**}

Yang merupakan estimasi dari faktor loading dan komunalitas untuk model faktor dengan faktor umum sebanyak *m*.

3.7 Rotasi Faktor

Menurut Johnson dan Wichern (1956 : 504) tujuan rotasi faktor adalah untuk memudahkan interpretasi dari matriks faktor loading. Jika matriks pxm yang mengestimasi faktor loading yang diperoleh dengan suatu metode (PCF atau PAF), maka

$$\hat{\mathbf{L}}^* = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}, \text{ dengan } \mathbf{T}\mathbf{T}' = \mathbf{T}'\mathbf{T} = \mathbf{I} \tag{3.7.1}$$

adalah sebuah matriks pxm dari "rotasi" loading. Selain itu, estimasi matriks variansi-kovariansi (atau korelasi) tetap tidak berubah, karena

$$\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\psi}} = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}\mathbf{T}'\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\boldsymbol{\psi}} = \hat{\mathbf{L}}^*\hat{\mathbf{L}}^{*\prime} + \hat{\boldsymbol{\psi}} \tag{3.7.2}$$

Jika nilai loading aslinya (awal) mungkin sulit untuk diinterpretasikan, maka biasanya dilakukan rotasi sampai diperoleh bentuk yang sederhana.

Idealnya, kita lebih suka menggunakan bentuk dari loading sehingga pada suatu faktor beberapa variabel mempunyai nilai loading yang relatif besar dan nilai loading yang kecil pada variabel lainnya.

Koordinat *axes* dapat dirotasikan terhadap suatu sudut, sebut ϕ dan rotasi loading yang baru ℓ_{ij}^{2**} ditentukan berdasarkan hubungan

$$\underset{(px2)}{\ell_{ij}^{2**}} = \underset{(px2)}{\hat{\mathbf{L}}}\underset{(2x2)}{\mathbf{T}}$$

Dengan

T = $\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$, searah jarum jam

T = $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$, berlawanan arah jarum jam

Rotasi orthogonal adalah rotasi yang sesuai untuk model faktor dimana *common factors* diasumsikan independent (saling bebas). Pada rotasi orthogonal, sumbu dipertahankan tegak lurus dan yang banyak digunakan biasanya prosedur *varimax*, yaitu metode yang berusaha meminimumkan banyaknya variabel dengan muatan tinggi pada satu faktor, sehingga memudahkan interpretasi.