BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Chain Ladder

Salah satu syarat bahwa perusahaan asuransi dikatakan perusahaan yang baik adalah ketika memiliki kemampuan untuk membayar kewajiban kepada pemegang polis dalam waktu yang cepat. Oleh karena itu, perusahaan asuransi haruslah memiliki gambaran akan besarnya jumlah klaim yang akan datang. Cara untuk mengetahui besarnya klaim yang akan datang yaitu melakukan perhitungan secara matematis, salah satu metode yang paling populer digunakan unutk menentukan besar klaim yang akan datang adalah metode *Chain Ladder*.

Penentuan estimasi klaim dengan Metode *Chain Ladder* (CL) merupakan penentuan estimasi klaim dengan menggunakan data kumulatif besar klaim pada *run-off triangle* berdasarkan faktor pengembangan atau *link ratios*. Hal pertama yang dilakukan pada penentuan estimasi klaim dengan metode *chain ladder* adalah membentuk *run-off triangle* kumulatif.

Misalkan $C_{i,j}$ adalah besar klaim kumulatif untuk klaim yang terjadi pada *accident year* ke-*i* dan dibayarkan sampai dengan *development periode* ke-*j*. Pada bagian *run-off triangle*, penentuan estimasi cadangan klaim yang akan datang ditentukan dengan berdasarkan faktor yang digunakan untuk memperhitungkan perkembangan kerugian yang berasal dari data historis yang mencerminkan tren actual pada perkembangan kerugian(*factor development)* dan ditentukan dengan menggunakan perumusan yang didefinisikan sebagai berikut (Mack, 1993)

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \qquad (3.1)$$

dimana, f_k menyatakan *factor development* untuk *development period* ke-*k* dan $C_{i,k}$ menyatakan besar klaim kumulatif untuk klaim yang terjadi pada *accident year* ke-*i* dan dibayarkan sampai dengan *development periode* ke-k.

Nilai *factor development* yang telah diperoleh tersebut akan dipergunakan pada penentuan estimasi total klaim pada *run-off triangle* kumulatif. Penentuan estimasi cadangan klaim dengan metode *chain ladder* ditentukan dengan menggunakan perumusan berikut (Mack, 1993)

$$\hat{R}_i^{CL} = \hat{U}_i^{CL} - C_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}(\hat{f}_{n+2-i}, \dots, \hat{f}_{n-1}\hat{f}_n - 1) \qquad (3.2)$$

dimana, $\hat{U}_i^{CL} = C_{i,n+1-i}\hat{f}_{n+2-i}, \dots, \hat{f}_{n-1}\hat{f}_n$

dengan $\hat{R}_i^{CL}$ menyatakan nilai cadangan klaim dengan Metode CL, $\hat{U}_i^{CL}$ menyatakan jumlah seluruh kerugian untuk tahun kejadian ke-i pada Metode CL, $\hat{f}_n$ menyatakan f*actor Development* untuk *development period* ke-*n*.

Penentuan estimasi dengan metode CL ini memiliki kekurangan yang harus dipertimbangkan atas penggunaannya, menurut Verral (2004) kekurangan tersebut adalah : 1) Ketidakstabilan dalam pengambilan hasil estimasi dikarenakan fluktuasi yang tidak beraturan yang dihasilkan oleh nilai *Factor Development*, 2) Hasil perhitungan cadangan klaim sangat bergantung pada jumlah kerugian pada saat $C_{i,n+1-i}$. Ketergantungan pada jumlah kerugian pada saat $C_{i,n+1-i}$ akan memungkinkan cadangan $\hat{R}_i^{CL} = 0$ apabila $C_{i,n+1-i} = 0$. Hal ini menjadi tidak masuk akal apabila tidak ada sama sekali klaim yang dibayarkan ataupun yang dilaporkan. Penggunaan faktor CL pun dapat mengakibatkan kerugian yang akan diestimasi pada data *future triangle* merupakan kelipatan dari kerugian yang sudah diketahui sebelumnya. Ini bertentangan dengan gagasan dasar tentang independensi antara $C_{i,k}$.(Mack , 2006).

3.2 BORNHUETTER-FERGUSON

Pada tahun 1972, dua aktuaris yaitu Bornhuetter dan Pearl Ferguson mengembangkan suatu metode baru untuk mengatasi kekurangan atau kelemahan yang ada pada metode *Chain Ladder*. Pada metode baru tersebut penentuan model tidak hanya berdasarkan pada data masa lalu saja, namun juga berdasarkan pada eksposur perusahaan asuransi. Karena itu, metode baru ini dipandang dapat lebih menjelaskan kondisi sebenarnya dibandingkan dengan metode CL. Metode baru ini dikenal dengan metode Bornhuetter-Ferguson.

Perumusan metode Bornhuetter-Ferguson melibatkan beberapa parameter *Ultimate Loss*. *Ultimate Loss* merupakan parameter yang menyatakan jumlah pertanggungan asuransi yang harus dibayarkan berdasarkan hasil total klaim. Parameter-parameter tersebut digunakan untuk mengukur peningkatan proporsi pembayaran kerugian kumulatif pada setiap *Development years* dan memperkirakan kerugian yang harus dibayarkan pada setiap tahun kejadian.

Seperti yang telah dikemukakan sebelumnya bahwa metode Bornhuetter-Ferguson tidak terlalu bergantung pada data masa lalu, dengan demikian metode ini memberikan solusi untuk menghindari ketergantungan pada nilai $C_{i,n+1-i}$. Hal ini ditunjukkan pada perumusan estimasi cadangan klaim dengan metode Bornhuetter-Ferguson yang didefinisikan sebagai berikut (Mack, 2006)

$$\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{z}_{n+1-i})\,\widehat{U}_i \tag{3.3}$$

dimana , $\widehat{U}_i$ menyatakan *Ultimate Loss* yang dirumuskan sebagai berikut(Mack, 2006)

$$\widehat{U}_i = v_i \hat{q}_i \ ,$$

$\hat{q}_i$ pada perumusan $\widehat{U}_i$ merupakan sebuah *prior Ultimate Loss Estimate* $q_i = \frac{U_i}{v_i}$ untuk periode kejadian ke-*i* sedangkan v_i merupakan jumlah pemasukan premi pada periode kejadian ke-i (*earned premium).* Dan $\hat{z}_k \in [0,1]$ meyatakan persentase dari nilai harapan kerugian tertinggi (*Ultimate Loss*) yang diketahui setelah *Development Period* ke-k.

Persentase $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ merupakan kumulatif *Development Pattern* yang diharapkan. Dengan demikian $1-\hat{z}_{n+1-i}$ merupakan persentase kerugian yang diharapkan dari tahun kejadian ke-*i*.

Pada penentuan cadangan klaim dengan metode Bornhuetter-Ferguson, hal yang perlu dilakukan terlebih dahulu yaitu mengestimasi parameter $\hat{q}_i$, dan $\hat{z}_k$ untuk semua *i* dan *k*. Pada kenyataannya, z_k diperoleh dari *link ratios* CL dengan perumusan sebagai berikut.

$$z_n = 1, \qquad \hat{z}_{n-1} = \hat{f}_n^{-1}, \qquad \hat{z}_{n-2} = (\hat{f}_{n-1}\hat{f}_n)^{-1}, \dots , \qquad \hat{z}_1 = (\hat{f}_{2,\dots\dots,}\hat{f}_n)^{-1}$$

Pengambilan nilai z_k dengan cara di atas tidak memberikan pendekatan secara objektif untuk penentuan *prior estimate* $\hat{q}_i$. Oleh karena itu q_i ditentukan berdasarkan pada estimasi tahun sebelumnya, harga dan informasi pasar, estimasi q_i diperlukan agar dapat mencapai cadangan dengan ukuran yang diinginkan. Menurut Mack(2006) nilai q_i diperoleh menggunakan perumusan berikut:

$$\hat{q}_i = r_i m$$

Dengan r_i menyatakan faktor tingkat premium(*on-level premium factor*) pada tahun kejadian ke-*i* dan m menyatakan total dari seluruh nilai *Incremental Loss Ratio*

Pada skripsi ini akan mengkaji mengenai pengembangan suatu pendekatan alternatif untuk mengestimasi parameter q_i dan z_i tanpa menggunakan konsep CL. Dengan pendekatan ini, metode Bornhuetter-Ferguson dapat menjadi alternatif terbaik untuk mengatasi kekurangan metode CL.

3.3 Asumsi-Asumsi Metode BORNHUETTER-FERGUSON

Beberapa asumsi standar yang harus dipenuhi dalam penggunaan metode Bornhuetter-Ferguson yaitu sebagai berikut :

a Terdapat parameter yang tidak diketahui , yaitu x_i dan γ_i dengan $E\left(S_{i,k}\right) = x_i \gamma_k,$ dan $\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{n+1} = 1$

b Semua data inkrement klaim $S_{i,k}$bersifat independen.

$E\left(S_{i,k}\right) = x_i \gamma_k,\ 1 \le i \le n$ dan $1 \le k \le n+1$, Asumsi ini dapat mengakibatkan

$$E(U_i) = E(S_{i,1} + S_{i,2} + \cdots + S_{i,n+1}) = x_i\gamma_1 + x_i\gamma_2 + \cdots + x_i\gamma_{n+1} = x_i$$

c Terdapat konstanta s_k^2 yang tidak diketahui yang bersifat proposional dengan $Var\left(S_{i,k}\right) = x_i s_k^2$ maka ,

$$Var(U_i) = Var\left(S_{i,1} + \cdots + S_{i,n+1}\right) = Var\left(S_{i,1}\right) + \cdots + Var\left(S_{i,n+1}\right)$$
$$= x_i(s_1^2 + \cdots + s_{n+1}^2) \qquad (3.4)$$

Dari asumsi-asumsi di atas , kita peroleh

$$E(R_i) = x_i(\gamma_{\,n+2-i} + \cdots + \gamma_{\,n+1}) = x_i(1 - z_{n+1-i}),$$

dimana nilai $z_k = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$, ini menunjukkan bahwa nilai ekspektasi cadangan klaim memiliki nilai yang sama dengan metode BF. Varians dari cadangan klaim (R) untuk masing-masing cadangan klaim adalah

$$Var(R_i) = Var\left(S_{i,n+2-i}\right) + \cdots + Var\left(S_{i,n+1}\right) = x_i(s_{n+2-i}^2 + \cdots + s_{n+1}^2) \tag{3.5}$$

Untuk parameter $\hat{\gamma}_k$, misalkan diketahui $x_1, \ldots, x_k$, estimasi parameter γ_k ditentukan dengan perumusan sebagai berikut (Mack , 2006)

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i} \tag{3.6}$$

$\hat{\gamma}_k$ merupakan penaksir tidak bias terbaik untuk γ_k dengan $1 \leq k \leq n$

Bukti :

$$E(\hat{\gamma}_k) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right) E\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right) E\left(S_{1,k} + \cdots + S_{n+1-i,k}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right) \left(E\left(S_{1,k}\right) + \cdots + E\left(S_{n+1-i,k}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right) (x_1\gamma_k + \cdots + x_{n+1-i}\gamma_k) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right) (x_1 + \cdots + x_{n+1-i})\gamma_k$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right) \sum_{i=1}^{n+1-k} x_i \gamma_k = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i}\right) \gamma_k = \gamma_k$$

$$E(\hat{\gamma}_k) = \gamma_k$$

Sedangkan estimasi parameter s_k^2 ditentukan dengan perumusan sebagai berikut

$$\hat{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{(S_{i,k} - x_i\hat{\gamma}_k)^2}{x_i} \tag{3.7}$$

$\hat{s}_k^2$ merupakan penaksir tidak bias untuk s_k^2, $1 \leq k \leq n-1$

Bukti:

$$E(\hat{s}_k^2) = E\left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n+1-k}\frac{(S_{i,k} - x_i\hat{\gamma}_k)^2}{x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{n-k}E\left(\sum_{i=1}^{n+1-k}\frac{(S_{i,k} - x_i\hat{\gamma}_k)^2}{x_i}\right) = \frac{1}{n-k}E\left(\sum_{i=1}^{n+1-k}\frac{(S_{i,k} - E(S_{i,k}))^2}{x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{n-k}E\left(\frac{(S_{1,k} - E(S_{1,k}))^2}{x_1} + \frac{(S_{2,k} - E(S_{2,k}))^2}{x_2} + \cdots + \frac{(S_{n-k,k} - E(S_{n-k,k}))^2}{x_{n-k}}\right)$$

$$= \frac{1}{n-k}E\left(\frac{(S_{1,k} - E(S_{1,k}))^2}{x_1}\right) + E\left(\frac{(S_{2,k} - E(S_{2,k}))^2}{x_2}\right) + \cdots$$

$$+ E\left(\frac{(S_{n-k,k} - E(S_{n-k,k}))^2}{x_{n-k}}\right)$$

$$= \frac{1}{n-k}\{\frac{1}{x_1}E\left((S_{1,k} - E(S_{1,k}))^2\right) + \frac{1}{x_2}E\left((S_{2,k} - E(S_{2,k}))^2\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{x_{n-k}}E\left((S_{n-k,k} - E(S_{n-k,k}))^2\right)\}$$

$$= \frac{1}{n-k}\{\frac{1}{x_1}Var(S_{1,k}) + \frac{1}{x_2}Var(S_{2,k}) + \cdots + \frac{1}{x_{n-k}}Var(S_{n-k,k})\}$$

$$= \frac{1}{n-k}\left\{\frac{1}{x_1}x_1 s_k^2 + \frac{1}{x_2}x_2 s_k^2 + \cdots + \frac{1}{x_{n-k}}x_{n-k}s_k^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n-k}\{s_k^2 + s_k^2 + \cdots + s_k^2\}$$

$$= \frac{1}{n-k}(n-k)\{s_k^2\} = s_k^2$$

$$E(\hat{s}_k^2) = s_k^2$$

3.4 Estimasi *Development Pattern* dari Metode Bornhuetter-Ferguson.

Setelah mengetahui estimasi q_i, tahap selanjutnya yang dilakukan yaitu memperkirakan naik atau menurunnya pola jumlah klaim diperiode yang akan datang (*development pattern*). Berdasarkan perumusan penentuan estimasi cadangan klaim dengan metode Bornhuetter-Ferguson, diperoleh:

$$\hat{z}_{n+1-i} = 1 - \frac{\hat{R}_i}{\hat{U}_i} = \frac{\hat{U}_i - \hat{R}_i}{\hat{U}_i} \approx \frac{C_{i,n+1-i}}{\hat{U}_i}, \qquad (3.8)$$

tanda ≈ pada rumus (3.8) menyatakan bahwa rumus (3.8) berlaku jika $\hat{U}_i$ sama dengan $C_{i,n+1-i} + \hat{R}_i$ dimana $C_{i,n+1-i} = \hat{z}_{n+1-i}\hat{U}_i$. Namun, cara ini tidak mungkin untuk diterapkan pada setiap i, karena akan dapat mengakibatkan pola $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \ldots ..$ tidak sesuai.

Oleh karena itu , rumus (3.8) diubah kedalam bentuk sebagai berikut:

$$\hat{z}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} C_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i} \qquad (3.10)$$

sebagai rata-rata tertimbang dari rasio $\frac{C_{i,k}}{\hat{U}\ _i}$. Namun, hal ini dapat mengakibatkan terjadinya invers pada pola $z_1, z_2, \ldots$ yaitu $\hat{z}_k > \hat{z}_{k+1}$. Untuk menghindari terjadinya invers, maka digunakan

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} \hat{U}_i} \qquad (3.11)$$

$\hat{z}_k$ diperoleh dengan cara menjumlahkan $\hat{\gamma}_k$ yang dinyatakan dalam perumusan berikut

$$\hat{z}_k = \hat{\gamma}_1 + \hat{\gamma}_2 + \cdots + \hat{\gamma}_k \qquad (3.12)$$

dengan $\hat{z}_{n+1} = 1$.

Prosedur yang dikemukakan di atas merupakan bagian dari *development pattern* yang disarankan oleh metode Bornhuetter-Ferguson. Berdasarkan penjelasan diatas jelas bahwa, pola pada metode Bornhuetter-Ferguson berbeda dengan pola *Chain Ladder*.

Pada kenyataannya, nilai $\hat{z}_k$ akan mengalami kenaikan drastis apabila menggunakan hasil tersebut. Oleh karena itu, akan lebih baik jika melakukan *smoothing* pada nilai $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \ldots, \hat{\gamma}_{n+1}$ untuk memperoleh hasil yang lebih halus $\hat{\gamma}^*_1, \ldots, \hat{\gamma}^*_n, \hat{\gamma}^*_{n+1}$ dimana mengakibatkan $\hat{\gamma}^*_1 + \cdots + \hat{\gamma}^*_n + \hat{\gamma}^*_{n+1} = 1$¸ pada umumnya nilai *smoothing* ini dipilih berdasarkan pertimbangan intuitif aktuaris dan proses *smoothing* didasarkan pengalaman aktuaris itu sendiri, namun apabila menggunakan cara intuitif ini dapat mengakibatkan penilaian bersifat terlalu subjektif, karena itu pada penenlitian ini proses *smoothing* dilakukan dengan menggunakan pendekatan regresi, proses *smoothing* dengan pendekatan regresi ini dilakukan dengan berdasarkan plot data yang diperoleh apakah plot data tersebut mendekati bentuk ekponensial atau polynomial.

Penentuan $\hat{s}_n^{2*}$ dan $\hat{s}_{n+1}^{2*}$ dilakukan dengan menggunakan teknik regresi berdasarkan $\hat{\gamma}_k$ yang telah dilakukan *smoothing* untuk $\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{n}-1$, dengan $\hat{s}_k^{2*}$ sebagai variabel terikat dan $\hat{\gamma}_k^*$ sebagai variabel bebas untuk $\mathrm{k} = 1, \ldots, \mathrm{n}-1$

3.5 *Ultimate Loss Ratio*

Seperti yang telah dikemukakan sebelumnya, metode BF ini bertujuan untuk menentukan estimator q_i yang tidak bergantung secara langsung pada $C_{i,n+1-i}$,. Prosedur yang diusulkan ialah mengikuti tahap berikut:

a. Tahap pertama menentukan nilai *Incremental loss ratio* (ILR)

Pada tahap pertama ini yang dilakukan yaitu menentukan nilai *Incremental loss ratio* (ILR). Nilai *Incremental loss ratio* (ILR) ditentukan dengan menggunakan perumusan berikut (Mack, 2006) :

$$\widehat{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i} \tag{3.13}$$

dimana, $\widehat{m}_k$ menyatakan *Incremental loss ratio* (ILR) pada *Development Period* ke-*k*, S_{ik} menyatakan besarnya klaim *incremental* pada periode kejadian ke-*i* dan *Development period* ke-*k*, v_i menyatakan besarnya jumlah premium/premi yang diperoleh pada periode kejadian ke-*i* dan dimulai dari *Development Periode* ke-*k*. Adapun jumlah dari $\widehat{m}_1 + \cdots + \widehat{m}_n$ dinyatakan sebagai rata-rata *a priori loss ratio*.

b. Tahap kedua

Tahap kedua yaitu tahap menentukan *loss ratio index* atau *on-level premium factor* (r_i). Nilai r_i ditentukan dengan cara membagi *individual loss ratio* (C_{n+1-i}/v_i) pada *accident period –i* dengan rata-rata *a priori loss ratio* $\sum_{i=1}^{n+1-k} \widehat{m}_i$, yang dinyatakan dengan perumusan berikut(Mack ,2006),

$$r_i = \frac{C_{i,n+1-i}/v_i}{\sum_{k=1}^{n+1-i} \widehat{m}_k}\,. \tag{3.14}$$

Nilai faktor r_i mempengaruhi hasil jumlah premi yang sebaiknya dihasilkan oleh suatu perusahaan, yang ditentukan dengan perumusan berikut $v_i^* = v_i r_i$.

c. Tahap ketiga,

Berdasarkan hasil perhitungan r_i, diperoleh informasi bahwa nilai r_i untuk *paid claims data* dan *incurred claims data* pada setiap tahunnya itu berbeda. Hal ini mengakibatkan premi pada *paid claims data* dan *incurred claims data* akan mempunyai nilai berbeda pada setiap tahunnya. Hal ini bertentangan dengan ketentuan bahwa jumlah premi yang dimiliki haruslah sama berdasarkan data *run-off triangle*. Oleh karena itu , untuk mengatasi permasalahan nilai r_i tersebut, maka untuk penentuan premi akan digunakan nilai rata-rata r_i. Konsep rata-rata yang digunakan adalah rata-rata geometri, nilai rata-rata geometri r_i ditentukan dengan menggunakan perumusan berikut,

$$r_i^* = \sqrt{r_i^{paid} r_i^{inc}}. \tag{3.15}$$

dengan demikian maka $v_i^* = v_i r_i^*$.

d. Tahap keempat

Dilakukan perhitungan ulang terhadap *Incremental Loss Ratio* (ILR), dikarenakan berubahnya nilai v_i menjadi v_i^*, nilai *incremental loss ratio* $\widehat{m}_k$ yang dipengaruhi oleh nilai v_i^* ditentukan dengan menggunakan perumusan berikut,

$$\widehat{\widehat{m}}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i r_i^*}. \tag{3.16}$$

Pada umumnya hasil dari rumus (3.16) membentuk pola exponensial atau polynomial akan tetapi tidak begitu sempurna. Oleh karena itu, untuk mendekati pola eksponensial atau polynomial yang sempurna, maka perlu dilakukan *smoothing* terhadap nilai *incremental loss ratio* agar nilai ILR menurun menuju nol.

Proses *smoothing* adalah cara yang terbaik untuk memperoleh hasil yang memuaskan dan menurun menuju nol (England, 2002), seperti yang telah dikemukakan sebelumnya bahwa proses *smoothing* dapat dilakukan dengan dua cara; 1) menggunakan intuitif masing-masing aktuaris dan 2) menggunakan pendekatan regresi berdasarkan plot yang dibentuk dari hasil $\widehat{\widehat{m}}_k$ (Agus M.F, 2015). Penggunaan cara intuitif untuk memperoleh hasil *smoothing* jarang dilakukan, karena hal tersebut akan dapat menimbulkan kesan yang sangat subjektif. Untuk menghindari subjektifitas yang tinggi, maka pada penelitian ini proses *smoothing* regresi dilakukan dengan menggunakan pendekatan regresi.

Nilai $\widehat{\widehat{m}}_k$yang telah dilakukan proses *smoothing* dinotasikan dengan $\widehat{m}_k^*$. Jumlah seluruh nilai ILR yang telah di *smoothing* dinotasikan sebagai $\widehat{m}^*$, dimana

$$\widehat{m}^* = \widehat{m}_k^* + \cdots + \widehat{m}_n^* + \widehat{m}_{n+1}^*. \tag{3.17}$$

Asumsikan bahwa nilai $\widehat{m}^*$ pada *paid claims data* dan *incurred claims data* haruslah memiliki nilai yang sama ($\widehat{m}_{paid}^*$ =$\widehat{m}_{incurred}^*$) dan untuk *incurred data* asumsikan $\widehat{m}_{n+1}^* = 0$ (Mack,2006) , akibatnya diperoleh,

$$\widehat{m}_{n+1}^{*paid} = \widehat{m}^{*incurred} - (\widehat{m}_k^{*paid} + \cdots + \widehat{m}_n^{*paid}) \tag{3.18}$$

pada akhirnya akan diperoleh *a priori estimation* $\hat{q}_i = r_i^* m^*$ untuk periode ULR ke-*i* dan selanjutnya dapat diperoleh hasil *Ultimate Loss* yang ditentukan dengan perumusan berikut,

$$\widehat{U}_i = v_i r_i^* m^* \tag{3.19}$$

3.6 *Development Pattern* Setelah Proses *Smoothing*

Setelah diperoleh persamaa $\widehat{U}_i = v_i r_i^* m_i^*$ pada pembahasan sebelumnya , dengan mengsubstitusikan persamaan (3.19) ke dalam persamaan (3.11) diperoleh hasil:

$$\widehat{\gamma}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} \widehat{U}_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i r_i^* m_i^*} = \frac{\widehat{\widehat{m}}_k}{\widehat{m}^*} \tag{3.20}$$

pada pembahasan sebelumnya telah dilakukan *smoothing* terhadap $\widehat{\widehat{m}}_k$ yang menghasilkan $\widehat{m}_k^*$, sehingga diperoleh:

$$\widehat{\gamma}_k^* = \frac{\widehat{m}_k^*}{\widehat{m}^*} \tag{3.21}$$

yang mengakibatkan persamaan (3.12) menjadi

$$\hat{z}_k^* = \hat{\gamma}_1^* + \hat{\gamma}_2^* + \cdots + \hat{\gamma}_k^*. \quad (3.22)$$

3.7 Prediksi Error Cadangan Klaim BORNHUETTER-FERGUSON

Peramalan cadangan klaim merupakan proses yang bersifat estimasi, yakni memprediksi besarnya cadangan klaim yang terjadi untuk masa yang akan datang. Demikian sehingga dalam hal ini diperlukan suatu ukuran untuk memperlihatkan keakuratan dari prediksi tersebut. Salah satu alat ukur keakuratan hasil prediksi adalah *prediction error* yang merupakan akar dari *mean square error of prediction* (MSEP). *Mean square error of prediction* pada estimasi cadangan klaim dapat di aproksimasikan dengan perumusan berikut:

$$MSEP(\hat{R}_i) = E\left(\left(\hat{R}_i - R_i\right)^2\right) \quad (3.23)$$

adapun hasil dari *prediction of error* dinyatakan dengan perumusan berikut

$$PE(\hat{R}_i^{BF}) = \sqrt{msep(\hat{R}_i^{BF})} \quad (3.24)$$

dan dalam persentase dinyatakan dengan

$$\%PE(\hat{R}_i^{BF}) = \frac{PE(\hat{R}_i^{BF})}{\hat{R}_i^{BF}} * 100\% \quad (3.25)$$

Berdasarkan Asumsi pertama yang dicantumkan pada subBAB 3.3 bahwa $R_i = S_{i,n+2-i} + \cdots + S_{i,n+1}$ saling bebas terhadap $S_{i,1}, \ldots, S_{i,n+1-i}$. Hal ini juga berlaku pada estimasi cadangan klaim, yaitu $\hat{R}_i^{BF}$ saling bebas terhadap $S_{i,1}, \ldots, S_{i,n+1-i}$. Berdasarkan rumus (3.23) dapat ditentukan cadangan klaim metode BF . Misalkan $\hat{R}_i^{BF}$ adalah estimasi cadangan BF, maka prediksi MSEP cadangan BF adalah

$$MSEP(\hat{R}_i) = E\left(\left(\hat{R}_i^{BF} - R_i\right)^2\right) = Var\left(\hat{R}_i^{BF} - R_i\right) + \left(E\left(\hat{R}_i^{BF}\right) - E(R_i)\right)^2 \quad (3.26)$$

Karena $\hat{R}_i^{BF}$ adalah estimator yang tidak bias terhadap R_i , maka $E\left(\hat{R}_i^{BF}\right) \approx E(R_i)$, sehingga $E\left(\hat{R}_i^{BF}\right) - E(R_i) = 0.$

Bukti : $E\left(\hat{R}_i^{BF}\right) = E\left((1 - \hat{z}_{n+1-i})\, \hat{U}_i\right)$

$$= E(1 - \hat{z}_{n+1-i})\, E\left(\hat{U}_i\right)$$

$$= (1 - z_{n+1-i})\, x_i$$

$$= E(R_i)$$

Dengan demikian prediksi MSEP dari cadangan klaim pada *accident period* ke–*i* adalah

$$MSEP\left(\hat{R}_i\right) = E\left(\left(\hat{R}_i^{BF} - R_i\right)^2\right) = Var\left(\hat{R}_i^{BF} - R_i\right) = Var\left(\hat{R}_i^{BF}\right) + Var(R_i) \tag{3.27}$$

Berdasarkan perumusan (3.25) dapat diketahui bahwa ada dua variansi yang harus diprediksi ,yaitu $Var\left(\hat{R}_i^{BF}\right)$ atau biasa disebut *estimation error* dan $Var(R_i)$ atau disebut sebagai *process error* (Alai, 2009).

Untuk *process error* telah diketahui sebagai berikut,

$$Var(R_i) = x_i(s_{n+2-i}^2 + \cdots + s_{n+1}^2). \tag{3.28}$$

Yang akan di estimasikan oleh

$$\widehat{Var}(R_i) = \hat{U}_i(s_{n+2-i}^{2*} + \cdots + s_{n+1}^{2*}). \tag{3.29}$$

Untuk *estimation error* dari $\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{z}^*{}_{n+1-i})\, \hat{U}_i$, gunakan rumus dari

$$Var(XY) = \left(E(X)\right)^2 Var(Y) + Var(X)Var(Y) + Var(X)\left(E(Y)\right)^2$$

Bukti:

$$Var(XY) = E[(XY)^2] - \left[E[XY]\right]^2$$

$$= E(X^2)E(Y^2) - \left[E[X]\right]^2\left[E[Y]\right]^2$$

$$= (Var(X) + \left[E[X]\right]^2)(Var(Y) + \left[E[Y]\right]^2) - \left[E[X]\right]^2\left[E[Y]\right]^2$$

$$= \left(E(X)\right)^2 Var(Y) + Var(X)Var(Y) + Var(X)\left(E(Y)\right)^2$$

Untuk X dan Y variabel acak bebas dan diperoleh

$$\begin{aligned} Var\left(\hat{R}_i^{BF}\right) &= \left(E\left(\widehat{U}_i\right)\right)^2 Var(\hat{z}^*_{n+1-i}) + Var\left(\widehat{U}_i\right)Var(\hat{z}^*_{n+1-i}) \\ &\quad + Var\left(\widehat{U}_i\right)\left(1 - E(\hat{z}^*_{n+1-i})\right)^2 \\ &= \left(x_i^2 + Var\left(\widehat{U}_i\right)\right) Var(\hat{z}^*_{n+1-i}) + Var\left(\widehat{U}_i\right)(1 - \hat{z}^*_{n+1-i})^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Telah dikemukakan sebelumnya bahwa $\widehat{U}_i$ adalah estimator untuk x_i dan $\hat{z}^*_{n+1-i}$ adalah estimator untuk z_{n+1-i} , tahap berikutnya mengestimasi $Var(\widehat{U}_i)$ dan $Var(\hat{z}^*_{n+1-i})$.

Menurut Mack(2008) bahwasannya *Standard Error* $s.e.(\widehat{U}_i)$ merupakan estimasi untuk $\sqrt{Var(\widehat{U}_i)}$,dan untuk menghitung nilai $Var(\widehat{U}_i)$ cukup dengan hanya menghitung $s.e.(\widehat{U}_i)$ yang didefinisikan sebagai berikut,

$$(s.e.(\widehat{U}_i))^2 = \frac{v_i}{n-1}\sum_{j=1}^{n} v_j \left(\frac{\widehat{U}_j}{v_j} - \hat{q}\right)^2 \; dengan \; \hat{q} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \widehat{U}_j}{\sum_{j=1}^{n} v_j}. \tag{3.31}$$

dimana,

v_i= Besarnya jumlah premium/premi yang diperoleh pada periode kejadian ke-*i*.

$\widehat{U}_j$ =*Ultimate Loss* pada period ke-*j*

$\hat{q}$ = *prior Ultimate Loss Estimate*

Akan tetapi bila terjadi *premium cycle* (perputaran harga pasar yang melonjak) yang dapat dilihat dari hasil ULR , sebaiknya menyiasatinya menggunakan nilai koefisien variansi dari klaim *Ultimate Loss* yang dihitung menggunakan rumus

$$c.v.\left(\widehat{U}_i\right) = \frac{s.e.\left(\widehat{U}_i\right)}{\widehat{U}_i} = \frac{\sqrt{(s.e.(\hat{\gamma}_1^*)\,)^2 + \cdots + (s.e.(\hat{\gamma}_{n+1}^*)\,)^2}}{\hat{\gamma}_1^* + \cdots + \hat{\gamma}_{n+1}^*} \qquad (3.32)$$

Bukti:

Berdasarkan rumus (3.19) dan $\hat{z}_{n+1}^* = \hat{\gamma}^*_1 + \hat{\gamma}^*_2 + \cdots + \hat{\gamma}^*_{n+1} = 1$, mengakibatkan

$$\widehat{U}_i = v_i r_i^* m^* \ = \ v_i r_i^* m^*\ 1 = v_i r_i^* m^*\ (\hat{\gamma}^*_1 + \hat{\gamma}^*_2 + \cdots + \hat{\gamma}^*_{n+1}).$$

Varians dari *Ultimate Loss* ($\widehat{U}_i$) adalah

$$Var\left(\widehat{U}_i\right) = Var\Big(v_i r_i^* m^*\ (\hat{\gamma}^*_1 + \hat{\gamma}^*_2 + \cdots + \hat{\gamma}^*_{n+1})\Big)$$

$$= (v_i r_i^* m^*\ )^2 Var\big((\hat{\gamma}^*_1 + \hat{\gamma}^*_2 + \cdots + \hat{\gamma}^*_{n+1})\big)$$

Berdasarkan asumsi BF1 yang menyatakan bahwa $\hat{\gamma}^*_1 + \hat{\gamma}^*_2 + \cdots + \hat{\gamma}^*_{n+1}$ saling bebas, mengakibatkan

$$Var\left(\widehat{U}_i\right) = (v_i r_i^* m^*\ )^2 Var\big((\hat{\gamma}^*_1 + \hat{\gamma}^*_2 + \cdots + \hat{\gamma}^*_{n+1})\big)$$

$$= (v_i r_i^* m^*\ )^2 \big(Var(\hat{\gamma}^*_1) + Var(\hat{\gamma}^*_2) + \cdots + Var(\hat{\gamma}^*_{n+1})\big)$$

$$\left(s.e\left(\widehat{U}_i\right)\right)^2 = (v_i r_i^* m^*\ )^2 \left(\left(s.e(\hat{\gamma}^*_1)\right)^2 + \left(s.e(\hat{\gamma}^*_2)\right)^2 + \cdots + \left(s.e(\hat{\gamma}^*_{n+1})\right)^2\right)$$

$$s.e\left(\widehat{U}_i\right) = \sqrt{\left(v_i r_i^* m^*\ \right)^2 \left(\left(s.e(\hat{\gamma}^*_1)\right)^2 + \left(s.e(\hat{\gamma}^*_2)\right)^2 + \cdots + \left(s.e(\hat{\gamma}^*_{n+1})\right)^2\right)}$$

$$s.e\left(\widehat{U}_i\right) = v_i r_i^* m^*\ \sqrt{\left(\left(s.e(\hat{\gamma}^*_1)\right)^2 + \left(s.e(\hat{\gamma}^*_2)\right)^2 + \cdots + \left(s.e(\hat{\gamma}^*_{n+1})\right)^2\right)}$$

Subtitusikan kedalam persamaan

$$c.v.\left(\widehat{U}_i\right) = \frac{s.e.\left(\widehat{U}_i\right)}{\widehat{U}_i}$$

Sehingga diperoleh

$$c.v.\left(\widehat{U}_i\right)=\frac{v_i r_i^* m^* \sqrt{\left(\left(s.e(\hat{\gamma}^*_1)\right)^2+\left(s.e(\hat{\gamma}^*_2)\right)^2+\cdots+\left(s.e(\hat{\gamma}^*_{n+1})\right)^2\right)}}{v_i r_i^* m^*\ (\hat{\gamma}^*_1+\hat{\gamma}^*_2+\cdots+\hat{\gamma}^*_{n+1})}$$

$$c.v.\left(\widehat{U}_i\right)=\frac{s.e.(\widehat{U}_i)}{\widehat{U}_i}=\frac{\sqrt{(s.e.(\hat{\gamma}_1^*)\ )^2+\cdots+(s.e.(\hat{\gamma}_{n+1}^*)\ )^2}}{\hat{\gamma}_1^*+\cdots+\hat{\gamma}_{n+1}^*}$$

kemudian nilai $s.e.(\widehat{U}_i)$ diperoleh dengan mengalikan koefisien variansi dari klaim *Ultimate Loss* dengan jumlah *Ultimate Loss.*

Dimana,

$$\hat{\gamma}_1^* \approx \hat{\hat{\gamma}}_k \approx \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} x_i} \tag{3.33}$$

dengan

$$Var\left(\hat{\gamma}_k\ \right)\approx Var\left(\frac{\sum_{j=1}^{n+1-k} S_{i,k}}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j}\right)=\frac{s_k^2}{\sum_{j=1}^{n+1-k} x_j}, untuk\ 1\le k\le n. \tag{3.34}$$

Karena $\hat{\gamma}_k$ telah di-*smoothing* dan menghasilkan $\hat{\gamma}_k^*$,maka $Var\left(\hat{\gamma}_k\ \right)$ ubah menjadi $Var(\hat{\gamma}_k^*)$ yang diestimasikan dengan persamaan berikut

$$(s.e.(\hat{\gamma}_k^*))^2=\frac{s_k^{2*}}{\sum_{j=1}^{n+1-k}\widehat{U}_j}, untuk\ 1\le k\le n. \tag{3.35}$$

Secara bersamaan akan dilakukan pengestimasian untuk $(s.e.(\hat{z}_k^*))^2$ untuk $(\hat{z}_k^*)$, dengan bentuk persamaan sebagai berikut

$$\left(s.e.(\hat{z}_k^*)\right)^2=\min\left(\left(s.e.(\hat{\gamma}_1^*)\right)^2+\cdots+\left(s.e.(\hat{\gamma}_k^*)\right)^2,\left(s.e.(\hat{\gamma}_{k+1}^*)\right)^2+\cdots+\left(s.e.(\hat{\gamma}_{n+1}^*)\right)^2\right), \tag{3.36}$$

pada saat nilai $\hat{z}_{n+1}^*=1$ mengakibatkan $s.e.(\hat{z}_{n+1}^*)=s.e.(1)=0.$

Pada akhirnya diperoleh estimator untuk MSEP yang diformulasikan sebagai berikut:

$$msep\left(\hat{R}_i^{BF}\right) = \hat{U}_i(s_{n+2-i}^{2*} + \cdots + s_{n+1}^{2*}) + \left(\hat{U}_i^2 + (s.e.\left(\hat{U}_i\right))^2\right)(s.e.(\hat{z}_{n+1-i}^*))^2 + (s.e.\left(\hat{U}_i\right))^2(1 - \hat{z}_{n+1-i}^*)^2 \tag{3.37}$$

3.8 *Prediction Error* Total Cadangan Klaim BORNHUETTER-FERGUSON

Untuk cadangan total $R = R_1 + \cdots + R_n$ dan merupakan taksiran yang tak bias dari $R^{BF} = \hat{R}_1^{BF} + \cdots + \hat{R}_n^{BF}$, maka *mean squared error of prediction*-nya adalah

$$msep\left(\hat{R}^{BF}\right) = Var\left(\hat{R}^{BF}\right) + Var(R\quad) \tag{3.38}$$

dengan *process error*-nya $Var(R\quad) = Var(R_1) + \cdots + Var(R_n)$, berdasarkan keindependesian pada setiap tahun kejadian (Asumsi BF1) diperoleh

$$\hat{V}ar(R) = \sum_{i=1}^{n} \hat{U}_i\,(s_{n+2-i}^{2*} + \cdots + s_{n+1}^{2*}) \tag{3.39}$$

Untuk *Estimation error* $\widehat{Var}\left(\hat{R}^{BF}\right)$ lebih sulit dikarenakan $\hat{R}_1^{BF}, \ldots, \hat{R}_n^{BF}$ berkorelasi positif melalui estimasi parameter $\hat{\gamma}_k^*$. Maka dari itu diperoleh

$$Var(\hat{R}^{BF}) = \sum_{i=1}^{n} Var(\hat{R}_i^{BF}) + 2\sum_{i<j} Cov(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}) \tag{3.40}$$

Untuk $Cov\left(\hat{R}_i^{BF}, \hat{R}_j^{BF}\right) = Cov\left(\hat{U}_i(1 - \hat{z}^*{}_{n+1-i}), \hat{U}_j\left(1 - \hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)\right)$ menggunakan rumus umum

$$Cov(XY, WZ) = Cov(X, W)E(Y)E(Z) + Cov(X, W)Cov(Y, Z) + E(X)E(W)Cov(Y, Z)$$

Untuk variabel acak bebas X, Y, W, Z, dimana {X,W} dan {Y,Z} saling bebas. Maka dberdasarkan sifat diatas ,diperoleh :

$$Cov\left(\widehat{U}_i(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i}),\widehat{U}_j\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)\right)$$
$$= Cov\left(\widehat{U}_i,\widehat{U}_j\right)E(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})E\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)$$
$$+ Cov\left(\widehat{U}_i,\widehat{U}_j\right)Cov\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i},1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)+E\left(\widehat{U}_i\right)E\left(\widehat{U}_j\right)Cov(1$$
$$-\hat{z}^*{}_{n+1-i},1-\hat{z}^*{}_{n+1-j})$$

(3.41)

Setelah itu ubah bentuk $Cov\left(\widehat{U}_i,\widehat{U}_j\right)$ dan $Cov(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i},1-\hat{z}^*{}_{n+1-j})$ menjadi,

$$\rho_{ij}^U = \frac{Cov\left(\widehat{U}_i,\widehat{U}_j\right)}{\sqrt{Var\left(\widehat{U}_i\right)Var\left(\widehat{U}_j\right)}} \qquad (3.42)$$

dan

$$\rho_{ij}^z = \frac{Cov(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i},1-\hat{z}^*{}_{n+1-j})}{\sqrt{Var(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})Var\left(,1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)}}, \qquad (3.43)$$

maka diperoleh hasil persamaan,

$$Cov\left(\widehat{U}_i(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i}),\widehat{U}_j\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)\right)$$
$$= \rho_{ij}^U\sqrt{Var\left(\widehat{U}_i\right)Var\left(\widehat{U}_j\right)}E(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})E\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)$$
$$+ Cov\left(\widehat{U}_i,\widehat{U}_j\right)Cov\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i},1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)$$
$$+ \rho_{ij}^z\sqrt{Var(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})Var\left(,1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)}E\left(\widehat{U}_i\right)E\left(\widehat{U}_j\right)$$

(3.44)

menurut Mack (2008), nilai $Cov\left(\widehat{U}_i,\widehat{U}_j\right)Cov\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i},1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)\approx 0$, dikarenakan keindependensian {X,Y} dan {W,Z}

Oleh karena itu diperoleh hasil

$$Cov\left(\widehat{U}_i(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i}),\widehat{U}_j\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)\right)$$
$$=\rho_{ij}^U\sqrt{Var\left(\widehat{U}_i\right)Var\left(\widehat{U}_j\right)}E(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})E\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)$$
$$+\rho_{ij}^z\sqrt{Var(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})Var\left(,1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)}E\left(\widehat{U}_i\right)E\left(\widehat{U}_j\right)$$

(3.45)

Menurut Mack(2008) nilai $\hat{\rho}_{ij}^U$ dan $\hat{\rho}_{ij}^z$ diperoleh dari hasil kalkulasi

$$\hat{\rho}_{ij}^U=\frac{1}{1+|i-j|} \qquad (3.46)$$

dan

$$\hat{\rho}_{ij}^z=\frac{1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})}{1-\hat{z}^*{}_{n+1-i}(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j})}\ , untuk\ i<j\ dan\ \hat{z}^*{}_1\le\cdots\le\hat{z}^*{}_{n+1}$$

(3.47)

Hasil akhir dari $Cov\left(\hat{R}_i^{BF},\hat{R}_j^{BF}\right)$ diestimasikan dengan persamaan

$$\hat{C}ov\left(\hat{R}_i^{BF},\hat{R}_j^{BF}\right)$$
$$=\hat{\rho}_{ij}^U s.e.\left(\widehat{U}_i\right)s.e.\left(\widehat{U}_j\right)(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)$$
$$+\hat{\rho}_{ij}^z s.e.(1-\hat{z}^*{}_{n+1-i})s.e.\left(1-\hat{z}^*{}_{n+1-j}\right)\left(\widehat{U}_i\right)\left(\widehat{U}_j\right).$$

(3.48)