BAB III
REPRESENTASI GELFAND-NAIMARK-SEGAL

Pada bagian ini akan dibahas konsep yang terkait dengan representasi yaitu homomorfisma-*, representasi *nondegenerate*, representasi *faithful*, representasi *siklik*, dan lemma-lemma untuk mengkonstruksi suatu representasi. Selanjutnya akan dibahas bagaimana mengkonstruksi representasi Gelfand-Naimark-Segal.

3.1 Representasi

Definisi 3.1.1: Homomorfisma-* (Murphy, 1990:36)
Misalkan A dan B adalah aljabar-*. Jika suatu homomorfisma ϕ mengawetkan adjoin, yaitu $\phi(a^*) = \left(\phi(a)\right)^*$, maka ϕ disebut homomorfisma-*.

Definisi 3.1.2: Representasi di Aljabar-C^* (Raeburn, 1997:35)
Misalkan A aljabar-C^* dengan unsur kesatuan 1. Representasi dari A adalah pasangan $(\pi, \mathcal{H})$ yang terdiri atas ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dan homomorfisma-* $\pi: A \longrightarrow B(\mathcal{H})$.

Definisi 3.1.3: *Nondegenerate* (Raeburn, 1997:35)
Suatu representasi π dikatakan *nondegenerate* jika $\pi(1) = 1$, secara umum π dikatakan nondegenerate jika $\text{span}\{\pi(a)(h): a \in A, h \in \mathcal{H}\}$ padat di $\mathcal{H}$ artinya $\overline{\text{span}\{\pi(a)(h): a \in A, h \in \mathcal{H}\}} = \mathcal{H}$.

Definisi 3.1.4: *Faithful* (Raeburn, 1997:35)
Suatu representasi π dikatakan *faithful* jika $\ker \pi = \{0\}$ $(\pi\ injektif)$.

Definisi 3.1.4: Siklik (Raeburn, 1997:35)
Suatu representasi π dikatakan siklik jika terdapat vektor ξ di $\mathcal{H}$, sehingga $\overline{\text{span}}\{\pi(a)(\xi) : a \in A\} = \mathcal{H}$.

Teorema Gelfand-Naimark-Segal adalah gagasan yang sangat penting dalam teori aljabar. Gagasan utama dari teorema ini menyatakan bahwa setiap aljabar-C^* isomorfik secara isometri dengan suatu aljabar-C^* dari operator-operator terbatas pada ruang Hilbert.

Pada bab ini akan dibahas Teorema Gelfand-Naimark-Segal beserta bukti konstruktifnya. Berikut ini adalah teorema yang dimaksud.

3.2 Konstruksi Gelfand-Naimark-Segal

Teorema 3.2.1: *Jika A suatu aljabar-C^* dengan unsur kesatuan 1 dan f suatu fungsional positif pada A, maka terdapat sebuah representasi π dari A pada suatu ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dan sebuah vektor $\xi \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga*

$$f(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle \text{ untuk semua } a \in A,$$

dan $\text{span}\{\pi(a)\xi : a \in A\}$ *adalah padat di $\mathcal{H}$,artinya* $\overline{\text{span}}\{\pi(a)\xi : a \in A\} = \mathcal{H}$.

Sebelum menyajikan bukti dari teorema di atas, terlebih dahulu akan dibahas beberapa lemma dan konsep yang diperlukan. Bukti dari ***Teorema 3.2.1*** akan diberikan pada bagian terakhir bab ini.

Misalkan A aljabar-C^* dengan unsur kesatuan 1 dan misalkan pula f suatu fungsional positif pada A.

Kemudian misalkan $L(A) := \{\phi: A \longrightarrow A | \phi \text{ pemetaan linear}\}$, di bawah operasi penjumlahan, perkalian skalar titik demi titik dan operasi komposisi, $L(A)$ adalah suatu aljabar. Sekarang definisikan,

$$\pi_0 : A \longrightarrow L(A),\ \pi_0(a)(b) := ab.$$

Misalkan $a \in A$ sembarang. Karena $\forall\, a, b, c \in A$,

$$\pi_0(a)(b + c) = a(b + c) = ab + ac = \pi_0(a)(b) + \pi_0(a)(c),$$

dan untuk sembarang skalar λ, berlaku

$$\pi_0(a)(\lambda b) = a\lambda b = \lambda ab = \lambda\, \pi_0(a)(b),$$

maka $\pi_0(a)$ linear.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa π_0 adalah linear. Karena

$$\pi_0(a + b)(c) = (a + b)c = ac + bc = \pi_0(a)(c) + \pi_0(b)(c)$$

dan untuk sembarang skalar α, berlaku

$$\pi_0(\alpha a)(b) = \alpha ab = \alpha\, \pi_0(a)(b) \qquad \forall b, c \in A,$$

maka π_0 linear.

Selanjutnya π_0 adalah suatu homomorfisma, karena π_0 linear dan memenuhi

$$\pi_0(ab)(c) = (ab)c = a(bc) = \pi_0(a)(bc) = \pi_0(a) \circ \big(\pi_0(b)(c)\big) \quad \forall a, b, c \in A,$$

artinya $\pi_0(ab) = \pi_0(a) \circ \pi_0(b)$.

Dengan demikian π_0 suatu homomorfisma aljabar dari A ke $L(A)$.

Lemma berikut mengaitan suatu fungsional linear positif f dengan suatu $pairing$ ($[\cdot\,,\ \cdot]$) sebagai pra hasilkali dalam.

Lemma 3.2.2: *Misalkan A suatu aljabar-C^* dan f suatu fungsional linear positif pada A.*

Definisikan

$[\cdot\,,\ \cdot]: A \times A \longrightarrow \mathbb{C}$ *dengan* $[a|b] \coloneqq f(b^*a)\ \ \forall a, b \in A.$

maka

(i) $[\cdot\,,\ \cdot]$ *linear di bagian* a,

(ii) $[\cdot\,,\ \cdot]$ *konjuget- linear di bagian* b,

(iii) $\overline{[a|b]} = [b|a] \quad \forall a, b \in A$,

(iv) $[a|a] \geq 0$.

Bukti:

(i) Sekarang akan diperlihatkan bahwa $[\cdot\,,\ \cdot]$ linear di bagian a.

Untuk setiap $a_1, a_2, b \in A$ dan skalar λ, berlaku

$$\begin{aligned}[a_1 + a_2|b] &= f\big(b^*(a_1 + a_2)\big),\\ &= f(b^*a_1 + b^*a_2),\\ &= f(b^*a_1) + f(b^*a_2),\\ &= [a_1|b] + [a_2|b].\end{aligned}$$

Kemudian untuk sembarang λ, diperoleh

$$\begin{aligned}[\lambda a|b] &= f(b^*(\lambda a)),\\ &= \lambda f(b^*a),\\ &= \lambda[a|b].\end{aligned}$$

Jadi, $[\cdot\,,\ \cdot]$ linear di bagian a.

(ii) Sekarang akan diperlihatkan bahwa $[\cdot\,,\ \cdot]$ konjuget-linear di bagian b.

Untuk setiap $b_1, b_2, a \in A$ dan skalar â, berlaku

$$\begin{aligned}[a|b_1 + b_2] &= f((b_1 + b_2)^* a),\\ &= f((b_1{}^* + b_2{}^*)a),\\ &= f(b_1{}^* a) + f(b_2{}^* a),\\ &= [a|b_1] + [a|b_2].\end{aligned}$$

Kemudian untuk $\beta \in \mathbb{C}$, maka

$$\begin{aligned}[a|\beta b] &= f((\beta b)^* a),\\ &= f(b^* \bar{\beta} a),\\ &= \bar{\beta}[a|b].\end{aligned}$$

Jadi, $[\cdot\,,\ \cdot]$ konjuget- linear di bagian b.

Dengan demikian, $[\cdot\,,\ \cdot]$ merupakan pemetaan *sesquilinear*.

(iii) Berdasarkan ***Teorema 2.10.3 (2)*** diperoleh

$$\overline{[a|b]} = \overline{f(b^* a)} = \overline{(\overline{f(a^* b)})} = f(a^* b) = [b|a].$$

Jadi, $\overline{[a|b]} = [b|a] \quad \forall a, b \in A$.

(iv) Kemudian $[a|a] = f(a^* a) \geq 0$, karena f fungsional positif. ■

Setelah pengaitan tersebut, selanjutnya akan dibahas lemma mengenai subruang dari A.

Lemma 3.2.3: *Misalkan* $N \coloneqq \{b \in A :\ [b|b] = 0\} = \{b \in A : f(b^* b) = 0\}$, *maka* $b \in N$ *jika dan hanya jika* $[a|b] = 0$ *, untuk semua* $a \in A$.

Bukti:

($\Longleftarrow$) Jika $[a|b] = 0$ untuk semua $a \in A$, maka jelas terdapat $b \in A$ sedemikian sehingga $[b|b] = 0$.

($\Longrightarrow$) Jika $b \in N$, maka ketaksamaan Cauchy-Schwartz pada ***Teorema 2.10.3 (2)*** mengakibatkan

$$|f(b * a)|^2 \leq f(a^* a) f(b^* b),$$

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(b * a)|^2 \quad &\leq f(a^* a) f(b^* b),\\ 0 \leq |[a|b]|^2 \quad &\leq [a|a][b|b],\\ 0 \leq |[a|b]|^2 \quad &\leq [a|a][b|b] = 0 \text{ (karena } b \in N\text{)},\end{aligned}$$

$$0 \le |[a|b]|^2 \qquad \le 0.$$

Maka, $[a|b] = 0$, untuk semua $a \in A$.

Dengan demikian, $b \in N$ jika dan hanya jika $[a|b] = 0$, untuk semua $a \in A$. ■

Dengan memanfaatkan subruang pada lemma sebelumnya, selanjutnya akan dikonstruksi suatu ruang vektor kuosien.

Akibat 3.2.4: *N subruang dari A, akibatnya A/N ruang vektor kuosien.*

Bukti:

Pandang kembali

$$N := \{b \in A : [b|b] = 0\} = \{b \in A : f(b^*b) = 0\}.$$

Akan ditunjukkan N subruang dari A.

Pertama, akan dibuktikan $N \neq \emptyset$. Ambil $a \in A$, karena f fungsional positif, diperoleh $f(a^*a) \ge 0$. Pilih $0 \in A$, maka $f(0^*0) = f(0) = 0$. Maka terdapat $0 \in N$ sehingga $N \neq \emptyset$.

Selanjutnya akan dibuktikan N subhimpunan dari A. Berdasarkan definisi, $N := \{b \in A : [b|b] = 0\} = \{b \in A : f(b^*b) = 0\}$, maka jelas bahwa $N \subseteq A$ artinya N merupakan subhimpunan dari A.

Kemudian akan dibuktikan bahwa

$$a + b \in N \quad \forall a, b \in N.$$

Pilih $a, b \in N$, artinya $[a|a] = f(a^*a) = 0$ dan $[b|b] = f(b^*b) = 0$.

Dengan memanfaatkan ***Lemma 3.2.3*** maka diperoleh

$$\begin{aligned} [a+b|a+b] = f((a+b)^*(a+b)) \quad &= f((a^*+b^*)(a+b)), \\ &= f(a^*a + a^*b + b^*a + b^*b), \\ &= f(a^*a) + f(a^*b) + f(b^*a) + f(b^*b), \\ &= 0 + 0 + 0 + 0, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, $a + b \in N \quad \forall a, b \in N$.

Kemudian untuk sembarang λ, diperoleh

$$\begin{aligned} [\lambda a|\lambda a] = f\big((\lambda a)^*(\lambda a)\big) \quad &= (\bar{\lambda})(\lambda) f(a^*a), \\ &= |\lambda|^2(0), \end{aligned}$$

$$= 0.$$

Jadi, $\lambda a \in N \quad \forall a \in N$.

Dengan demikian, N merupakan subruang dari A.

Akibatnya $A/N \coloneqq \{a + N | a \in A\}$ suatu ruang vektor kuosien dengan

$\lambda(a + N) + \mu(b + N) = (\lambda a + \mu b) + N \quad \forall a, b \in N, \lambda$ skalar. ■

Selanjutnya akan dikonstruksi suatu hasilkali dalam untuk ruang vektor kuosien A/N.

Lemma 3.2.5: *Pengaitan* $\langle \cdot\, ,\cdot \rangle\colon\ A/N \times A/N \longrightarrow \mathbb{C}$

dengan $\langle a + N, b + N\rangle \coloneqq [a|b] \coloneqq f(b^*a)$, *adalah hasilkali dalam pada* A/N.

Bukti:

Akan dibuktikan suatu pemetaan , yaitu jika $x_1 = x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Ambil $(a_1 + N), (a_2 + N), (b_1 + N), (b_2 + N) \in A/N$. Untuk sembarang $n, m \in N$, Jika $(a_1 + n) = (a_2 + m)$ dan $(b_1 + n) = (b_2 + m)$, harus dibuktikan

$$\langle a_1 + n, b_1 + n\rangle = \langle a_2 + m, b_2 + m\rangle.$$

Sehingga diperoleh

$(a_1 + n) = (a_2 + m)$ dan $(b_1 + n) = (b_2 + m)$,

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad [a_1 + n|b_1 + n] &= [a_2 + m|b_2 + m],\\
\Leftrightarrow \quad f((b_1 + n)^*(a_1 + n)) &= f((b_2 + m)^*(a_2 + m)),\\
\Leftrightarrow \quad f((b_1^* + n^*)(a_1 + n)) &= f((b_2^* + m^*)(a_2 + m)),\\
\Leftrightarrow \quad f(b_1^*a_1 + b_1^*n + n^*a_1 + n^*n) &= f(b_2^*a_2 + b_2^*m + m^*a_2 + m^*m),\\
\Leftrightarrow \quad f(b_1^*a_1) + f(b_1^*n) + f(n^*a_1) + f(n^*n) &= f(b_1^*a_1) + f(b_1^*m) + f(m^*a_1) + f(m^*m),\\
\Leftrightarrow \quad f(b_1^*a_1) + \overline{f(n^*a_1)} + f(n^*a_1) + f(n^*n) &= f(b_1^*a_1) + \overline{f(m^*a_2)} + f(m^*a_1) + f(m^*m),\\
\Leftrightarrow \quad f(b_1^*a_1) + 0 + 0 + 0 &= f(b_2^*a_2) + 0 + 0 + 0,\\
\Leftrightarrow \quad f(b_1^*a_1) &= f(b_2^*a_2),\\
\Leftrightarrow \quad [a_1|b_1] &= [a_2|b_2],\\
\Leftrightarrow \quad \langle a_1 + n, b_1 + n\rangle &= \langle a_2 + m, b_2 + m\rangle.
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk sembarang $n, m \in N$, maka berlaku juga untuk

$$\langle a_1 + N, b_1 + N\rangle = \langle a_2 + N, b_2 + N\rangle.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $[\cdot\,,\,\cdot]$ memenuhi sifat-sifat hasilkali dalam, yaitu :

(1) $\langle a+N, a+N\rangle \geq 0$, dengan $\langle a+N, a+N\rangle = 0 \Leftrightarrow (a+N) = 0$,

(2) $\langle a+N, b+N\rangle = \overline{\langle b+N, a+N\rangle}$,

(3) $\langle (a+b)+N, c+N\rangle = \langle a+N, c+N\rangle + \langle b+N, c+N\rangle$, dan

(4) $\langle \alpha a+N, b+N\rangle = \alpha\langle a+N, b+N\rangle$.

$\forall a, b \in A, a+N, b+N, c+N \in A/N$ dan skalar λ.

Untuk membuktikan (1),

ingat bahwa f fungsional positif, maka $\langle a+N, a+N\rangle \coloneqq [a|a] \coloneqq f(a^*a) \geq 0$.

Jadi, $\langle a+N, a+N\rangle \geq 0$.

Selanjutnya, bila $\langle a+N, a+N\rangle = 0$ maka $f(a^*a) = 0$, artinya $a \in N$, $a+N = N$ merupakan vektor nol di A/N.

Kemudian misalkan $a+N=0$ maka $\langle a+N, a+N\rangle = f(a^*a) = f(0^*0) = f(0) = 0$.

Untuk membuktikan (2),

ingat bahwa $f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}$, maka $[a|b] = \overline{[b|a]}$ dan juga

$$\langle a+N, b+N\rangle = \overline{\langle b+N, a+N\rangle}.$$

Untuk membuktikan (3),

ingat bahwa,

$$\begin{aligned}\langle (a+b)+N, c+N\rangle = [a+b|c] \quad &= f(c^*(a+b)),\\ &= f(c^*a+c^*b),\\ &= f(c^*a)+f(c^*b),\\ &= [a|c]+[b|c],\\ &= \langle a+N, c+N\rangle + \langle b+N, c+N\rangle.\end{aligned}$$

Untuk membuktikan (4),

ingat bahwa,

$$\begin{aligned}\langle \alpha a+N, b+N\rangle = [\alpha a|b] &= f(b^*(\alpha a)),\\ &= \alpha f(b^*a),\\ &= \alpha[a|b],\end{aligned}$$

$$= \alpha\langle a + N, b + N\rangle.$$

Karena memenuhi (1), (2), (3), dan (4) , maka $\langle\cdot,\cdot\rangle$ merupakan hasilkali dalam pada A/N.

Jadi, A/N merupakan suatu Ruang Hasilkali Dalam. ■

Selanjutnya akan dikonstruksi suatu pemetaan retriksi dari N ke N yang melibatkan $\pi_0(a)$.

***Lemma* 3.2.6**: *$\forall\, a \in A$ dan $\forall\, n \in N$,diperoleh $\pi_0(a)(n) = an$ yaitu suatu pemetaan dari N ke N.*

Bukti:

Perhatikan bahwa,

$$f\big((an)^*(an)\big) = f(n^*(a^*an)), \text{ dan}$$

$$0 \leq \left|f\big(n^*(a^*an)\big)\right|^2 \leq f(n^*n)f((a^*an)^*(a^*an)),$$

$$0 \leq \left|f\big(n^*(a^*an)\big)\right|^2 \leq (0)(f\big((a^*an)^*(a^*an)\big))\ (karena\ n \in N),$$

$$0 \leq \left|f\big(n^*(a^*an)\big)\right|^2 \leq 0.$$

Sehingga $f\big(n^*(a^*an)\big) = 0 = f((an)^*(an))$, artinya $an = \pi_0(a)(n) \in N$.

Karena $an = \pi_0(a)(n) \in N$, sehingga dapat dibuat pemetaan

$$\pi_0(a) : N \longrightarrow N$$

$$n \longmapsto \pi_0(a)(n).$$ ■

Setelah diperoleh pemetaan N ke N, dilakukan pengaitan antara pemetaan tersebut dengan pemetaan baru dari suaru ruang vektor kuosien A/N.

***Akibat* 3.2.7:** *Terdapat secara tunggal suatu trasformasi linear*

$$\pi(a) : A/N \longrightarrow A/N,$$

sedemikian sehingga

$$\pi(a)(b + N) = \pi_0(a)(b) + N = ab + N.$$

Bukti:

Misalkan $b + N = \{v \mid v = b + n, n \in N\}$, ambil $v \in b + N$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\pi_0(a)(v) &= \pi_0(a)(b+n),\\ &= a(b+n),\\ &= ab+an,\\ &= \pi_0(a)(b)+\pi_0(a)(n),\\ &= ab+\pi_0(a)(n).\end{aligned}$$

Sehingga $\pi_0(a)(v) = \pi_0(a)(b) + \pi_0(a)(n) = ab + \pi_0(a)(n)$.

Misalkan $w = ab + \pi_0(a)(n)$, maka dapat dibentuk,

$$ab + N = \{w \mid w = ab + \pi_0(a)(n), \pi_0(a)(n) \in N\}$$

Karena $\pi_0(a)(b) = ab \in A$, maka $\pi_0(a)(b) + N = ab + N \in A/N$.

Sehingga diperoleh secara tunggal, suatu transformasi linear

$$\pi(a): A/N \longrightarrow A/N,$$

$$(b+N) \longmapsto (ab+N),$$

dengan $\pi(a)(b+N) = \pi_0(a)(v) = \pi_0(a)(b) + \pi_0(a)(n) = ab + \pi_0(a)(n)$.

Dapat dituliskan juga sebagai

$$\pi(a)(b+N) = \pi_0(a)(b) + N = ab + N. \qquad \blacksquare$$

Berikut ini deperkenalkan beberapa lemma yang akan digunakan untuk memperoleh suatu ruang Hilbert dan operator linear terbatas di ruang Hilbert.

Lemma 3.2.8: *Misalkan A suatu aljabar-C^* dengan elemen 1, dan andaikan a self-adjoint. Maka $0 \le a \le \lambda 1$ jika dan hanya jika $\sigma(a) \subset [0, \lambda]$. Karena $0 \le a \le \lambda 1$, mengakibatkan $\|a\| \le \lambda$, dan diperoleh $\|b\|^2\, 1 - b^* b \ge 0$ untuk semua $b \in A$.*

Lemma 3.2.9: *Untuk sembarang ruang hasilkali dalam X, terdapat suatu ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dan Isomorfisma A dari X ke subruang padat $W \subset \mathcal{H}$. Ruang $\mathcal{H}$ tunggal bergantung pada isomorfismanya.*

Selanjutnya akan dibuktikan suatu teorema mengenai keberadaan suatu operator linear terbatas di ruang Hilbert.

Teorema 3.2.10: *Bila $\pi(a)$ adalah suatu operator linear, terbatas pada A/N, maka terdapat secara tunggal perluasan dari $\pi(a)$ pada lengkapan A/N yang merupakan suatu ruang Hilbert yang linear dan terbatas.*

Bukti:

Akan ditunjukkan $\pi(a)$ linear.

Perhatikan bahwa, untuk $(b+N), (c+N) \in A/N$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
\pi(a)((b+N)+(c+N)) &= \pi(a)((b+c)+N),\\
&= \pi_0(a)(b+c)+N,\\
&= a(b+c)+N,\\
&= (ab+ac)+N,\\
&= (ab+N)+(ac+N),\\
&= (\pi_0(a)(b)+N)+(\pi_0(a)(c)+N),\\
&= \pi(a)(b+N)+\pi(a)(c+N).
\end{aligned}$$

Kemudian untuk sembarang skalar λ diperoleh,

$$\begin{aligned}
\pi(a)\big(\lambda(b+N)\big) &= \pi(a)(\lambda b+N),\\
&= \pi_0(a)(\lambda b)+N,\\
&= \lambda ab+N,\\
&= \lambda(ab+N),\\
&= \lambda(\pi_0(a)(b)+N),\\
&= \lambda\,\pi(a)(b+N).
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $\pi(a)$ terbatas, artinya terdapat $d > 0$, sehingga

$$\|\pi(a)(b+N)\| \le d\,\|b+N\|.$$

Perhatikan bahwa,

$$\|\pi(a)(b+N)\|^2 = \|ab+N\|^2 = \langle ab+N, ab+N\rangle = f((ab)^*(ab)).$$

Perhatikan juga bahwa $f\big((ab)^*(ab)\big) = f(b^*a^*ab)$.

Berdasarkan ***Lemma 3.2.8***, $\|a\|^2\,1 - a^*a$ suatu elemen positif dari A, maka terdapat $c \in A$ sedemikian sehingga $\|a\|^2\,1 - a^*a = c^*c$.

Karena $f\big((cb)^*(cb)\big) = f(b^*c^*cb) \ge 0$, diperoleh

$$f(b^*(\|a\|^2\,1 - a^*a)b) \quad \ge 0,$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & f(b^*(\|a\|^2\, b - a^*ab) && \geq 0,\\
\Leftrightarrow \quad & f(\|a\|^2 b^*b - b^*a^*ab) && \geq 0,\\
\Leftrightarrow \quad & \|a\|^2\, f(b^*b) - f(b^*a^*ab) && \geq 0,\\
\Leftrightarrow \quad & \|a\|^2\, \|b+N\|^2 - \|\pi(a)(b+N)\|^2 && \geq 0,\\
\Leftrightarrow \quad & (\|a\|\|b+N\| - \|\pi(a)(b+N)\|)\,\underbrace{(\|a\|\|b+N\| + \|\pi(a)(b+N)\|)}_{\geq 0} && \geq 0.
\end{aligned}
$$

Maka haruslah $(\|a\|\|b+N\| - \|\pi(a)(b+N)\|) \geq 0$.

Sehingga diperoleh $\|\pi(a)(b+N)\| \leq \|a\|\|b+N\|$.

Jadi, $d = \|a\|$, maka $\|\pi(a)(b+N)\| \leq d\,\|b+N\|$.

Dengan demikian, $\pi(a)$ terbatas.

Kemudian berdasarkan ***Lemma 3.2.9***, lengkapan A/N merupakan suatu ruang Hilbert. Jadi, $\pi(a)$ merupakan operator linear terbatas di lengkapan A/N yang merupakan ruang Hilbert. ■

Dengan menggunakan seluruh lemma pada bab ini, akhirnya sampai pada pembuktian **Teorema 3.2.1** mengenai keberadaan suatu representasi di aljabar-C^*.

Bukti Teorema 3.2.1:

*Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert yang dikonstruksi pada **Teorema 3.2.10**. Untuk setiap $a \in A$, pada **Teorema 3.2.10** telah ditunjukkan bahwa*

$$\pi(a)(b+N) = ab + N$$

adalah operator linear terbatas. Dengan demikian diperoleh pengaitan

$$\pi : A \longrightarrow B(\mathcal{H}),$$
$$a \longmapsto \pi(a).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa π suatu representasi.

Pertama akan ditunjukkan bahwa π linear dan homomorfisma-*.

Ambil $a, b \in A$, maka

$$
\begin{aligned}
\pi(a+b)(c+N) &= (a+b)(c) + N,\\
&= (ac+bc) + N,\\
&= (ac+N) + (bc+N),
\end{aligned}
$$

$$= \pi(a)(c+N) + \pi(b)(c+N),$$
$$= (\pi(a)+\pi(b))(c+N).$$

Sehingga diperoleh $\pi(a+b) = \pi(a) + \pi(b)$. (i)

Untuk sembarang skalar λ, maka

$$\begin{aligned} \pi(\lambda a)(c+N) &= \lambda ac + N, \\ &= \lambda(ac+N), \\ &= \lambda(\pi(a)(c+N)), \\ &= \lambda\pi(a)(c+N). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\pi(\lambda a) = \lambda\pi(a)$. (ii)

Ambil $a, b \in A$, maka

$$\begin{aligned} \pi(ab)(c+N) &= (ab)(c) + N, \\ &= a(bc) + N, \\ &= \pi(a)(bc+N), \\ &= \pi(a)(\pi(b)(c+N)), \\ &= \pi(a)\pi(b)(c+N). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$. (iii)

Kemudian π mengawetkan adjoin, yaitu

$$\begin{aligned} \langle \pi(a^*)(b+N), c+N \rangle &= \langle a^*b + N, c+N \rangle, \\ &= f(c^*(a^*b)), \\ &= f((ac)^*b), \\ &= \langle b+N, (ac)+N \rangle, \\ &= \langle b+N, \pi(a)(c+N) \rangle, \\ &= \langle (\pi(a))^*(b+N), c+N \rangle. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\pi(a^*) = (\pi(a))^*$. (iv)

Dari (i), (ii), (iii), dan (iv), maka π homorfisma-*.

Jadi, $(\pi, \mathcal{H})$ suatu representasi, dimana π homomorfisma-* dan $\mathcal{H}$ ruang Hilbert.

Selanjutnya akan ditunjukkan π suatu representasi siklis.

Ambil $\xi = 1 + N$, maka

$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \langle \pi(a)(1+N), 1+N \rangle = \langle a+N, 1+N \rangle = f(1^*a) = f(a)$, dan

$\mathrm{sp}\{\pi(a)\xi\} = A/N$ padat di $\mathcal{H}$. Karena $\xi = 1 + N$ merupakan vektor siklis, maka π merupakan representasi siklis. ■

Catatan: Bila melibatkan beberapa fungsional linear positif, misalkan f dan g, representasi yang dikaitkan dengan f ditulis dengan π_f dan representasi yang dikaitkan dengan g ditulis dengan π_f.