BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini membahas kesimpulan dan saran dari penelitian yang telah dilakukan. Berikut ini adalah kesimpulan dan saran.

5.1 Kesimpulan

Misalkan barisan $\{x_n\}$ berada pada ruang Hilbert H yang konvergen secara lemah ke x atau $x_n \rightharpoonup x$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, g\rangle = \langle x, g\rangle$ untuk setiap $g \in H$. Sifat-sifat dalam kekonvergenan kuat yang berlaku pada kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert adalah sifat kelinearan limit, ketunggalan limit, dan keterbatasan barisan. Keterkaitan antara barisan yang konvergen secara kuat dan barisan yang konvergen secara lemah pada ruang Hilbert, diantaranya barisan yang konvergen secara kuat mengakibatkan barisan tersebut konvergen secara lemah, tapi tidak sebaliknya. Selanjutnya $x_n \rightharpoonup x$ dan $\|x_n\| \to \|x\|$mengakibatkan $x_n \to x$. Pada ruang berdimensi hingga barisan yang kekonvergenan secara lemah mengakibatkan barisan tersebut kekonvergenan secara kuat. Kemudian, misalkan S adalah himpunan kompak, $\{x_n\} \subset S \subset H$, dan $x_n \rightharpoonup x$, maka $x_n \to x$.

Pendefinisian barisan Cauchy pada topologi lemah dinamakan barisan Cauchy lemah. $\{x_n\}$ dikatakan barisan Cauchy lemah jika $\{\langle x_n, g\rangle\}$ merupakan barisan Cauchy untuk setiap $g \in H$. Setiap barisan Cauchy lemah pada ruang Hilbert terbatas dan konvergen secara lemah.

Himpunan kompak secara barisan adalah himpunan yang setiap barisannya memiliki subbarisan yang konvergen. Pada Teorema 4.2.1 menunjukan bahwa setiap barisan yang kekonvergenan secara kuat selalu mengakibatkan barisan tersebut kekonvergenan secara lemah. Berdasarkan hal tersebut dapat didefinisikan suatu himpunan yang kompak secara barisan dan secara lemah. Jika M adalah himpunan yang kompak secara barisan dan secara lemah maka setiap subbarisan di M memiliki subbarisan yang konvergen secara lemah. Selanjutnya, setiap himpunan yang kompak secara barisan dan secara lemah pada ruang Hilbert adalah terbatas.

Pada ruang Hilbert, ditemukan sebuah fakta bahwa Teorema Bolzano-Weierstrass tidak berlaku jika pendefinisian kekonvergenannya adalah konvergen kuat,tetapi jika pendefinisian kekonvergenannya adalah konvergen lemah maka keberlakuan Teorema Bolzano-Weierstrass pada ruang Hilbert berlaku.

5.2 Saran

Pada penelitian ini membahas mengenai kekonvergenan barisan yang konvergen secara lemah. Untuk melanjutkan penelitian mengenai konvergen lemah, penulis menyarankan untuk meneliti mengenai kekonvergenan operator yang konvergen secara lemah atau menerapkan konsep kekonvergenan lemah pada konsep matematika lainnya, seperti Teorema Kekonvergenan Lemah untuk *strict pseudo-contractions* pada ruang Hilbert.