BAB III
METODE *MONTE CARLO*

3.1 Metode *Monte Carlo*

Metode *Monte Carlo* adalah algoritma kom*put*asi untuk mensimulasikan berbagai perilaku sistem fisika dan matematika. Penggunaan klasik metode ini adalah untuk mengevaluasi integral definit, terutama integral multidimensi dengan syarat dan batasan yang rumit. Metode *Monte Carlo* pertama kali ditemukan oleh Enrico Fermi pada tahun 1930-an. Metode ini diawali dengan adanya penelitian mengenai pemeriksaan radiasi dan jarak terhadap beberapa material yang akan dilewati oleh neutron. Karena data yang didapatkan tidak dapat membantu untuk menyelesaikan permasalahan, maka dibuatlah sebuah model kom*put*asi oleh John Von Neumann dan Stanislaw Ulam. Dalam metode *Monte Carlo* dilakukan proses pengulangan dan pengacakan. Pada tahun 1977, Boyle memperkenalkan penggunaan metode *Monte Carlo* dalam menentukan harga opsi.

Metode Monte Carlo sangat penting dalam fisika kom*put*asi dan bidang terapan lainnya, dan memiliki aplikasi yang beragam mulai dari perhitungan kromodinamika kuantum esoterik hingga perancangan aerodinamika. Metode ini terbukti efisien dalam memecahkan persamaan diferensial integral medan radians, sehingga metode ini digunakan dalam perhitungan iluminasi global yang menghasilkan gambar-gambar fotorealistik model tiga dimensi, dimana diterapkan dalam video games, arsitektur, perancangan, film yang dihasilkan oleh kom*put*er, efek-efek khusus dalam film, bisnis, ekonomi, dan bidang lainnya.

Melihat dari cara kerjanya metode *Monte Carlo* merupakan metode yang memberikan segala kemungkinan nilai dari suatu variabel. Metode *Monte Carlo* merupakan metode yang memanfaatkan *strong law of large number* dalam melakukan perhitungan, artinya semakin banyak variabel acak yang digunakan akan semakin baik pula pendekatan nilai eksaknya. Metode *Monte Carlo* menggunakan rata-rata sebagai penaksir nilai eksaknya. Karena algoritma ini memerlukan pengulangan (repetisi) dan perhitungan yang amat kompleks, metode

Monte Carlo pada umumnya dilakukan menggunakan kom*put*er, dan memakai berbagai teknik simulasi kom*put*er. Algoritma Monte Carlo adalah metode Monte Carlo numerik yang digunakan untuk menemukan solusi problem matematis (yang dapat terdiri dari banyak variabel) yang susah dipecahkan, misalnya dengan kalkulus integral, atau metode numerik lainnya. Keuntungan metode *Monte Carlo* adalah dapat dengan mudah diaplikasikan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan rumit serta dapat menghasilkan suatu selang kepercayaan untuk memeriksa keakuratan taksiran yang dilakukan.

3.2 Pemodelan Harga Saham untuk Metode *Monte Carlo*

Pada penerapan metode *Monte Carlo* untuk menentukan harga opsi dipengaruhi oleh harga saham dalam keadaan risiko netral $(\mu = r)$. Harga saham yang digunakan adalah harga saham yang mengikuti model *geometric Brownian motion*. Model *geometric Brownian motion* dalam keadaan risiko netral adalah sebagai berikut:

$$dS = r.S.dt + \sigma.S.dz \tag{3.1}$$

Untuk melakukan simulasi jalur pergerakan harga saham S, persamaan (3.1) dapat dipandang sebagai notasi limit dari ΔS. Berdasarkan persamaan (2.13), persamaan (3.1) dapat dinyatakan sebagai limit dari persamaan berikut:

$$\Delta S = r.S.\Delta t + \sigma.S.\epsilon.\sqrt{\Delta t} \tag{3.2}$$

dimana Δt merupakan panjang interval yang pendek, yang merupakan hasil bagi dari waktu berlaku opsi (T) menjadi N buah interval. Dalam persamaan (3.2), ΔS dapat dipandang sebagai perubahan harga saham dari waktu t hingga $t + \Delta t$ dan S menyatakan harga saham pada waktu t. Jadi, persamaan (3.2) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$S(t + \Delta t) - S(t) = r\big(S(t)\big)\Delta t + \sigma\big(S(t)\big).\epsilon.\sqrt{\Delta t} \tag{3.3}$$

dengan ϵ berdistribusi normal baku $(\epsilon \sim N(0,1))$. Berdasarkan persamaan (3.3), harga saham pada waktu Δt dapat dihitung berdasarkan harga saham awal, harga saham pada waktu $2\Delta t$ dapat dihitung berdasarkan harga saham pada waktu Δt, dan seterusnya. Sehingga, untuk mendapatkan harga saham pada waktu T

dibutuhkan suatu konstruksi jalur dari N buah sampel acak yang berdistribusi normal baku (ilustrasi dapat dilihat pada lampiran E.1).

Namun pada kenyataannya, simulasi pergerakan harga saham akan memberikan hasil yang lebih akurat apabila menggunakan nilai lognormal (ln) dari harga saham (Hull, 2009:420). Berdasarkan sifat lognormal (persamaan (2.19)), pergerakan lognormal dari harga saham dalam keadaan risiko netral dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$d(\ln(S)) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \tag{3.4}$$

Berdasarkan persamaan (2.20), persamaan (3.4) merupakan notasi limit dari persamaan berikut:

$$\Delta(\ln(S)) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{3.5}$$

dengan Δt sangat kecil dan $\epsilon \sim N(0,1)$. Dalam persamaan (3.5), $\Delta(\ln(S))$ dapat dipandang sebagai perubahan nilai lognormal dari harga saham pada waktu t hingga $t + \Delta t$. Sehingga persamaan (3.5) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\ln\big(S(t + \Delta t)\big) - \ln\big(S(t)\big) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{3.6}$$

Dari persamaan (3.6) akan diperoleh persamaan berikut:

$$S(t + \Delta t) = S(t).\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right] \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) menyatakan bahwa apabila harga saham pada suatu waktu (t) telah diketahui, maka harga saham pada waktu berikutnya $(t + \Delta t)$ dapat ditentukan. Sehingga, penentuan harga saham dilakukan berdasarkan harga saham sebelumnya. Pada persamaan (3.7), harga saham pada waktu t dapat dinyatakan sebagai harga saham ke-i dan harga saham pada waktu $t + \Delta t$ dapat dinyatakan sebagai harga saham ke-$i + 1$, dengan $i = 0, 1, 2, \ldots$. Sehingga persamaan (3.7) dapat dinyatakan pula sebagai:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i).\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}\right]; i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.8}$$

Selain melakukan perhitungan harga saham berdasarkan harga saham sebelumnya, perhitungan harga saham juga dapat dilakukan berdasarkan harga saham awal. Untuk melakukan perhitungan harga saham pada waktu T berdasarkan harga saham awal, pada persamaan (3.6) substitusikan $t = 0$ dan $\Delta t = T$. Sehingga berdasarkan persamaan (3.6) akan diperoleh persamaan berikut:

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\epsilon\sqrt{T} \qquad (3.9)$$

Dari persamaan (3.9) akan diperoleh persamaan berikut:

$$S_T = S_0.\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\epsilon\sqrt{T}\right) \qquad (3.10)$$

Persamaan (3.8) menyatakan bahwa harga saham saat ini dipengaruhi oleh harga saham sebelumnya. Apabila waktu pergerakan harga saham dipartisi menjadi N buah $\left(\Delta t = \frac{T}{N}\right)$, untuk mendapatkan harga saham pada waktu T diperlukan perhitungan harga saham sebanyak N buah. Perhitungan yang perlu dilakukan adalah perhitungan $S(\Delta t)$ berdasarkan $S(0)$, perhitungan $S(2.\Delta t)$ berdasarkan $S(\Delta t)$, hingga perhitungan $S(T) = S(N.\Delta t)$ berdasarkan $S\big((N-1).\Delta t\big)$. Ilustrasi untuk penentuan harga saham pada saat T berdasarkan harga saham sebelumnya untuk metode *Monte Carlo* dapat dilihat pada gambar berikut ini:

Bangkitkan nilai variabel yang berdistribusi normal baku

ϵ_1 $\quad$ ϵ_2 $\quad$ … $\quad$ ϵ_{N-1} $\quad$ ϵ_N

Gunakan persamaan (3.7)
untuk menghitung
harga saham

$S(0)$ $\quad$ $S(\Delta t)$ $\quad$ $S(2.\Delta t)$ $\quad$ … $\quad$ $S((N-1)\Delta t)$ $\quad$ $S(N.\Delta t) = S(T)$

Tentukan harga saham pada setiap penambahan waktu sebesar Δt

Gambar 3.1.

Ilustrasi Penentuan Harga Saham Saat T Berdasarkan Harga Saham Sebelumnya

Selain berdasarkan harga saham sebelumnya, penentuan harga saham untuk metode Monte Carlo dapat juga dilakukan dalam menggunakan persamaan (3.10). Apabila dilakukan partisi waktu sebanyak N buah pergerakan harga saham pada partisi-partisi waktunya serta pada waktu T dapat dihitung menggunakan harga saham awal. Ilustrasi pergerakan harga saham pada partisi waktu serta pada waktu T berdasarkan harga saham awal dapat dilihat pada gambar berikut ini:

Bangkitkan nilai variabel yang berdistribusi normal baku

ϵ_1 ϵ_2 … ϵ_{N-1} ϵ_N

Gunakan persamaan (3.10)
untuk menghitung
harga saham

$S(0)$ $S(\Delta t)$ $S(2.\Delta t)$ … $S((N-1)\Delta t)$ $S(N.\Delta t) = S(T)$

Tentukan harga saham pada setiap penambahan waktu sebesar Δt

Gambar 3.2.

Ilustrasi Penentuan Harga Saham Saat Partisi-Partisi Waktu

Berdasarkan Harga Saham Awal

3.3 Penentuan Harga Opsi Amerika dengan Metode *Monte Carlo*

Pay-off opsi *call* Amerika dan *pay-off* opsi *put*Amerika dapat ditentukan melalui persamaan berikut ini:

$$C = \text{maks}\{S_T - K, 0\} \text{ dan } P = \text{maks}\ \{K - S_T, 0\}.$$

Metode *Monte Carlo* menggunakan rata-rata untuk menaksir nilai eksaknya, maka diperlukan data *pay-off* opsi Amerika. Data *pay-off* opsi Eropa tersebut didapatkan dengan melakukan pengambilan sampel secara acak dan menghitung harga saham pada saat T (S_T). Setelah melakukan perhitungan *pay-off* opsi Amerika untuk semua kemungkinan harga saham pada waktu T, dilakukan perhitungan rata-rata dari data *pay-off* opsi Amerika. Apabila pengambilan sampel secara acak dilakukan sebanyak M buah, C_i menyatakan *pay-off* dari opsi *call* Amerika dan P_i menyatakan *pay-off* opsi *put* Amerika yang diperoleh berdasarkan kemungkinan harga saham pada waktu T, maka taksiran dari *pay-off* opsi *call* Amerika dan opsi *put* Amerika akan dijelaskan masing-masing pada subbab selanjutnya.

3.3.1 Penentuan Harga Opsi *Call* Amerika dengan Metode *Monte Carlo*

Penentuan opsi call amerika sama halnya dengan opsi call Eropa.. Sebuah *call* option Amerika memberikan hak kepada pemegangnya (tetapi tidak berkewajiban) untuk membeli dari penulis aset ditentukan untuk harga yang ditentukan di setiap waktu antara tanggal mulai dan tanggal kadaluwarsa ditentukan di masa depan.

$$\hat{C} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} C_i\,;\; M = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.11}$$

Untuk mendapatkan *pay-off* pada waktu $t = 0$, dilakukan perhitungan berdasarkan *pay-off* pada waktu T yang dikalikan dengan e^{-rT} dimana r merupakan suku bunga bebas risiko dan T merupakan periode waktunya. Jadi, penaksiran untuk harga opsi Amerika akan sama dengan opsi Eropa ketika menggunakan metode *Monte Carlo* pada saat $t = 0$ adalah sebagai berikut (perhitungan standar *error* dapat dilihat pada lampiran xxx):

Opsi *call* Eropa

$$\hat{C}_0 = e^{-rT}.\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} C_i\,;\; M = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.12}$$

dengan standar *error* dari harga opsi *call* adalah

$$e^{-rT}\,\frac{\hat{\sigma}_c}{\sqrt{M}} \tag{3.13}$$

3.3.2 Nilai Batas Bebas Opsi *Put* Amerika

Syarat batas bawah untuk opsi *put* Amerika adalah

$$P(S,t) \geq (K - S)^{+}, \forall(S,t) \tag{3.14}$$

Kondisi ini dengan alasan jika $0 = V = K - S$ maka seseorang dapat membeli opsi dan opsi segera dieksekusi dengan menjual sebesar K. Sehingga pembeli memperoleh pendapatan tidak berisiko sebesar $K - S - P > 0$.

Misalkan $S_f(t)$ menyatakan harga kritis saham sedemikian sehingga opsi akan optimal, apabila *exercise* dilakukan lebih awal dan $0 < S_f(t) < K$. Jika $S \leq S_f(t)$ maka *exercise* dilakukan lebih awal, namun jika $S_f(t) < S$ maka opsi tidak akan di *exercise*. Dengan demikian $P(S,t) \geq (K-S)^+, \forall(S,t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$P(S,t)\begin{cases} = (K-S) & ; S \leq S(t) \\ > (K-S)^+ & ; S > S(t) \end{cases} \tag{3.15}$$

Karena $S_f(t)$ tidak diketahui maka penyelesaian terhadap $P(S,t)$ ini disebut masalah nilai batas bebas (*free boundary- value problem*), sehinnga ketika $S < S_f(t) < K$ nilai $P(S,t) = K - S$ dan P harus memenuhi $\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 s} - rV < 0$ sehingga nilai opsi *put* Amerika menjadi

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial^2 s} - rP < 0 \tag{3.16}$$

Pada saat $S_f(t) < S$, nilai $P(S,t) > (K-S)^+$, serta V harus memenuhi $\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial^2 s} - rV = 0$ sehingga nilai opsi *put* Amerika menjadi

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial^2 s} - rP = 0 \tag{3.17}$$

Dengan demikian masalah nilai batas dari opsi Amerika adalah sebagai berikut:

Untuk $S < S_f(t)$ $\quad \frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial^2 s} - rP < 0$

$$P(S,t) = K - S$$

Untuk $S > S_f(t)$ $\quad \frac{\partial P}{\partial t} + rS\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial^2 s} - rP = 0$

$$P(S,t) > (K-S)^+$$

Syarat batas $\begin{cases} \lim_{s\to\infty} P(s,t) = 0 \\ \lim_{s\to 0} P(s,t) = K \end{cases}$ dan

Syarat akhir menurut Pauly (2004)

$$P(S(t),t) = (K - S(t))^{+} \tag{3.18}$$

Untuk harga saham S menuju tak hingga, nilai intrinsiknya memenuhi:

$$\lim_{S\to\infty} maks\{K - S, 0\} = 0$$

Dengan demikian dalam kondisi ini investor lebih memilih menjual kontrak opsi. Karena tidak diperbolehkannya tindakan arbitrase, maka untuk harga saham S yang semakin besar, nilai opsi Amerika harus sama dengan nilai intrinsiknya. Dengan nilai intrinsik menuju n ol pada saat S menuju tak hingga, maka nilai opsi *put* Amerika harus memenuhi

$$\lim_{S\to\infty} P(S,t) = 0$$

Selanjutnya jika $S = 0$, maka nilai intrinsiknya $maks\{K - S, 0\}$ akan bernilai K, sehingga dalam kondisi ini investor akan melakukan eksercise pada kontrak opsi. Agar tidak terjadi arbitrase, maka harga opsi *put* Amerika harus sama dengan nilai intrinsiknya $P(0,t) = K$

3.3.3 Martingale

Misalkan proses stokastik $X(t)$ dengan $t \in [0,T]$ didefinisikan pada ruang probabilitas (Ω, f, Q). Misalkan $\{f(t), t \in [0,\infty]\}$ menyatakan kumpulan informasi yang disebut filtrasi. Jika nilai $X(t)$ termasuk dalam himpunan $f(t), \forall t \geq 0$, maka dapat dikatan bahwa $X(t)$ adalah $f(t)$. Dengan kata lain nilai $X(t)$ akan diketahui dengan diberikan himpunan informasi $f(t)$.

Definisi 3.1 (Martingale)

Menurut Neftc (2000), proses stokastik $\{X(t), t \in [0,\infty]\}$ dikatakan *martingale* yang berdasarkan filtrasi $f(t)$dan peluang P, jika $\forall t \geq 0$

i. $X(t)$ diketahui, dengan diberikan filtrasi $(f(t)|X(t))$ adalah $f(t) - adapted$.

ii. $E[X(t)] < \infty$

iii. $E[X(T)] = E[X(t)|f(t)] = X(t)$ untuk $\forall t < T$, dengan peluang 1.

3.3.4 Nilai Intrinsik Opsi *Put* Amerika

Opsi Amerika yang memilki waktu jatuh tempo pada waktu T , tidak harus dieksekusi pada saat waktu jatuh tempo T seperti pada opsi Eropa tetapi dapat dieksekusi pada rentang waktu $0 < t \leq T$. Karena dalam kontrak opsi Amerika terdapat keleluasaan dalam waktu mengeksekusi, maka opsi dapat dieksekusi kapan saja sejak kontrak dibuat sampai dengan jatuh tempo. Oleh karena hal ini, penentuan nilai opsi Amerika menjadi hal yang menarik yang hingga saat ini masih banyak diteliti oleh para peneliti terdahulu.

Seperti halnya Opsi Eropa, opsi Amerika pun memiliki keadaan-keadaan dimana investor mengalami kerugian dan mengalami keuntungan ataupun tidak mengalami kerugian dan keuntungan(dalam hal ini disebut impas). Dalam opsi *put* Amerika keadaan dimana opsi memberikan kerugian jika opsi segera dieksekusi disebut *out the money*. Sedangkan keadaan dimana opsi yang tidak memberikan keuntungan maupun kerugian disebut *at the money*.

Nilai maksimum antara nol dan selisih harga eksekusi dengan harga saham pada waktu sebelum jatuh tempo disebut dengan nilai intrinsik. Pada waktu jatuh tempo, nilai intrinsiknya disebut nilai *pay-off*. Misalkan S adalah harga saham dan merupakan harga eksekusi (*strike price*). Apabila $S < K$, tindakan eksekusi akan memberikan keuntungan sebesar $K - S$, maka kontrak opsi *put* berada pada posisi *in the money*. Apabila $S = K$, maka tindakan eksekusi akan memberikan keuntungan besar nol, sehinnga kontrak opsi *put* berada pada posisi *at the money*. Dan ketika $S > K$ tindakan eksekusi tidak meberikan keuntungan, sehinnga kontrak opsi *put* tidak memberikan keuntungan. Untuk $S > K$, didefinisikan nilai intrinsiknya opsi *put* adalah nol. Dengan demikian, untuk setiap $t \in [0, t)$, nilai intrinsik opsi *put* dirumuskan sebagai:

$$E_p = maks\{K - S, 0\}$$

Misalkan nilai opsi *put* Amerika dinotasikan sebagai $P(S,t)$ untuk $S \in [0,\infty)$ dan $t \in [0,t)$ dengan T menyatakan waktu jatuh tempo. Hubungan nilai opsi *put* $P(S,t)$ dengan nilai intrinsik terdiri dari tiga kemungkinan:

i. Nilai opsi *put* Amerika $P(S,t)$ memenuhi ketaksamaan:

$$P(S,t) < \ maks\{K - S, 0\} \tag{3.19}$$

Jika investor membeli kontrak opsi tersebut dengan harga $P(S,t)$ dan kontrak opsi segara dieksekusi, maka investor akan memperoleh keuntungan bebas resiko sebesar $n = \ K - S - P(S,t)$ hal ini berarti bahwa terdapat peluang terjadinya tindakan arbitrase, maka kemungkinan pertama tidak berlaku.

ii. Nilai opsi *put* Amerika memenuhi persamaan:

$$P(S,t) = \ maks\{K - S, 0\} \tag{3.20}$$

Maka akan terdapat dua reaksi investor tidak tertarik untuk membeli opsi karena investasi impas atau investor tertarik untuk membeli opsi karena ada harapan bahwa nilai pengembalian opsi return pada saat opsi dieksekusi akan meningkat. Untuk mengantisipasi kedua kemungkinan tersebut, maka investor pemegang kontrak opsi lebih memilih mengeksekusi opsinya. Dengan demikian, persamaan memberikan keadaan bagi investor untuk mengeksekusi kontrak opsi *put* Amerika.

iii. Nilai opsi *put* Amerika memenuhi ketaksamaan:

$$P(S,t) > \ maks\{K - S, 0\} \tag{3.21}$$

Hal ini berarti bahwa tindakan eksekusi opsi akan merugi karena nilai keuntungan opsi lebih kecil dari pada nilai kontrak opsinya. Akibatnya investor pemegang kontrak opsi lebih kecil dari pada nilai kontrak opsinya. Akibatnya investor pemegang kontrak opsi lebih memilih untuk menjual kontrak opsinya dengan harga $P(S,t)$ kepada pihak lain. Dengan demikian ketaksamaan $P(S,t) > \ maks\{K - S, 0\}$ menghasilkan aksi jual kontrak opsi. Sehingga dapat disimpulkan bahwa harga opsi *put* Amerika harus memenuhi ketaksamaan:

$$P(S,t) \geq \ maks\{K - S, 0\} \tag{3.22}$$

Misalkan harga opsi *put* Amerika dinotasikan dengan $P(S,t\ )$, untuk $S \in \ [0,\infty)$ dan $t \in \ [0,T\ ]$, dengan T menyatakan waktu jatuh tempo. Harga opsi *put*

Amerika $P(S,t)$ merupakan fungsi kontinu yang memetakan (S,t) ∈ [0,∞) × [0, T], ke bilangan real tak negatif. Karena nilai opsi *put* Amerika $P(S,t)$ kontinu dan berlaku $P(S,t) \geq maks\{K-S,0\}$, maka untuk setiap $t \in [0,T]$ terdapat suatu harga saham tertentu yang menjadi nilai batas antara selang harga saham yang merupakan saat investor mengeksekusi kontrak opsi dan selang harga saham lainnya yang merupakan saat investor menjual kontrak opsi. Harga saham yang menjadi batas pemisah kedua selang ini disebut dengan nilai kritis untuk eksekusi opsi. Misalkan nilai kritis dituliskan sebagai I_t, untuk $t \in [0,T]$ yang didefinisikan oleh:

$$I_t = maks\{S|P(S,t) = K - S\} \tag{3.23}$$

Sedemikian sehingga,

$$\text{Jika } S \leq I_t, \text{ maka } P(S,t) = K - S \tag{3.24}$$

$$\text{Jika } S > I_t, \text{ maka } P(S,t) > maks\{K-S,0\} \tag{3.25}$$

Nilai kritisI_t, $t \in [0,T)$ berlaku sebagai nilai batas yang membagi selang harga saham $P(S,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$ menjadi dua selang daerah bagian, yaitu daerah stopping $\rho \equiv [0,I_t] \times [0,T]$ dan daerah kontinu $\ell \equiv (I_t,\infty) \times [0,T]$ yang merupakan selang harga saham dengan waktu yang tepat untuk melakukan *exercise*.

Pada saat $t = 0$, misalkan harga saham awal dinotasikan sebagai S_0 dan nilai kritis awal sebagai I_0. Misalkan investor memiliki satu opsi *put* Amerika ketika harga saham berada di atas batas *exercise* $(S_0 > I_0)$. Pada daerah tersebut tindakan eksekusi tidak memberi keuntungan eksekusi, karena berdasarkan $P(S,t) > maks\{K-S,0\}$ nilai opsi lebih bernilai dari pengembalian eksekusi. Dalam kontrak opsi *put* Amerika, nilai keuntungan opsi pada saat jatuh tempo $t = T$ sama dengan nilai *pay-off*, yaitu:

$$P(S,T) = maks\{K - S_T, 0\}$$

Nilai ekspektasi dari *present value* opsi *put* Amerika pada saat jatuh tempo merupakan bentuk dari nilai opsi *put* Eropa. Dengan demikian, untuk daerah kontinu

ℓ, nilai opsi *put* Amerika dapat dirumuskan dalam bentuk opsi *put* Eropa dengan premi resiko seperti dalam teorema berikut:

Teorema3.2

Untuk daerah kontinu ℓ, nilai opsi *put* Amerika saat$t = 0$ yang dinotasikan sebagai $P(S\ ,0) = P_0$ terdiri dari nilai opsi *put* Eropa $F(S, 0) = F_0$ dan nilai premi (opsi) untuk eksekusi dini (*early exercise premium*), e_0

$$P_0 = F_0 + e_0 \tag{3.26}$$

Dimana

$$F_0 = Ke^{-rt}\mathrm{N}(-\mathrm{d}_{2T}) - S_0\mathrm{N}(-\mathrm{d}_{1T})$$

$$e_0 = rK\int_0^T e^{-rt}N\,(\mathrm{b}_{2T})dt$$

Dengan

$$\mathrm{b}_{2T} = \frac{ln\left(\frac{I_t}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$-\mathrm{d}_{1T} = \frac{ln\left(\frac{K}{S}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$-\mathrm{d}_{1T} = \frac{ln\left(\frac{K}{S}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Menurut, Carr et al (1992), $N(x)$ adalah fungsi sebaran normal kumulatif:

$$N(x) = \int_0^T \frac{e^{\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)}}{\sqrt{2\pi}}dz$$

3.3.5 Batas Atas dan Batas Bawah Nilai opsi *put* Amerika

Syarat batas untuk harga saham S menuju tak hingga, nilai intrinsiknya memenuhi:

$$\lim_{S\to\infty} maks\{K - S, 0\} = 0$$

sehingga dalam kondisi ini investor lebih memilih menjual kontrak opsi. Karena tidak diperbolehkannya tindakan arbitrase, maka untuk harga saham S yang semakin besar, nilai opsi *put* Amerika harus sama dengan nilai intrinsiknya. Karena nilai intrinsik menuju nol pada saat S menuju tak hingga. Maka, nilai opsi *put* harus memenuhi:

$$\lim_{S\to\infty} P(S,T) = 0$$

Kemudian jika $S = 0$, maka nilai intrinsiknya $maks\{K - S, 0\}$ akan bernilai K. Sehingga dalam kondisi ini investor akan mengeksekusi kontrak opsi. Agar tindakan arbitrase tidak terjadi, maka nilai opsi *put* harus sama dengan nilai intrinsiknya, sehingga nilai opsi *put* adalah:

$$P(0,t) = K$$

Dalam kenyataannya seorang investor tidak mengetahui batas nilai saham yang tepat untuk mengeksekusi atau menjual opsi. Hal ini berarti Investor tidak mengetahui nilai batas I_t. Karena posisi nilai I_t ini tidak diketahui secara pasti, maka nilai batas disebut sebagai nilai batas bebas. Nilai opsi *put* $P(S,t)$ harus merupakan fungsi kontinu, sehingga:

$$\lim_{s\to I_t} P(S,T) = K - I_t \tag{3.27}$$

Dari persamaan di atas dapat diketahui bahwa $K \geq I_t$, maka dari persamaan sebelumnya dapat dituliskan nilai yang menjadi batas atas bagi nilai opsi *put* P_0 sebagai berikut:

$$P_0 = F_0 + rK\int_0^T e^{-rt} N\left(\frac{ln\left(\frac{I_t}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{T}}\right) dt$$

$$P_0 \leq F_0 + rK\int_0^T e^{-rt} N\left(\frac{ln\left(\frac{I_t}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{T}}\right) dt \tag{3.28}$$

Untuk memperoleh nilai yang menjadi batas bawah bagi nilai opsi *put* P_0 , diperlukan waktu untuk melakukan *exercise* (*stoping time*) tak terbatas. Dengan stoping time $\tau = \infty$ sehingga akan diperoleh peluang harga saham yang cukup kecil (Merton, 1992). Didefinisikan C merupakan harga saham yang maksimal dengan keuntungan sebesar $K - C$, dengan memenuhi:

$$C \leq S \leq \infty \tag{3.29}$$

Karena $C \leq S$, maka nilai keuntungan memenuhi:

$$K - C \geq K - S \tag{3.30}$$

Keuntungan eksekusi $K - S$ diperoleh jika $S \leq It$ dan keuntungan $K - C$ diperoleh jika $C \leq I_\infty$ (karena stoping time ($\tau = \infty$). Maka dari $C \leq S \leq \infty$, dapat diperoleh nilai batas:

$$I_\infty \leq I_t \tag{3.31}$$

Dari persamaan (3.13) dapat dituliskan nilai yang menjadi batas bawah bagi nilai opsi *put* Po sebagai berikut:

$$P_0 = F_0 + rK \int_0^T e^{-rT} N\left(\frac{ln\left(\frac{I_t}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dt$$

$$P_0 \leq F_0 + rK \int_0^T e^{-rT} N\left(\frac{ln\left(\frac{I_\infty}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dt \tag{3.32}$$

Dengan demikian, nilai opsi *put* Amerika mempunyai nilai batas sebagai berikut:

$$F_0 + rK \int_0^T e^{-rT} N\left(\frac{ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dt \geq P_0$$

$$\geq F_0 + rK \int_0^T e^{-rT} N\left(\frac{ln\left(\frac{I_\infty}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) dt \tag{3.33}$$

3.3.6 Pembangkitan Nilai Instrinsik Opsi *Put* Amerika

Nilai maksimum antara nol dan selisih harga eksekusi dengan harga saham pada waktu sebelum jatuh tempo disebut dengan nilai intrinsik. Pada waktu jatuh tempo nilai intrinsiknya disebut sebagai nilai *pay-off*. Karena sebelumnya telah diketahui harga saham di sepanjang interval $[0, T]$, maka nilai intrinsik opsi di sepanjang interval $[0, T]$, juga dapat ditentukan.

Dalam pengeksekusian opsi *put* Amerika yang dilakukan pada interval waktu $[0, T]$ yang diperlukan adalah harga saham pada interval $[0, T]$ misalkan nilai intrinsik opsi Amerika didefinisikan sebagai proses $Z = (Z(t))_{0 \le t \le T}$yang menggambarkan hasil eksekusi di seluruh periode, yaitru $Z(t) = maks(0, K - S(t), 0)$. karena harga saham di sepanjang interval $[0, T]$ berbeda-beda maka nilai intrinsik opsi *put* pun di sepanjang interval pun berda-beda. Dari hasil simulasi sebelumnya yang telah membangkitkan harga saham $S(t)$ di sepanjang interval $[0, T]$ maka akan dibangkitkan nilai intrinsik $Z(t)$ di sepanjang interval $[0, T]$. Dengan harga saham $S(t)$ yang telah diperoleh sebelumnya, maka nilai intrinsik $S(t) = maks(K - S(t))$ di sepanjang interval waktu $[0, T]$.

3.3.7 Penentuan Harga Opsi *Put* Amerika dengan Metode *Monte Carlo*

Misalkan $V = (V_t)_{0 \le t \le T}$ adalah nilai opsi *Put* Amerika. Tujuannya adalah untuk menghitung keuntungan berdasarkan asumsi bahwa waktu eksekusi berada dalam himpunan $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ dengan $l_i = i\Delta$ dan $iN = T$. Diasumsikan bahwa waktu $t_0 = 0$.

Diterapkan horizon waktu berhingga (*finite time horizon*) $T > 0$, dan misalkan terdapat dua proses stokastik $(r_t)_{0 \le t \le T}$ dan $(\tilde{Z}_t)_{0 \le t \le T}$, yang terdefinisi pada ruang probabilitas yang terfilter (*filtered probability space*) $\Omega, F, (F)_{0 \le t \le T}, P)$. Proses pertama adalah nilai terbaru dari suku bunga, kemudian proses kedua mendefinisikan jumlah *pay-off* yang harus dibayar kepada *holder* dari opsi Amerika pada saat opsi dieksekusi. Kemudian diasumsikan juga bahwa probabilitas P adalah penetapan harga opsi tersebut. Misal τ adalah waktu penghentian (*stoping time*). Didefinisikan nilai awal dari opsi Amerika yaitu

$$V_0^* = sup_{o \le \tau \le T} E|Z_\tau| \tag{3.34}$$

Dengan $Z_\tau \equiv exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)\tilde{Z}_t$ adalah nilai eksekusi yang terdiskon dari opsi tersebut. Untuk mencegah trivialitas. Diasumsikan bahwa $V_0^* < \infty$, serta untuk beberapa $p > 1$, $sup_{o\leq\tau\leq T}E|Z_\tau| \in L^p$, dan lintasan dari Z adalah kontinu kanan. Dengan asumsi tersebut, proses *snell envelope*

$$V_t^* = esssup_{t\leq\tau\leq T}E|Z_\tau|F_t \tag{3.35}$$

Adalah supermatingale, sehingga mempunyai dekomposis Doob-Meyer

$$V_t^* = V_0^* + M_t^* - A_t^* \tag{3.36}$$

Dengan M^* adalah sebuah martingale yang bernilai 0 pada saat t=0, dan A^* adalah suatu proses yang menaik dan terintegralkan (*previsible integral increasing process)*, juga bernilai 0 pada saat t=0

Sehingga muncullah teorema yang digunakan dalam menentukan harga opsi Amerika dalam simulasi Monte Carlo;

Teorema 3.1

$$V_0^* = inf_{M\in H_0^1}E\left[sup_{o\leq t\leq T}(Z_t - M_t)\right] \tag{3.37}$$

Dengan H_0^1 adalah ruang dari martingale-martingale M dimana $sup_{o\leq t\leq T}|M_t| \in L^p$, dan sedemikian sehingga $M_0 = 0$. Batas bawah terbesar (infimum) dicapai dengan mengambil $M = M^*$

Terorema 3.1 dapat memberi petunjuk bagaimana mendapatkan metode penetapan harga opsi Amerika dengan memilih martingale M yang sesuai, kemudian dengan simulasi mengevaluasi ekspektasi $E[sup_{o\leq t\leq T}(Z_t - M_t)]$. Bukti dapat dilihat pada Roges (2002).

Misalkan telah diketahui martingale *M* yang sesuai. Akan diinterpretasikan dalam rangka perlindungan nilai (*headging*). Dengan mempertahankan *M* tetap, dan sebuah batas atas untuk V_0^* yaitu rata-rata dari peubah acak

$$\eta \equiv sup_{o\leq t\leq T}(Z_t - M_t) \tag{3.38}$$

Misalkan ditetapkan $\eta_t \equiv E(\eta|F_t)$ untuk martingale M dianggap sebagai keuntungan dari proses perdagangan dari portofolio pada waktu t menjadi $\eta_0 + M_t$. Persamaan (5.9) berakibat pertidaksamaan untuk setiap $t \in [0, T]$

$$Z_t \leq \eta + M_t$$

Dengan ekspektasi bersyarat F_t yang diberikan, maka dapat dituliskan hubungan pertidaksamaan berikut

$$Z_t \leq E\left[\eta_\tau - \eta_0 | F_t\right] + (M_t + \eta_0) \quad (3.39)$$

Persamaan di atas memperlihatkan bahwa nilai Z_t terkurangi karena ada yang harus di bayarkan ke pemegang opsi jika dieksekusi pada waktu t.

3.4 Algoritma Penentuan Harga Opsi Amerika dengan Metode *Monte Carlo*

Algoritma yang akan dijelaskan yaitu algoritma mengenai opsi *put* Amerika. Misalkan telah diketahui martingale M yang telah dibahas sebelumnya sehingga dapat dnotasikan parameter-parameter dalam exercise opsi *put* Amerika sebagai berikut;

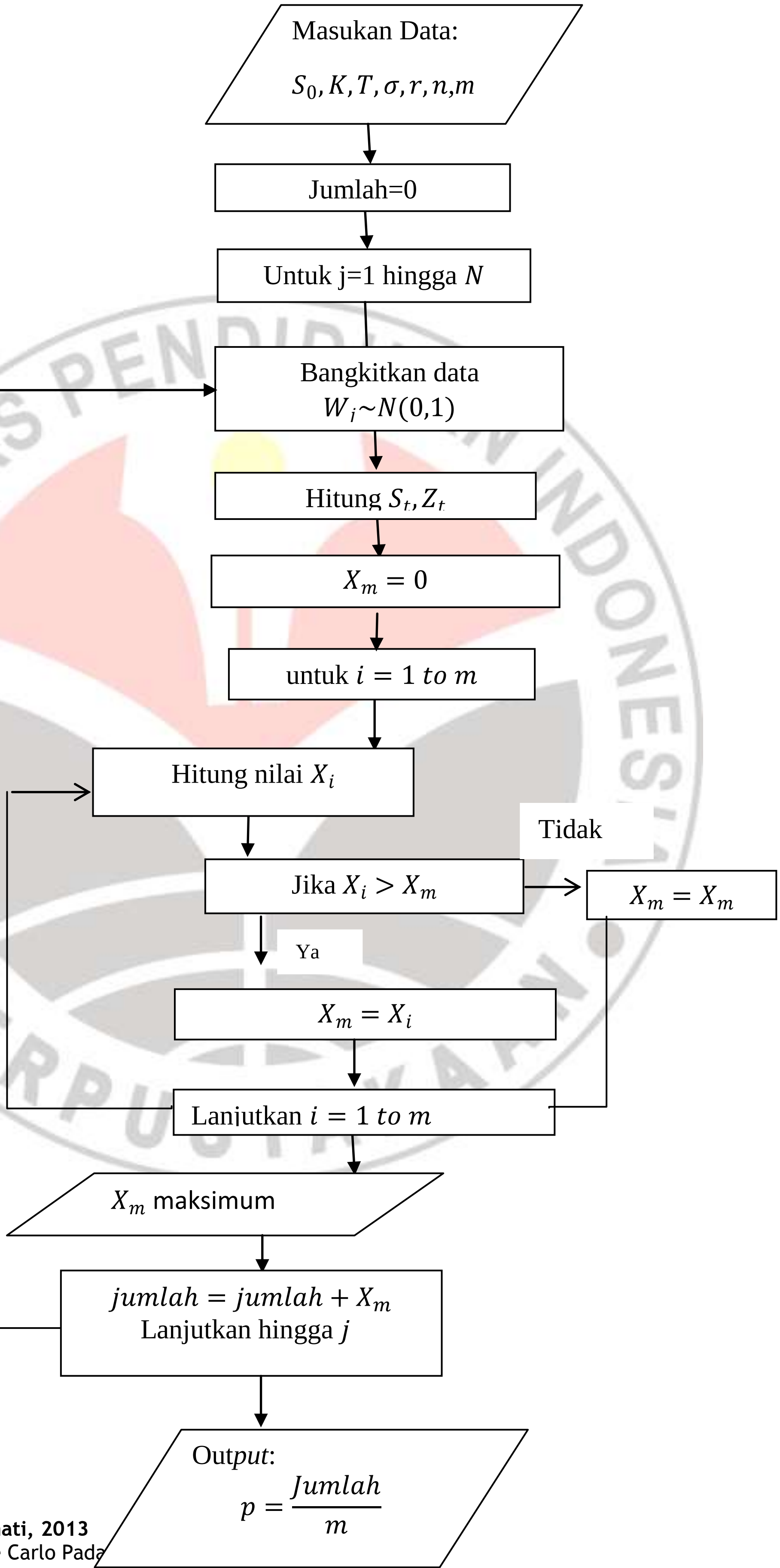
N : Banyaknnya hari
n : Partisi waktu sampel
m : Jumlah pembangkitan
i : Indeks hari
K : *Srike Price*
T : Waktu jatuh tempo
r : Tingkat suku bunga bebas resiko
S_0 : Harga sahamm awal
Z_t : Nilai intrinsik
S_t : Harga saham pada saat t
σ : Volatilitas

Algoritma merupakan alur atau langkah-langkah untuk membantu melakukan exercise kontrak opsi. Pertama tentukan in*put* parameter dengan menentukan harga saham awal S_0, harga kontrak opsi K, nilai suku bunga bebas resiko r, volatilitas sahanσ, dan waktu jatuh tempo. Selanjutnya bangkitkan tanggal jatuh tempo $t_0 < t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$ dengan membagi periode T menjadi N selang waktu. Kemudian akan ditentukan juga percobaan yang akan diulang sebanyak n kali. Langkah kedua yaitu dengan membangkitkan *brownian noise* W_t disepanjang interval $[0, T]$. W_t dibangkitkan berdasarkan distribusi normal baku. Kemudian setelah pembangkitan Wt,maka dapat dibangkitkan pula harga saham S_t disepanjang interval $[0, T]$.

Langkah selanjutya yaitu setelah diperoleh S_t pada selang waktu $t_0 < t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$ dapat ditentukan nilai intrinsik Z_t di setiap titik waktu dalam himpunan selang waktu $t_0 < t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$ dengan syarat $Z_t = maks\,(K - S_t)$. Selanjutnya bangkitkan pula nilai martingale M_t di sepanjang selang waktu $t_0 < t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$ proses ini diulang sebanyak n kali yang nantinya akan ditentukan rata-rata nilai intrinsik Z_t maksimum yang diperoleh pada satu kali percobaan. Setelah diperoleh nilai intrinsik Z_t disepanjang interval $t_0 < t_1 \leq \ldots \leq t_n = T$ maka dimisalkan kembali X adalah vektor berdimensi n yg merekam nilai maksimum yng dicapai dalam prose $\left(e^{-rt_i}Z_{t_i} - M_{t_i}\right)_{0\leq i\leq N}$ pada setiap bagian sampel.

$$X(m) = \underset{0\leq i\leq N}{\text{maks}}\left[e^{-rt_i}Z_{t_i}^m - M_{t_i}^m\right]$$

Selanjutnya untuk menentukan nilai X_m yang maksimum, pada waktu t_i, untuk setiap path simulasi m, bandingkan kuantitas $\left[e^{-rt_i}Z_{t_i}^m - M_{t_i}^m\right]$ dan X_m. Bila yang berikutnya lebih baik dari pada nilai sebelumnya, simpan nilai $\left[e^{-rt_i}Z_{t_i}^m - M_{t_i}^m\right]$ kedalam entri X_m. Bila $t_{i+1} \leq T$. Tingkatan i satu unit lalu kembali ke langkah pencarian X_m yang terbesar (maksimal). Selanjutnya kembalikan $V(t_0, W_0)$ sebagai taksiran empiris dari nilai dugaan $E\left[sup_{0\leq 1\leq N}\left(e^{-rt_i}Z_{t_i} - M_{t_i}\right)\right]$. Pencarian nilai maksimum ini juga dilakukan sebanyak n kali sehingga diperoleh nilai X sebanyak n pula untuk setiap harga awal S_0 yang berbeda. Langkah terakhir adalah mencari nilai rata-rata dari setiap nilai maksimum X_m yang didapat dari setiap percobaan, yang kemudian akan ditetapkan sebagai nilai opsi *put* Amerika. Simpangan baku dari hasil simulasi ini pun dapat diperoleh dari data nilai X_m yang telah diperoleh di setiap percobaan/simulasi. Dari langkah-langkah di atas, maka dapat dibuat bagan alur untuk algoritma simulasi ini sebagai berikut


Masukan Data:
$S_0, K, T, \sigma, r, n, m$
Jumlah=0
Untuk j=1 hingga N
Bangkitkan data
$W_i \sim N(0,1)$
Hitung S_t, Z_t
$X_m = 0$
untuk $i = 1$ to m
Hitung nilai X_i
Tidak
Jika $X_i > X_m$
$X_m = X_m$
Ya
$X_m = X_i$
Lanjutkan $i = 1$ to m
X_m maksimum
$jumlah = jumlah + X_m$
Lanjutkan hingga j
Output:
$p = \frac{Jumlah}{m}$