BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Misalkan H suatu ruang Hilbert dan misalkan pula $\|\cdot\|$ adalah norma yang dibangun oleh suatu hasil kali dalam dengan $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$. Ruang Hilbert H yang dilengkapi dengan $\|\cdot\|$ merupakan ruang vektor bernorma. Pada ruang Hilbert H dapat didefinisikan dua topologi, topologi norma atau topologi kuat dan topologi lemah. Untuk sebarang $x_0 \in H$ dan sebarang $\varepsilon > 0$, Perhatikan himpunan

$$O(x_0;\varepsilon) \coloneqq B_\varepsilon(x_0) = \{x \in H : \|x - x_0\| < \varepsilon\}.$$

$B_\varepsilon(x_0)$ mendefinisikan bola buka pada H. Koleksi dari semua himpunan $O(x_0,\varepsilon)$ adalah topologi norma atau topologi kuat dari H. Sedangkan koleksi dari semua himpunan

$$O(x_0;y,\varepsilon) \coloneqq \{x \in H : |\langle x - x_0, y\rangle| < \varepsilon\}$$

adalah topologi lemah dari H untuk suatu $y \in H$. Topologi lemah lebih lemah dari topologi kuat, dengan begitu penamaan “kuat” dan “lemah” beralasan (Moscovich, 2009, hlm. 1).

Konsep topologi dari H erat kaitannya dengan konsep barisan di H. Pendefinisian kekonvergenan dari suatu barisan di H bergantung pada topologi mana yang sedang digunakan. Kekonvergenan pada buku teks matematika analisis saat ini menggunakan kekonvergenan pada topologi kuat, yang lebih dikenal dengan nama konvergen kuat atau konvergen. Pembahasan mengenai kekonvergenan pada topologi lemah sangatlah sedikit pada literatur-literatur. Oleh karena itu penulis tertarik untuk meneliti kekonvergenan pada topologi lemah.

Kekonvergenan pada topologi kuat atau konvergen secara kuat memiliki beberapa sifat, diantaranya sifat ketunggalan limit, keterbatasan barisannya, kelinearan dan sebagainya (Kreyszig, 1978, hlm. 26-31). Berdasarkan hal tersebut, apakah sifat-sifat kekonvergenan pada topologi kuat juga berlaku pada topologi lemah? dan bagaimana keterkaitan antara barisan yang konvergen pada topologi kuat dengan barisan yang konvergen pada topologi lemah?.

Selain dari sifat-sifat kekonvergenan, barisan sangatlah erat dengan kekonvergenan. Pada tahun 1821, Agustin-Louis Cauchy dalam bukunya mengenalkan barisan Cauchy dengan definisi, $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu N sedemikian sehingga untuk setiap $m, n > N$ berlaku $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ (Cauchy, 1821). Dengan demikian, bagaimanakah pendefinisian barisan Cauchy pada topologi lemah?.

Selanjutnya, kekonvergenan pada topologi kuat mendefinisikan himpunan yang kompak secara barisan, yaitu himpunan yang setiap barisannya memuat subbarisan yang konvergen secara kuat. Berdasarkan pernyataan tersebut, apakah ada pendefinisian kekompakan secara barisan pada topologi lemah?. Kemudian, Teorema Bolzano-Weierstrass menyatakan bahwa setiap barisan real terbatas memiliki subbarisan yang konvergen secara kuat. Teorema tersebut berlaku untuk setiap ruang berdimensi hingga yang dilengkapi dengan hasil kali dalam. Contohnya $\mathbb{R}^n$. Namun, teorema tersebut tidak berlaku untuk sebarang ruang berdimensi takhingga. Diberikan suatu ruang Hilbert H. Misalkan $\{e_n\}$ adalah barisan ortonormal di H dan $\{e_{n_k}\}$ adalah sebarang subbarisan dari $\{e_n\}$. Perhatikan bahwa $\|e_n\| = 1$ dan

$$\left\|e_{n_k} - e_{n_j}\right\|^2 = \langle e_{n_k} - e_{n_j}, e_{n_k} - e_{n_j}\rangle = \left\|e_{n_k}\right\|^2 + \left\|e_{n_j}\right\|^2 = 1 + 1 = 2.$$

Sehingga diperoleh bahwa $\left\|e_{n_k} - e_{n_j}\right\| = \sqrt{2}$. Akibatnya $\{e_{n_k}\}$ bukan barisan Cauchy. Perhatikan bahwa $\{e_{n_k}\}$ adalah barisan di H dan H lengkap. Dengan demikian Teorema Bolzano-Weierstrass tidak berlaku pada ruang Hilbert H. Lalu, bagaimana keberlakuan Teorema Bolzano-Weierstrass pada ruang Hilbert jika pendefinisian kekonvergenannya pada topologi lemah?

Berdasarkan uraian di muka, pada tugas akhir ini penulis bermaksud untuk membahas kekonvergenan pada topologi lemah dengan judul **“Kekonvergenan Lemah Pada Ruang Hilbert”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah, masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini disusun dalam rumusan masalah sebagai berikut:

a. Sifat-sifat apa saja dalam kekonvergenan kuat yang berlaku pada kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert.
b. Bagaimana ketertkaitan antara barisan yang konvergen kuat dan barisan yang konvergen lemah pada ruang Hilbert.
c. Sifat-sifat apa saja dalam barisan Cauchy secara kuat yang berlaku pada barisan Cauchy secara lemah pada ruang Hilbert.
d. Sifat-sifat apa saja dalam himpunan yang kompak secara barisan dan secara kuat yang berlaku pada kekompakan secara barisan dan secara lemah pada ruang Hilbert.
e. Bagaimana keberlakuan Teorema Bolzano-Weierstrass dalam konteks kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah penelitian, tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Mengetahui sifat-sifat apa saja dalam kekonvergenan kuat yang berlaku pada kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert.
b. Mengetahui ketertkaitan antara barisan yang konvergen kuat dan barisan yang konvergen lemah pada ruang Hilbert.
c. Mengetahui sifat-sifat apa saja dalam barisan Cauchy secara kuat yang berlaku pada barisan Cauchy secara lemah pada ruang Hilbert.
d. Mengetahui sifat-sifat apa saja dalam himpunan yang kompak secara barisan dan secara kuat yang berlaku pada kekompakan secara barisan dan secara lemah pada ruang Hilbert.
e. Mengetahui keberlakuan Teorema Bolzano-Weierstrass dalam konteks kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat baik bagi penulis, institusi, maupun pembaca atau peneliti lainnya. Secara khusus, penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

a. Memperluas sekaligus memperdalam penguasaan materi mengenai kekonvergnenan, khususnya tentang kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert.
b. Memberikan inspirasi bagi peneliti matematika lainnya untuk mengenal kekonvergenan lemah pada ruang Hilbert, lebih jauh lagi untuk meneliti lebih lanjut tentang kekonvergenan lemah di ruang Hilbert.

1.5 Sistematika Penulisan

Penelitian ini terdiri dari 5 bab. BAB I merupakan bab pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Selanjutnya BAB II memaparkan konsep dan teori yang dijadikan landasan untuk pembahasan bab selanjutnya, berisi definisi dan teorema yang diperlukan dalam penelitian, diantaranya ruang vektor bernorma dan sifat-sifat yang berlaku didalamnya, kekonvergenan kuat di ruang vektor bernorm, fungsional linear, ruang Hilbert dan sifat-sifat yang berlaku didalamnya, himpunan kompak secara barisan dan secara kuat dan yang terakhir fungsi konveks.

BAB III merupakan bagian yang bersifat prosedural mengenai alur penelitian dan tempat penelitian.

BAB IV merupakan isi dari penelitian ini, diawali dengan membahas kekonvergenan lemah di ruang Hilbert, keterkaitan antara kekonvergenan kuat dan lemah, Kriteria Cauchy secara lemah, kekompakan barisan secara lemah, dan yang terakhir adalah keberlakuan Teorema Bolzano-Weierstrass pada ruang Hilbert.

BAB V merupakan bab penutup dari penelitian ini yang berisi kesimpunan yang merupakan rangkuman dari hasil pembahasan dan saran-saran untuk penelitian selanjutnya.