BAB III

METODE *MONTE CARLO*

3.1 Metode *Monte Carlo*

Metode *Monte Carlo* pertama kali ditemukan oleh Enrico Fermi pada tahun 1930-an. Metode ini diawali dengan adanya penelitian mengenai pemeriksaan radiasi dan jarak terhadap beberapa material yang akan dilewati oleh neutron. Karena data yang didapatkan tidak dapat membantu untuk menyelesaikan permasalahan, maka dibuatlah sebuah model komputasi oleh John Von Neumann dan Stanislaw Ulam. Dalam metode *Monte Carlo* dilakukan proses pengulangan dan pengacakan. Pada tahun 1977, Boyle memperkenalkan penggunaan metode *Monte Carlo* dalam menentukan harga opsi.

Pada dasarnya, metode *Monte Carlo* merupakan metode yang memberikan segala kemungkinan nilai dari suatu variabel. Metode *Monte Carlo* merupakan metode yang memanfaatkan *strong law of large number* dalam melakukan perhitungan, artinya semakin banyak variabel acak yang digunakan akan semakin baik pula pendekatan nilai eksaknya. Metode *Monte Carlo* menggunakan rata-rata sebagai penaksir nilai eksaknya. Keuntungan metode *Monte Carlo* adalah dapat dengan mudah diaplikasikan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan rumit serta dapat menghasilkan suatu selang kepercayaan untuk memeriksa keakuratan estimasi yang dilakukan.

3.2 Pemodelan Harga Saham untuk Metode *Monte Carlo*

Penentuan harga opsi dalam metode *Monte Carlo* dipengaruhi oleh harga saham dalam keadaan risiko netral $(\mu = r)$. Dalam penggunaan metode *Monte Carlo*, harga saham yang digunakan adalah harga saham yang mengikuti model *geometric Brownian motion.* Model *geometric Brownian motion* dalam keadaan risiko netral adalah sebagai berikut:

$$dS = r.S.dt + \sigma.S.dz \tag{3.1}$$

Untuk melakukan simulasi jalur pergerakan harga saham S, persamaan (3.1) dapat dipandang sebagai notasi limit dari ΔS. Berdasarkan persamaan (2.13), persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai limit dari persamaan berikut:

$$\Delta S = r.S.\Delta t + \sigma.S.\epsilon.\sqrt{\Delta t} \quad (3.2)$$

dimana Δt merupakan panjang interval yang pendek, yang merupakan hasil bagi dari waktu berlaku opsi (T) menjadi N buah interval. Dalam persamaan (3.2), ΔS dapat dipandang sebagai perubahan harga saham dari waktu t hingga $t + \Delta t$ dan S menyatakan harga saham pada waktu t. Jadi, persamaan (3.2) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = r\big(S(t)\big)\Delta t + \sigma\big(S(t)\big).\epsilon.\sqrt{\Delta t} \quad (3.3)$$

dengan ϵ berdistribusi normal baku $(\epsilon \sim N(0,1))$. Berdasarkan persamaan (3.3), harga saham pada waktu Δt dapat dihitung berdasarkan harga saham awal, harga saham pada waktu $2\Delta t$ dapat dihitung berdasarkan harga saham pada waktu Δt, dan seterusnya. Sehingga, untuk mendapatkan harga saham pada waktu T dibutuhkan suatu kontruksi jalur dari N buah sampel acak yang berdistribusi normal baku (ilustrasi dapat dilihat pada lampiran E.1).

Namun pada kenyataannya, simulasi pergerakan harga saham akan memberikan hasil yang lebih akurat apabila menggunakan nilai lognormal (ln) dari harga saham (Hull, 2009:420). Berdasarkan sifat lognormal (persamaan (2.19)), pergerakan lognormal dari harga saham dalam keadaan risiko netral dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$d(\ln S) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \quad (3.4)$$

Berdasarkan persamaan (2.20), persamaan (3.4) merupakan notasi limit dari persamaan berikut:

$$\Delta(\ln S) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (3.5)$$

dengan Δt sangat kecil dan $\epsilon \sim N(0,1)$. Dalam persamaan (3.5), $\Delta(\ln S)$ dapat dipandang sebagai perubahan nilai lognormal dari harga saham pada waktu t hingga $t + \Delta t$. Sehingga persamaan (3.5) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{3.6}$$

Dari persamaan (3.6) akan diperoleh persamaan berikut:

$$S(t+\Delta t) = S(t).\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) menyatakan bahwa apabila harga saham pada suatu waktu (t) telah diketahui maka harga saham pada waktu berikutnya $(t+\Delta t)$ dapat ditentukan. Sehingga, penentuan harga saham dilakukan berdasarkan harga saham sebelumnya. Pada persamaan (3.7), harga saham pada waktu t dapat dinyatakan sebagai harga saham ke-i dan harga saham pada waktu $t+\Delta t$ dapat dinyatakan sebagai harga saham ke-$i+1$, dengan $i = 0, 1, 2, \ldots.$ Sehingga persamaan (3.7) dapat dinyatakan pula sebagai:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i).\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right]; i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

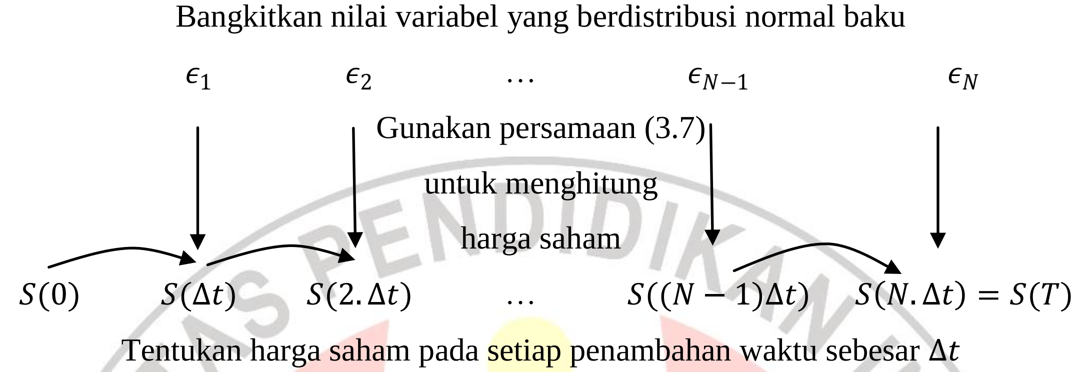
Selain melakukan perhitungan harga saham berdasarkan harga saham sebelumnya, perhitungan harga saham juga dapat dilakukan berdasarkan harga saham awal. Untuk melakukan perhitungan harga saham pada waktu T berdasarkan harga saham awal, pada persamaan (3.6) substitusikan $t = 0$ dan $\Delta t = T$. Sehingga berdasarkan persamaan (3.6) akan diperoleh persamaan berikut:

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\epsilon\sqrt{T} \tag{3.9}$$

Dari persamaan (3.9) akan diperoleh persamaan berikut:

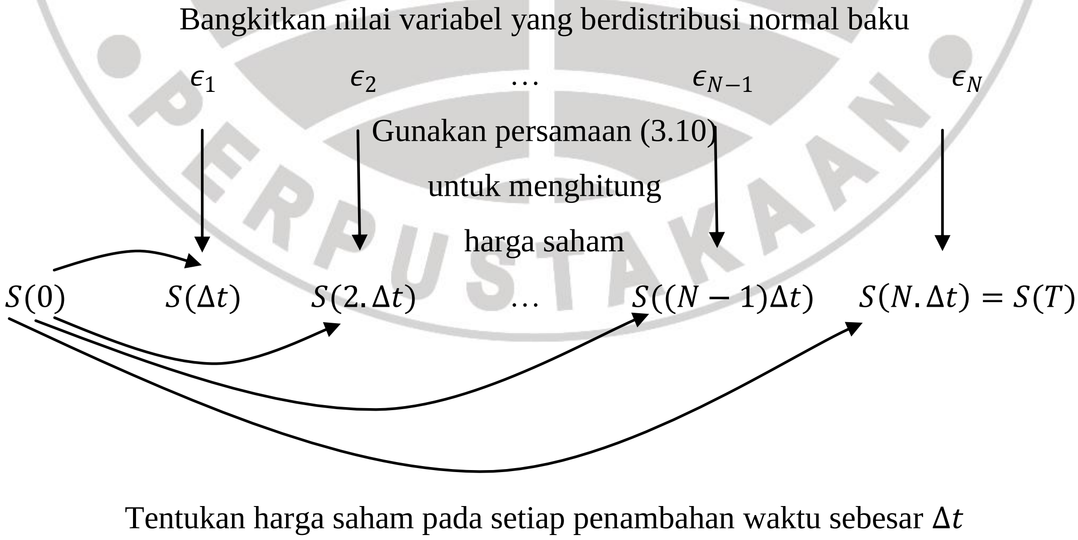
$$S_T = S_0.\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\epsilon\sqrt{T}\right) \tag{3.10}$$

Persamaan (3.8) menyatakan bahwa harga saham saat ini dipengaruhi oleh harga saham sebelumnya. Apabila waktu pergerakan harga saham dipartisi menjadi N buah $\left(\Delta t = \frac{T}{N}\right)$, untuk mendapatkan harga saham pada waktu T diperlukan perhitungan harga saham sebanyak N buah. Perhitungan yang perlu dilakukan adalah perhitungan $S(\Delta t)$ berdasarkan $S(0)$, perhitungan $S(2.\Delta t)$ berdasarkan $S(\Delta t)$, hingga perhitungan $S(T) = S(N.\Delta t)$ berdasarkan $S\big((N-1).\Delta t\big)$. Ilustrasi untuk penentuan harga saham pada saat T berdasarkan harga saham sebelumnya untuk metode *Monte Carlo* dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 3.1.
Ilustrasi Penentuan Harga Saham Saat T Berdasarkan Harga Saham Sebelumnya

Selain berdasarkan harga saham sebelumnya, penentuan harga saham untuk metode Monte Carlo dapat juga dilakukan menggunakan persamaan (3.10). Apabila dilakukan partisi waktu sebanyak N buah pergerakan harga saham pada partisi-partisi waktunya serta pada waktu T dapat dihitung menggunakan harga saham awal. Ilustrasi pergerakan harga saham pada partisi waktu serta pada waktu T berdasarkan harga saham awal dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 3.2.
Ilustrasi Penentuan Harga Saham Saat Partisi-Partisi Waktu
Berdasarkan Harga Saham Awal

3.3 Penentuan Harga Opsi Eropa dengan Metode *Monte Carlo*

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, *pay-off* opsi *call* Eropa dan *pay-off* opsi *put* Eropa dapat ditentukan melalui persamaan berikut ini:

$$C = \text{maks}\{S_T - K, 0\} \text{ dan } P = \text{maks}\{K - S_T, 0\}.$$

Karena metode *Monte Carlo* menggunakan rata-rata untuk menaksir nilai eksaknya, maka diperlukan data *pay-off* opsi Eropa. Data *pay-off* opsi Eropa tersebut didapatkan dengan melakukan pengambilan sampel secara acak dan menghitung harga saham pada saat T (S_T). Setelah melakukan perhitungan *pay-off* opsi Eropa untuk semua kemungkinan harga saham pada waktu T, dilakukan perhitungan rata-rata dari data *pay-off* opsi Eropa. Apabila pengambilan sampel secara acak dilakukan sebanyak M buah, C_i menyatakan *pay-off* dari opsi *call* Eropa dan P_i menyatakan *pay-off* opsi *put* Eropa yang diperoleh berdasarkan kemungkinan harga saham pada waktu T, maka taksiran dari *pay-off* opsi *call* Eropa dan opsi *put* Eropa adalah sebagai berikut:

1. Opsi *call* Eropa

$$\hat{C} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} C_i\,;\; M = 1, 2, 3, \dots \tag{3.11}$$

2. Opsi *put* Eropa

$$\hat{P} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_i\,;\; M = 1, 2, 3, \dots \tag{3.12}$$

Berdasarkan *strong law of large number*, kedua taksiran *pay-off* akan konvergen pada *pay-off* opsi Eropa. Persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) merupakan taksiran harga opsi Eropa pada waktu T.

3.4 Rekursif *Backward*

Pada penentuan harga opsi Eropa dengan metode *Monte Carlo*, harga opsi yang didapatkan merupakan harga opsi Eropa pada waktu jatuh tempo $(t = T)$. Oleh karena itu, untuk mengetahui taksiran harga opsi Eropa pada saat ini $(t = 0)$ perlu dilakukan rekursif *backward*. Rekursif *backward* merupakan suatu prosedur perhitungan harga opsi pada waktu $t = 0$ yang dilakukan berdasarkan harga opsi pada waktu $t = T$.

Pada asumsi keadaan risiko netral, apabila suatu investasi yang berkembang berdasarkan *continue compounded interest rate*, r, maka nilai investasinya akan bertambah sebesar e^{rt} sepanjang waktu t. Sebaliknya, apabila pada waktu t, suatu investasi telah berkembang berdasarkan *continue compounded interest rate*, r, maka pada waktu 0 nilai investasinya akan berkurang sebesar e^{-rt}. Sehingga, *pay-off* pada waktu $T - \Delta t$ dapat dihitung berdasarkan *pay-off* pada waktu T yang dikalikan dengan $e^{-r\Delta t}$ dengan r merupakan suku bunga bebas risiko dan Δt merupakan periode waktunya. Begitu pula dengan *pay-off* pada waktu $T - 2\Delta t$, *pay-off* $T - 2\Delta t$ dapat dihitung berdasarkan *pay-off* pada waktu $T - \Delta t$ yang dikalikan dengan $e^{-r\Delta t}$. Pada akhirnya, akan diperoleh harga opsi pada waktu $t = 0$. Ilustrasi perhitungan *pay-off* dengan rekursif *backward* dengan periode waktu $\Delta t = \frac{T}{N}$ adalah

Waktu

$$
\begin{array}{cccccc}
0 & \Delta t & 2\Delta t & \dots & (N-1)\Delta t & N.\Delta t = T \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \textit{Pay-off} & \downarrow & \downarrow \\
C_0 & C_1 = C_{\Delta t} & C_2 = C_{2\Delta t} & \dots & C_{N-1} = C_{T-\Delta t} & C_N = C_T \\
 & & & \dots & &
\end{array}
$$

Kalikan $e^{-r\Delta t}$ Kalikan $e^{-r\Delta t}$ Kalikan $e^{-r\Delta t}$

Gambar 3.3.
Ilustrasi Rekursif *Backward*

Selain menggunakan perhitungan rekursif *backward* berdasarkan N buah partisi waktu $\left(\Delta t = \frac{T}{N}\right)$, rekursif *backward* juga dapat dihitung secara langsung untuk *pay-off* pada waktu $t = 0$. Untuk mendapatkan *pay-off* pada waktu $t = 0$, dilakukan perhitungan berdasarkan *pay-off* pada waktu T yang dikalikan dengan e^{-rT} dimana r merupakan suku bunga bebas risiko dan T merupakan periode waktunya. Jadi, penaksiran untuk harga opsi Eropa dengan metode *Monte Carlo* pada saat $t = 0$ adalah sebagai berikut (perhitungan standar *error* dapat dilihat pada lampiran E.2):

1. Opsi *call* Eropa

$$\hat{C}_0 = e^{-rT}.\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} C_i\ ;\ M = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

dengan standar *error* dari harga opsi *call* adalah

$$e^{-rT}\,\frac{\hat{\sigma}_c}{\sqrt{M}} \tag{3.14}$$

2. Opsi *put* Eropa

$$\hat{P}_0 = e^{-rT}.\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_i\ ;\ M = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.15}$$

dengan standar *error* dari harga opsi *put* adalah

$$e^{-rT}\,\frac{\hat{\sigma}_P}{\sqrt{M}} \tag{3.16}$$

Karena standar *error* dari estimasi harga opsi telah diketahui, maka dapat dibuat suatu interval kepercayaan untuk harga opsi. Interval kepercayaan $(1-\alpha)\%$ untuk harga opsi adalah:

1. Opsi *call* Eropa

$$\hat{C}_0 - N_{\left(\frac{1}{2}(1-\alpha)\%\right)}\left(e^{-rT}\,\frac{\hat{\sigma}_C}{\sqrt{M}}\right) < C < \hat{C}_0 + N_{\left(\frac{1}{2}(1-\alpha)\%\right)}\left(e^{-rT}\,\frac{\hat{\sigma}_C}{\sqrt{M}}\right)$$

dengan

$$\hat{\sigma}_C = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(C_i - \hat{C}\right)^2}\ \text{dan}\ \hat{C} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} C_i$$

2. Opsi *put* Eropa

$$\hat{P}_0 - N_{\left(\frac{1}{2}(1-\alpha)\%\right)}\left(e^{-rT}\,\frac{\hat{\sigma}_P}{\sqrt{M}}\right) < P < \hat{P}_0 + N_{\left(\frac{1}{2}(1-\alpha)\%\right)}\left(e^{-rT}\,\frac{\hat{\sigma}_P}{\sqrt{M}}\right)$$

dengan

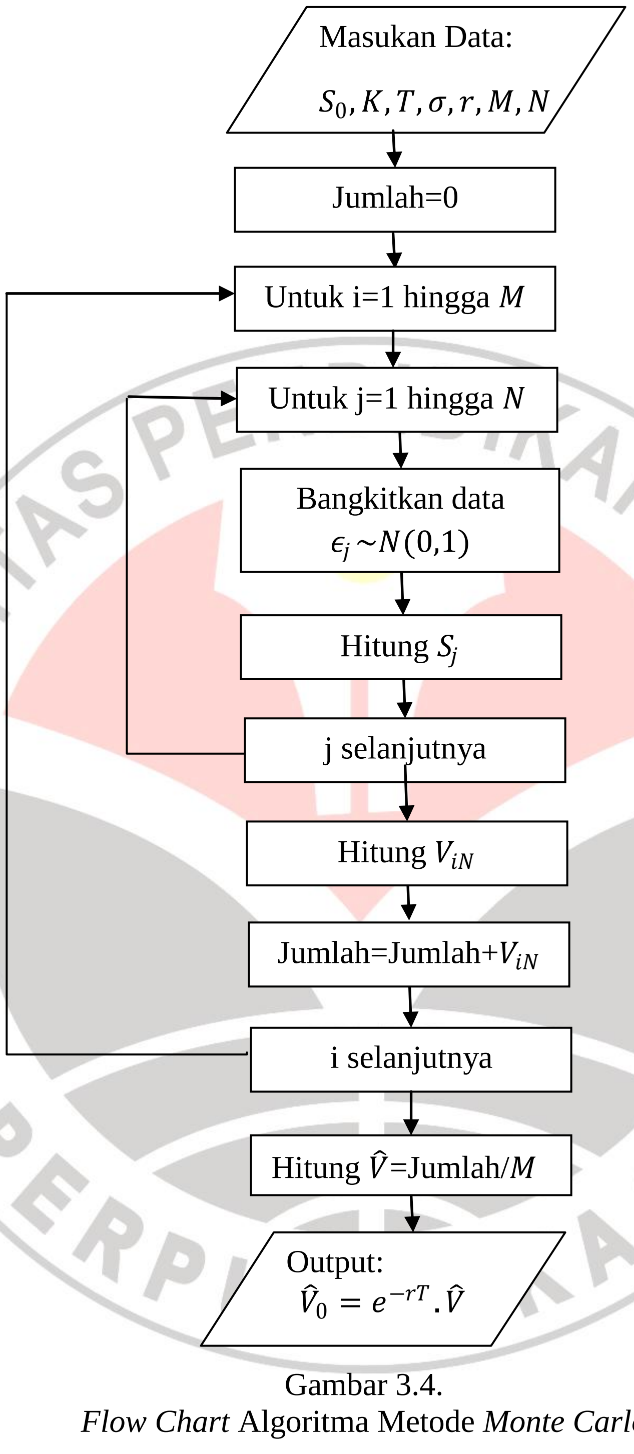
$$\hat{\sigma}_P = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}\left(P_i - \hat{P}\right)^2}\ \text{dan}\ \hat{P} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_i.$$

3.5 Algoritma Penentuan Harga Opsi Eropa dengan Metode *Monte Carlo*

Dalam menentukan harga opsi Eropa, terdapat beberapa variabel yang nilainya perlu diketahui dan ditentukan pada saat pembuatan opsi (t=0). Variabel yang perlu diketahui nilai-nilainya terlebih dahulu adalah harga saham awal (S_0), *strike price* (K), batas waktu jatuh tempo opsi (T), volatilitas (σ), suku bunga bebas resiko (r), jumlah pembangkitan data (M), serta jumlah partisi waktu (N). Langkah-langkah penentuan harga opsi Eropa dengan menggunakan metode *Monte Carlo* adalah sebagai berikut:

1. Tentukan N buah sampel acak dari variabel yang berdistribusi normal baku.
2. Tentukan data harga saham yang dibangkitkan menggunakan persamaan (3.10).
3. Tentukan *pay-off* opsi berdasarkan harga saham pada waktu T (V).
4. Ulangi langkah 1 hingga 4 hingga terdapat M buah *pay-off* opsi Eropa dan M buah harga saham.
5. Hitung taksiran harga opsi Eropa dengan cara menghitung rata-rata dari M buah *pay-off* opsi Eropa $(\hat{V})$.
6. Lakukan rekursif *backward* hingga mendapatkan harga opsi pada waktu 0 $(\hat{V}_0)$.

Dari langkah-langkah di atas dapat dibuat suatu *flow chart* untuk algoritma metode *Monte Carlo*, yaitu sebagai berikut:



Gambar 3.4.
Flow Chart Algoritma Metode *Monte Carlo*