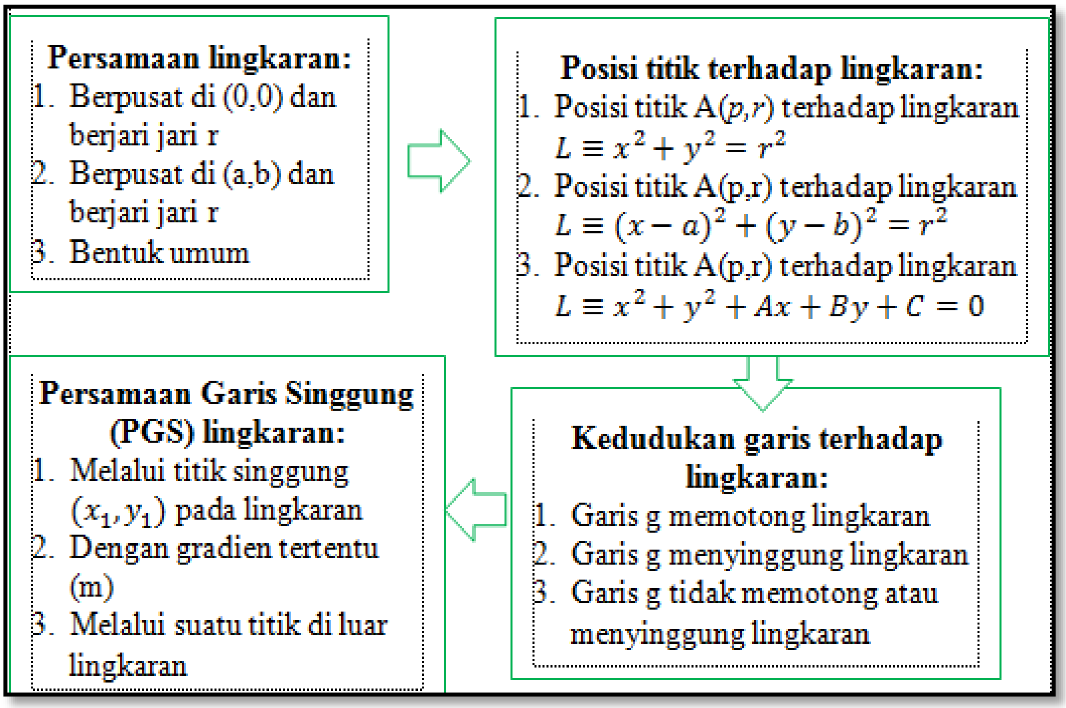
BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dipaparkan hasil temuan tentang penelitian desain didaktis materi persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran yang bertumpu pada *Learning Obstacel* (LO) berupa *didactical obstacle* dan *epistemological obstacle*. Temuan tersebut didapat melalui analisis situasi didaktis yang kegiatannya dilakukan sebelum pembelajaran, analisis metapedadidaktik yang kegiatannya dilakukan saat pembelajaran dan analisis retrospektif yang kegiatannya dilakukan setelah pembelajaran. Sehingga menghasilkan suatu Desain Dedaktis Revisi (DDR) persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran hasil kegiatan ketiga analisis tersebut. Perancangan Desain Dedaktis Revisi tersebut bertujuan untuk meminimalisir *learning obstacle* siswa yang telah ditemukan sebelumnya.

Tahapan pertama dalam penelitian ini adalah analisis situasi didaktis. Analisis situasi didaktis sebelum pembelajaran merupakan tahapan awal dari penelitian desain didaktis yang wujudnya berupa Desain Didaktis Hipotesis (DDH) termasuk Analisis Didaktis Pedagogis (ADP). Tahapan analisis ini dimulai dengan kegiatan repersonalisasi dan rekontekstualisasi terhadap materi persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran. Repersonalisasi berarti melakukan matematisasi seperti yang dilakukan matematikawan, sedangkan rekontekstualisasi berarti memaknai situasi dimana konsep tersebut muncul di kehidupan sehari-hari (Dewi, 2016, hlm. 14). Adapun kegiatan yang dilakukan adalah analisis *Learning Obstacle* (LO) yang telah dijelaskan sebagai permasalahan pada bagian latar belakang dalam penelitian ini. Sejalan dengan analisis LO, dilakukan pula analisis terhadap materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran dari berbagai sumber buku ajar. Hasil dari repersonalisasi dan rekontekstualisasi tersebut dibentuk menjadi suatu *Learning Trajectories* (LT) dan selanjutnya dikembangkan menjadi suatu Desain Didaktis Hipotesis (DDH).

Persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran merupakan salah satu materi Geometri Analitik pada Matematika yang mempelajari hubungan antara kuantitas Aljabar dan analog secara Geometri (Blinder, 2013, hlm. 67). Bentuk lingkaran dan garis singgung lingkaran (Geometri) yang sebelumnya telah dipelajari siswa diposisikan pada bidang Cartesius sehingga dapat direpresentasikan menjadi suatu bentuk persamaan (Aljabar). Berikut ini cakupan materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran dari 3 buku ajar materi Matematika Wajib yang disusun berdasarkan kurikulum 2013.



Gambar 4.1 Alur Materi Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran pada Buku

Selanjutnya dilakukan repersonalisasi yang lebih luas terkait objek matematika pada materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran yang terdiri dari konsep, fakta, prinsip, dan prosedur (Bell, 1978). Konsep dalam matematika dimaknai sebagai istilah, dimana istilah tersebut dapat didefinisikan (*well defined*) dan ada pula yang tidak dapat didefinisikan (*undefined*). Fakta dalam matematika dimaknai sebagai simbol dan postulat atau aksioma yaitu pernyataan yang diandaikan benar pada suatu sistem dan diterima tanpa perlu dibuktikan kebenarannya. Prinsip dalam matematika dimaknai sebagai teorema atau dalil yaitu pernyataan yang dirumuskan secara logika dan dapat dibuktikan. Sedangkan prosedur dimaknai sebagai langkah atau cara yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan matematika.

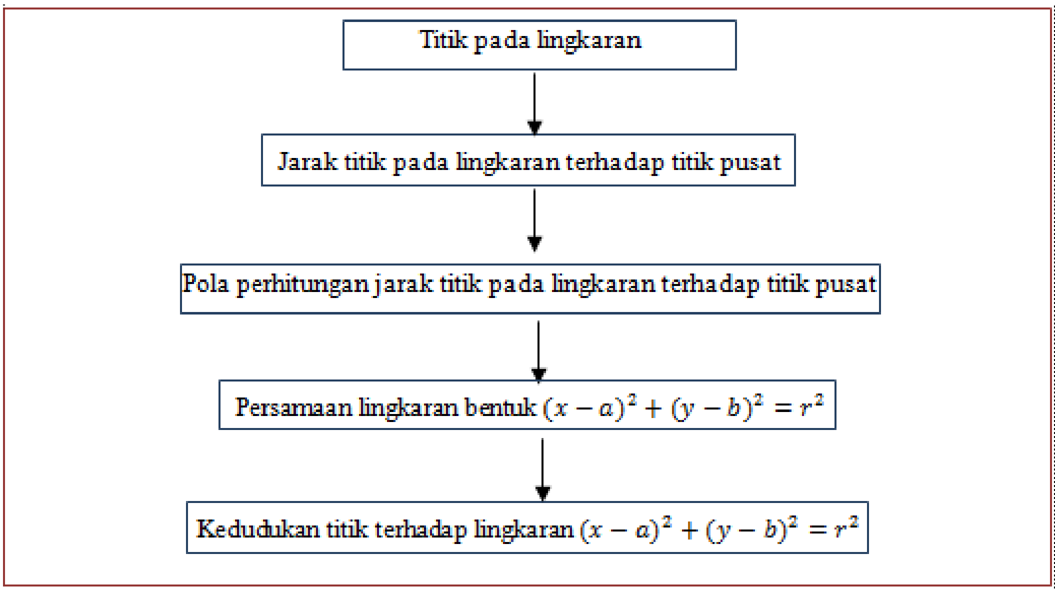
Tabel 4.1 Konsep, Fakta, Prinsip, dan Prosedur
Materi Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran

KONSEP	***Undefined Term***	Titik Garis Bidang
	Well Defined	**Persamaan** adalah kalimat terbuka yang mengikutsertakan tanda "sama dengan". **Lingkaran** adalah kurva tertutup pada suatu bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik (disebut **titik pusat**) pada bidang tersebut. **Jari-jari lingkaran** adalah segmen yang menghubungkan titik pusat dan suatu titik pada lingkaran. **Persamaan lingkaran** adalah suatu persamaan yang seluruh penyelesaiannya membentuk suatu lingkaran. **Interior lingkaran** adalah himpunan titik pada bidang yang sama dengan lingkaran yang jaraknya ke pusat lingkaran lebih kecil dari jari-jari lingkaran tersebut. **Eksterior lingkaran** adalah himpunan titik pada bidang yang sama dengan lingkaran yang jaraknya ke pusat lingkaran lebih besar dari jari-jari lingkaran tersebut. Suatu garis disebut **garis singgung lingkaran** jika garis tersebut dan lingkaran mempunyai tepat 1 titik perpotongan (disebut **titik singgung**). Suatu garis disebut **garis potong lingkaran** jika garis tersebut dan lingkaran mempunyai lebih dari 1 titik perpotongan.
FAKTA		r = panjang jari-jari lingkaran OP (lingkaran P) = lingkaran yang berpusat di titik P $P(a,b)$ = titik P yang berkoordinat (a,b)
PRINSIP		Misalkan lingkaran $P(a,b)$ berjari-jari r satuan. Maka persamaan lingkaran P adalah $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

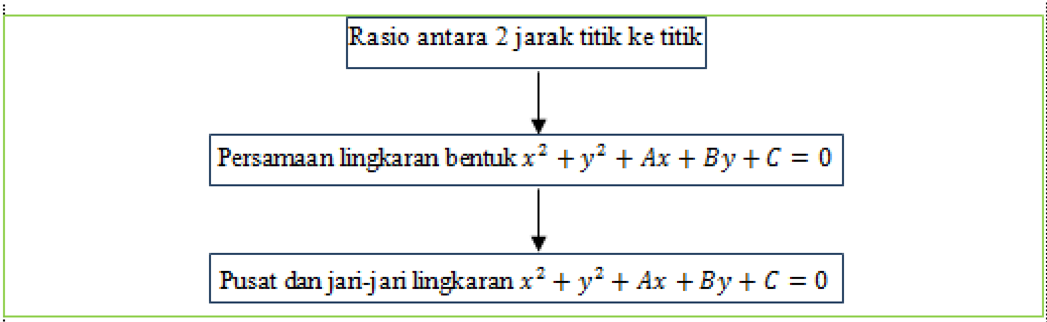
	Persamaan lingkaran secara umum dapat dibentuk menjadi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan Jari-jari $: r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$ Titik Pusat $: P\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$ Jika sebuah garis tegak lurus pada jari-jari lingkaran di titik ujung luar jari-jari itu, maka garis itu adalah garis singgung Setiap garis singgung pada suatu lingkarang akan tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran yang ditarik ke titik singgungnya Jika suatu garis memotong interior sebuah lingkaran, maka garis itu memotong lingkaran tepat pada 2 titik Misalkan lingkaran $P(a,b)$ memiliki garis singgung sumbu Y, maka lingkaran P berjari-jari a satuan Misalkan lingkaran $P(a,b)$ memiliki garis singgung sumbu X, maka lingkaran P berjari-jari a satuan Misalkan lingkaran $P(a,b)$ memiliki garis singgung $Ax+By+C=0$, maka lingkaran P berjari-jari r satuan. Dengan $r = \left\lvert \frac{A.a + B.b + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right\rvert$ A,B suatu koefisien dan C suatu konstanta
PROSEDUR	**Prosedur menentukan kedudukan suatu garis terhadap suatu lingkaran** Untuk menentukan kedudukan suatu garis $y = mx + c$ terhadap lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka prosedur yang dapat dilakukan adalah mensubstitusi persamaan garis pada persamaan lingkaran sehingga menghasilkan suatu persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$. Prosedur selanjutnya adalah menghitun nilai diskriminan $(D = B^2 - 4AC)$. Jika $D > 0$ maka garis tersebut memotong 2 titik pada lingkaran Jika $D = 0$ maka garis tersebut memotong 1 titik pada lingkaran Jika $D > 0$ maka garis tersebut tidak memotong lingkaran

	Prosedur menentukan persamaan garis singgung lingkaran Untuk menentukan persamaan garis singgung terhadap lingkaran $P(a,b)$ yang berjari-jari r satuan dapat menggunakan 3 prosedur, yaitu: 1. Menggunakan rumus $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ jika garis singgung tersebut melalui titik singgung (x_1, y_1) 2. Menggunakan rumus $y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$ jika garis singgung tersebut bergradien m satuan 3. Menggunakan prosedur menentukan kedudukan suatu garis terhadap suatu lingkaran yang berkibat *D = 0*

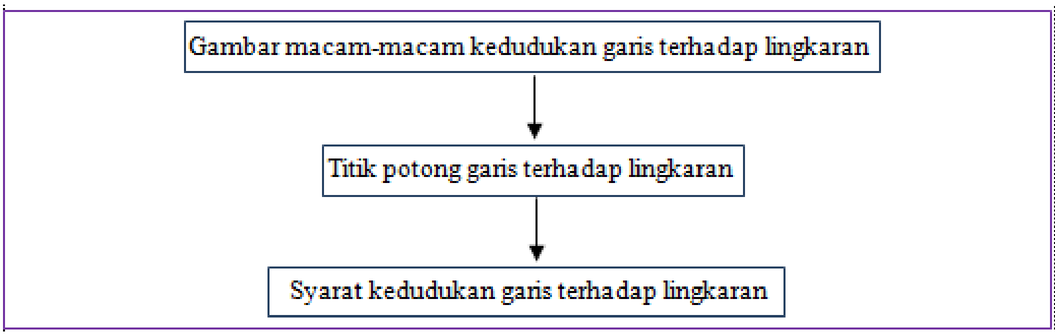
Berdasarkan hasil repersonalisasi tersebut, maka dirancang suatu kesimpulan berupa *learning trajectory* yang sesuai dengan alur berpikir siswa. *Learning Trajectory* (LT) materi persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran ini terbagi menjadi 3 bahasan pokok yaitu persamaan lingkaran (persamaan lingkaran dan kedudukan titik terhadap lingkaran), kedudukan garis dan lingkaran, serta persamaan garis singgung lingkaran yang tergambar dalam diagram berikut.



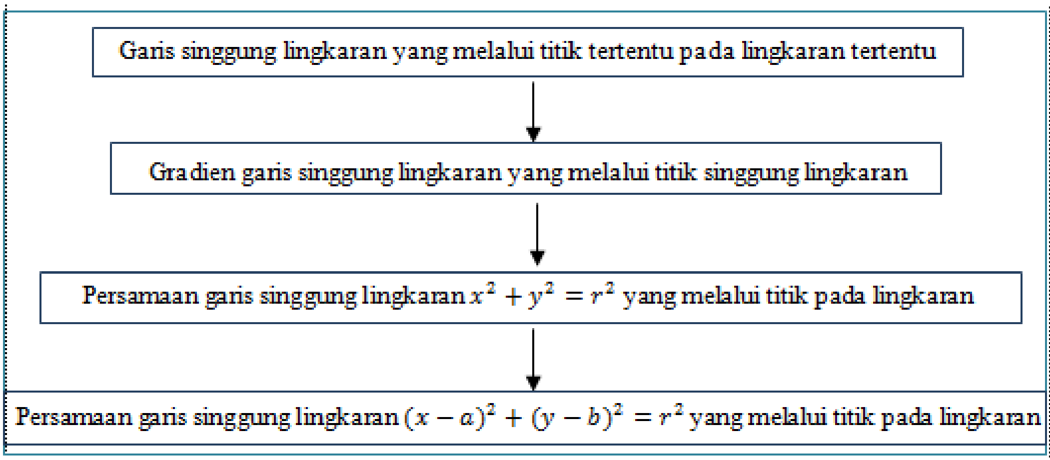
Gambar 4.2 *Learning Trajectory* Persamaan Lingkaran (Pertemuan 1)



Gambar 4.3 *Learning Trajectory* Persamaan Lingkaran (Pertemuan 2)



Gambar 4.4 *Learning Trajectory* Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran (Pertemuan 3)



Gambar 4.5 *Learning Trajectory* Persamaan Garis Singgung Lingkaran (Pertemuan 4)

Garis singgung lingkaran yang bergradien tertentu pada lingkaran tertentu

↓

Syarat garis yang menyinggung lingkaran

↓

Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien tertentu (m)

↓

Persamaan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dengan gradien tertentu (m)

Gambar 4.6 *Learning Trajectory* Persamaan Garis Singgung Lingkaran (Pertemuan 5)

Learning Trajectory materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran tersebut dirancang untuk 5 pertemuan. Pertemuan 1 memuat materi persamaan lingkaran dalam bentuk $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Pertemuan 2 memuat materi persamaan lingkaran dalam bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Pertemuan 3 memuat materi kedudukan garis terhadap lingkaran. Pertemuan 4 memuat materi persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik singgung lingkaran. Sedangkan pertemuan 5 memuat materi persamaan garis singgung lingkaran dengan gradien tertentu (m). Selanjutnya *learning trajectory* ini dikembangkan menjadi Desain Didaktis Hipotesis (DDH).

A. Pengembangan Desain Didaktis Hipotesis Konsep Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran

Perancangan desain didaktis merupakan bagian dari kegiatan rekontekstualisasi. *Learning trajectory* yang telah didapat selanjutnya disajikan menjadi desain didaktis yang bertumpu pada *learning obstacle* siswa, berbagai teori belajar, dan berbagai penelitian sebelumnya yang terkait dengan desain ini. Adapun teori belajar utama yang digunakan adalah teori situasi didaktis yang terdiri dari kegiatan aksi, formulasi, validasi, dan institusionalisasi (Brousseau, 2002). Selain itu, digunakan pula teori belajar lain yang relevan seperti teori Piaget dan Vigotsky.

Desain didaktis pada tiap pertemuan disajikan melalui konteks nyata tentang navigasi kapal laut yang saling berkaitan. Selain untuk menarik minat untuk mempelajari konsep, siswa juga dapat mengetahui kegunaan konsep persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran pada kehidupan sehari-hari. Menurut Melo dan Martins (2015, hlm. 103), Geometri selain secara konseptual sulit untuk dipahami, siswa juga tidak dapat melihat mengapa penting bagi mereka untuk mempelajarinya. Penyisipan matematika dalam kontek siswa sangat penting dalam pembentukan hubungan yang bermakna antara *personal belief* dan proses pembuatan makna (Moellwald in Baki, Lu &Birgin, 2009, hlm. 1402).

Teori Vigotsky memandang proses konstruktivis bekerja paling baik di lingkungan sosial karena siswa memiliki kesempatan untuk membandingkan dan berbagi ide dengan orang lain (Bhattacharjee, 2015, hlm. 67). Bekerja dengan kolaboratif secara berpasangan atau kelompok kecil, merupakan pendekatan konstruktif sosial yang jelas bagi pembelajaran (Pritchard, 2009, hlm. 25). Sehingga situasi didaktis dilakukan secara individual namun dalam *setting* kelompok-kelompok kecil yaitu 4 siswa tiap kelompok. Siswa diberikan ruang untuk bekerja secara individu untuk mengeksplorasi sesuai kemampuannya dan jika terjadi kesulitan maka dapat berinteraksi dengan anggota kelompok. Dalam sebuah interaksi, masing-masing membangun makna tindakan orang lain, meskipun terkadang salah menafsirkan atau menafsirkan ulang (Vries, 2000, hlm. 209).

Pada pertemuan 4 dan 5, sajian Lembar Kegiatan memuat teorema yang harus dibuktikan oleh siswa. Berdasarkan Teori Piaget, siswa SMA sudah mampu untuk menguji teorema "jika-maka". Selain itu, Aljabar SMA juga harus memberi siswa wawasan tentang abstraksi dan struktur matematika. Siswa harus mengembangkan pemahaman tentang sifat aljabar yang mengatur manipulasi simbol dalam ekspresi, persamaan, dan ketidaksetaraan (NCTM, 2000, hlm. 297). Jika simbol dimanipulasi tanpa dipahami siswa, setelah suatu titik, kebosanan dan kebingungan mendominasi banyak siswa dan disosiasi berkembang (Ramanujam, 2006). Pembuatan makna (*sense making*), belajar dengan kolaboratif, dan belajar menemukan merupakan *value* bagi siswa dalam melakukan "*doing*" dan mempelajari matematika (Francisco, 2013, hlm. 492).

1. Desain Didaktis Persamaan Lingkaran $\boldsymbol{L \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

Tujuan utama dari pertemuan 1 ini adalah siswa dapat merepresentasikan gambar lingkaran pada bidang Cartesius menjadi suatu persamaan lingkaran. Pada tingat SMP siswa telah memperoleh pengetahuan tentang lingkaran secara geometri dan memahami lingkaran sebagai himpunan titik pada suatu bidang yang berjarak sama terhadap suatu titik tertentu yang ada pada bidang tersebut. Pemahaman sebelumnya inilah yang menjadi prasyarat siswa untuk mempelajari persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dan berjari-jari r. Lingkaran dalam bentuk geometris digambarkan pada bidang Cartesius sehingga lingkaran dapat didefinisikan menjadi $L \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ dengan (a,b) adalah koordinat titik pusat dan r adalah jari-jari lingkaran. Bentuk persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ disebut sebagai persamaan lingkaran. Sesuai dengan teori situasi didaktis, kegiatan yang ada pada pertemuan ini meliputi kegiatan aksi, formulasi, validasi, dan instruksionalisasi.

a. Aksi

Bentuk persamaan lingkaran didapat dari konsep jarak antara pada lingkaran dan titik pusat lingkaran. Oleh karena itu, kegiatan awal dari pembelajaran ini adalah menghitung jarak antara berbagai posisi titik (di luar, pada, dan di dalam lingkaran) terhadap titik tertentu (titik pusat) dengan berbagai cara sesuai pengetahuan yang sebelumnya dimiliki siswa. Koordinat titik yang disediakan merupakan pasangan bilangan bulat seperti (3,4). Hal tersebut bertujuan untuk meminimalisir LO siswa yang masih kesulitan dalam mengetahui koordinat bentuk umum seperti (x_1, y_1). Kegiatan ini disajikan dalam bentuk lembar kegiatan berisi suatu permasalahan tentang cerita SOS kapal laut yang bertujuan agar siswa mengetahui kegunaan konsep jarak antara 2 titik dalam kehidupan sehari-hari. Penyajian ini tentu saja dirancang untuk saling berkaitan dengan konsep selanjutnya yang akan dipelajari siswa.

LEMBAR KEGIATAN 1

Kapal Titanic akan tenggelam di tengah Samudra Atlantik Utara dikarenakan menabrak sebuah gunung es. Titanic membutuhkan pertolongan kapal lain secepat mungkin untuk mengevakuasi seluruh penumpang sebelum kapal tenggelam. Oleh karena itu, Titanic mengirimkan SOS (nama untuk tanda bahaya kode morse internasional) pada kapal lainnya. Berikut data lokasi kapal Titanic dan kapal di sekitarnya.

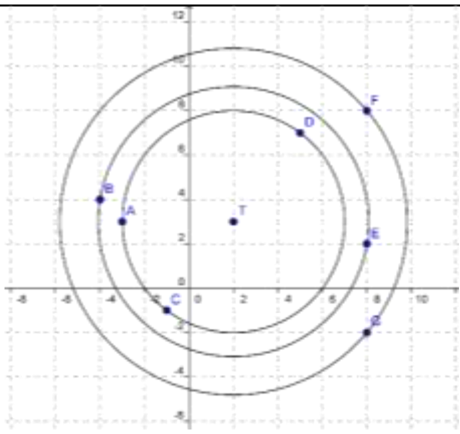
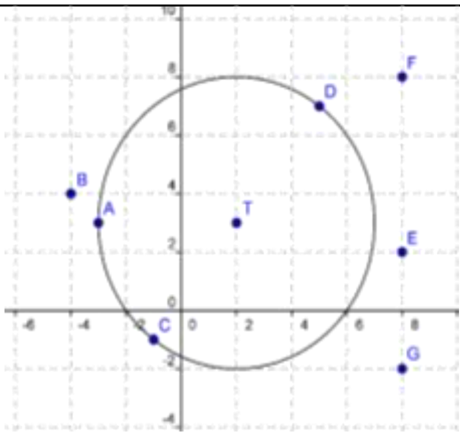
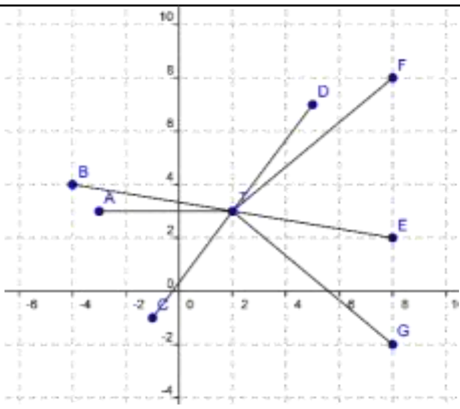
No	Nama	Koordinat
1	Titanic	(2,3)
2	A	(-3,3)
3	B	(-4,4)
4	C	(-1,-1)
5	D	(5,7)
6	E	(8,2)

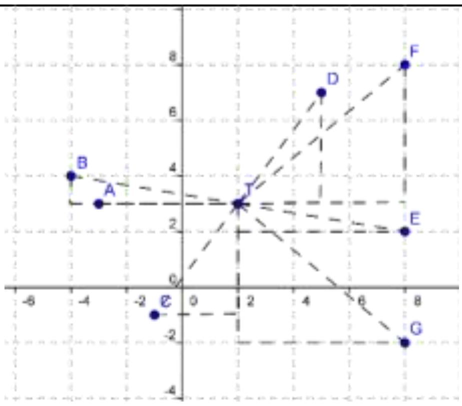
Pilihlah 1 kapal yang dapat dikirimkan SOS oleh Titanic agar penumpang kapal dapat secepatnya dievakuasi! Jelaskan bagaimana cara memilih kapal tersebut!

Gambar 4.7 Lembar Kegiatan 1

Sebagaimana telah diketahui sebelumnya bahwa terdapat kisah tentang kapal Titanic yang sangat melegenda pada masanya. Kisah ini dipilih karena sebagian besar siswa sudah mengetahui kisahnya sehingga tidak asing lagi bagi mereka untuk membaca permasalahan ini. Selain itu, pemilihan konteks kapal laut dilakukan karena kapal laut memiliki koordinat pada sistem navigasi kapal yang berkaitan erat dengan bidang Cartesius. Sehingga permasalahan disajikan dalam konteks nyata namun dekat dengan konsep yang sedang dipelajari. Kegiatan pada LK 1 ini mencakup LT dari titik pada lingkaran dan jarak titik pada lingkaran terhadap titik pusat lingkaran. Selain membuat lembar kegiatan, dibuat pula respon-respon yang diprediksikan akan muncul saat siswa menjawab permasalahan tersebut beserta antisipasinya yang termuat dalam tabel berikut ini.

Tabel 4.2 Tabel Prediksi Respon Siswa Terhadap Lembar Kegiatan 1

No	Prediksi respon
1	 Siswa menggambar koordinat titik pada bidang Cartesius dan membuat lingkaran dengan pusat titik T serta melalui semua titik yang diketahui. Selanjutnya siswa menyimpulkan: a. apal yang terpilih adalah A,C, dan D karena berada pada lingkaran paling kecil (jari-jari tidak disebutkan) b. apal yang terpilih adalah A,C, dan D karena berada pada lingkaran berjari-jari 5 satuan
2	 Siswa menggambar koordinat titik pada bidang Cartesius dan membuat lingkaran dengan pusat titik T serta melalui titik A (dipilih titik A karena terlihat paling dekat dengan titik T) Selanjutnya siswa menyimpulkan: a. apal yang terpilih adalah A,C, dan D karena berada pada lingkaran (jari-jari tidak disebutkan) b. apal yang terpilih adalah A,C, dan D karena berada pada lingkaran dengan jari-jari 5 satuan
3	 Siswa menggambar koordinat titik pada bidang Cartesius dan membuat ruas garis dari titik T ke semua titik yang diketahui, lalu mengukur panjang semua ruas garis. Selanjutnya siswa menyimpulkan bahwa kapal yang terpilih adalah A,C, dan D karena berjarak terpendek yaitu 5 satuan

No	Prediksi respon
4	 Siswa menggambar koordinat titik pada bidang Cartesius dan menghitung jarak tiap titik terhadap titik A dengan dalil Pythagoras. Selanjutnya siswa menyimpulkan kapal yang terpilih adalah A,C, dan D karena jaraknya terpendek terhadap titik T yaitu 5 satuan
5	Siswa menghitung langsung jarak setiap titik terhadap titik T dengan rumus jarak antara 2 titik: AT = $\sqrt{(-3-2)^2+(3-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ BT= $\sqrt{(-4-2)^2+(4-3)^2} = \sqrt{37}$ CT = $\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ DT = $\sqrt{(5-2)^2+(7-3)^2} = \sqrt{25} = 5$ ET = $\sqrt{(8-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{37}$ FT = $\sqrt{(8-2)^2+(8-3)^2} = \sqrt{61}$ GT = $\sqrt{(8-2)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{61}$ Selanjutnya siswa menyimpulkan kapal yang terpilih adalah A,C, dan D karena jaraknya terpendek terhadap titik T yaitu 5 satuan

Untuk menyelesaikan permasalahan dalam LK 1, siswa diberikan ruang untuk mengeksplore cara yang mereka pahami agar menemukan kapal terdekat dari kapal Titanic. Berdasarkan hasil repersonalisasi didapat 5 respon yang diprediksikan akan muncul dari siswa. Prediksi respon ini didapatkan penulis dengan mencoba menjawab permasalahan dengan menggunakan alat seperti jangka atau penggaris dan menggunakan cara matematis. Dari kelima respon ini yang paling diharapkan muncul adalah respon 4 dan 5 karena kedua respon inilah yang paling umum digunakan untuk mengetahui jarak antara 2 titik baik secara geometris maupun aljabar. Adapun apabila hanya respon 1 sampai 3 yang muncul maka dilakukan antisipasi agar sampai pada renson 4 dan 5. Jika prediksi yang muncul adalah prediksi 1a dan atau 2b, maka siswa diminta untuk menentukan jari-jarinya. Jika prediksi yang muncul 1 sampai 3, maka ditanyakan bagaimana cara menghitung jarak terpandek tanpa menggunakan alat bantu (jangka dan penggaris). Jika prediksi yang muncul 1 sampai 4, siswa diminta untuk melihat pola perhitungannya. Kesimpulan dari kegiatan ini adalah menemukan pola perhitungan antara titik A, C dan D yang ada pada lingkaran terhadap titik T (Titanic) yang didapat melalui presentasi kelompok. Adapun urutan presentasi dimulai dari respon 2, 3, 4 dan 5 yang merepresentasikan cara yang paling sederhana (menggunakan alat bantu) menuju cara yang paling matematis (tidak menggunakan alat bantu).

b. Formulasi

Aktifitas selanjutnya adalah formulasi yaitu menggeneralisasikan pola perhitungan jarak antara titik pada lingkaran (A, C, dan D) dan titik pusat (T). Koordinat titik A, C, dan D diperumum menjadi titik (x,y) sehingga menghasilkan bentuk persamaan lingkaran yang berpusat di titik T(2,3) dan berjari-jari 5.

LEMBAR KEGIATAN 2

Jika ada kapal Z dengan koordinat (x,y) di sekitar kapal Titanic, tentukan posisi kapal Z agar:

- **Kapal Z menjadi satu-satunya pilihan (kapal A, C, dan D tidak terpilih lagi),**
- **Kapal Z menjadi salah satu pilihan bersama dengan pilihan lain yaitu kapal A, C, dan D,**
- **Kapal Z bukan pilihan (tetap kapal A, C, atau D yang terpilih).**

Gambar 4.8 Lembar Kegiatan 2

Konteks nyata yang disajikan masih berhubungan dengan LK 1 agar terjadi kesinambungan berpikir pada siswa. Pada permasalahan ini, siswa diberikan kesempatan untuk secara mandiri dapat menyimpulkan bagaimana posisi titik (x,y) terhadap lingkaran dengan konsep yang sebelumnya telah didapat. Kegiatan pada LK 2 ini mencakup LT dari pola perhitungan jarak titik pada lingkaran dan titik pusat lingkaran, persamaan lingkaran bentuk $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, dan kedudukan titik terhadap lingkaran. Selain membuat lembar kegiatan, dibuat pula respon-respon yang diprediksikan akan muncul saat siswa menjawab permasalahan tersebut beserta antisipasinya yang termuat dalam tabel berikut ini.

Tabel 4.3 Tabel Prediksi Respon Siswa Terhadap Lembar Kegiatan 2

No	Prediksi
1	Siswa menempatkan titik Z pada di dalam, pada, atau luar lingkaran (dengan koordinat tertentu)
2	Siswa menjawab jika jaraknya kurang dari 5 satuan maka kapal Z dapat dipilih
3	Siswa menjawab: a. Jika jaraknya kurang dari 5 satuan maka hanya kapal Z yang dapat dipilih atau berada di dalam lingkaran b. Jika jaraknya sama dengan 5 satuan maka kapal A, C, D, dan Z dapat dipilih atau ada pada lingkaran c. Jika jaraknya lebih dari 5 satuan maka kapal Z tidak dipilih atau berada di luar lingkaran
4	Siswa menjawab: a. Jika $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}<5$ maka hanya kapal Z yang dapat dipilih b. Jika $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=5$ maka kapal A, B, D, dan Z dapat dipilih c. Jika $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}>5$ maka kapal Z tidak dipilih
5	a. Jika $(x-2)^2+(y-3)^2<5^2$ maka hanya kapal Z yang dapat dipilih b. Jika $(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$ maka kapal A, B, D, dan Z dapat dipilih c. Jika $(x-2)^2+(y-3)^2>5^2$ maka kapal Z tidak dipilih

Berdasarkan hasil repersonalisasi didapat 5 respon yang diprediksikan akan muncul dari siswa. Dari kelima respon ini yang paling diharapkan muncul adalah respon 4 dan 5 karena dari kedua respon inilah didapat formulasi kedudukan titik Z secara aljabar. Adapun apabila hanya respon 1 sampai 3 yang muncul maka dilakukan antisipasi agar sampai pada respon 4 dan 5. Antisipasi yang dilakukan adalah melihat kembali pola perhitungan jarak titik A, C, dan D terhadap titik T kemudian koordinat titik diubah menjadi titik Z. Kesimpulan dari kegiatan ini adalah membuat persamaan lingkaran yang berpusat di (2,3) dan berjari-jari 5 serta menentukan kedudukan suatu titik terhadap lingkaran tersebut. Adapun urutan presentasi dimulai dari respon 1, 3, 4 dan 5 yang merepresentasikan cara geometris menuju cara aljabar.

c. Validasi

Validasi dilakukan dengan memberikan kesimpulan terkait dengan persamaan lingkaran dengan bentuk yang lebih umum yaitu lingkaran dengan pusat (a,b) dan jari-jari r serta kedudukan titik (x_1, y_1) terhadap lingkaran tersebut. Kegiatan ini menjadi penguat untuk konsep tentang persamaan lingkaran sehingga siswa dapat mengaplikasikannya pada permasalahan yang berkaitan dengan persamaan lingkaran. Kesimpulan dibuat oleh siswa setelah guru menanyakan "bagaimana bentuk persamaan lingkaran dengan pusat (a,b) dan jari-jari r?". Prediksi respon yang diharapkan muncul adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Apabila respon ini belum muncul, maka siswa diminta memperhatikan kembali persamaan lingkaran yang berpusat di (2,3) dan berjari-jari 5.

2. Desain Didaktis Persamaan Lingkaran $\boldsymbol{L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$

Pembelajaran pada pertemuan 1 adalah mempelajari persamaan lingkaran dalam bentuk $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Bentuk tersebut jika diuraikan maka akan menjadi persamaan dengan bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan A dan B adalah koefisisen dan C suatu konstanta. Keterkaitan antara 2 bentuk tersebutlah yang akan dipelajari pada pertemuan 2. Tujuan pembelajaran pada pertemuan 2 ini adalah siswa dapat menentukan pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran dengan bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ berdasarkan pengetahuan yang dimiliki siswa sebelumnya dari pertemuan 1. Untuk sampai pada tujuan tersebut, pembelajaran dimulai dengan aktivitas melihat hubungan antara penyelesaian tentang rasio dari jarak 2 titik berdasarkan gambar (geometri) dan berdasarkan konsep jarak 2 titik (aljabar). Keterkaitan keduanya akan menghasilkan suatu pengetahuan baru tentang bagaimana cara menemukan titik pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran dengan bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Sesuai dengan teori situasi didaktis, kegiatan yang ada pada pertemuan ini meliputi kegiatan aksi, formulasi, validasi, dan instruksionalisasi.

a. Aksi

Proses pembelajaran diawali dengan tanya jawab tentang bagaimana membuat segitiga APB dengan AB = 3, AP = 2, dan PB = 4. Tujuan dari tanya jawab ini adalah agar siswa mengetahui bagaimana cara menentukan posisi titik P yang akan disajikan pada permasalahan selanjutnya. Respon yang diharapkan dari siswa adalah dengan menggambar ruas garis AB dengan panjang 3 satuan, lalu dengan menggunakan jangka digambar lingkaran berjari-jari 2 satuan untuk titik pusat A dan lingkaran berjari-jari 4 satuan untuk titik pusat B. Titik perpotongan antara 2 lingkaran tersebut merupakan posisi titik P sehingga didapat segitiga APB dengan ukuran yang telah ditentukan seperti pada gambar berikut.

Aktivitas membuat segitiga APB dilakukan bersama-sama antar guru dan siswa agar dalam waktu yang singkat. Hal ini dikarenakan aktivitas utama dalam kegiatan aksi ini adalah siswa mengerjakan Lenbar Kegiatan 3. Kegiatan di awal pembelajaran ini diberikan sebagai stimulus awal bagi siswa agar sampai pada LK 3. Pemberian stimulus ini dikarenanakan berdasarkan hasil repersonalisasi yang dilakukan oleh peneliti, sangat sulit agar siswa dapat menggambar titik P.

Kegiatan selanjutnya adalah siswa mendiskusikan bagaimana penyelesaian dari permasalahan pada LK 3 seperti gambar berikut.

LEMBAR KEGIATAN 3

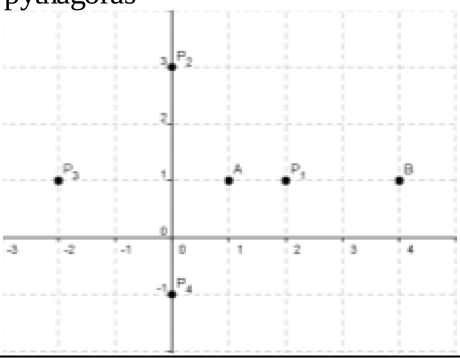
Diketahui terdapat titik A(1,1) dan B(4,1). Gambarlah himpunan titik P(*x*,*y*) yangmemenuhi hubungan PB = 2 PA

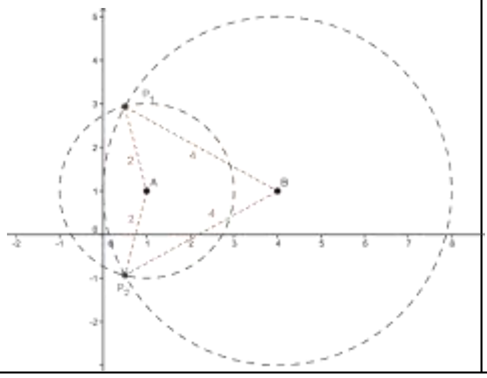
Gambar 4.9 Lembar Kegiatan 3

Kegiatan pada awal pembelajaran yaitu membuat segitiga dengan ukuran tertentu menggunakan jangka diaplikasikan pada permasalahan ini. Siswa dapat mencari posisi titik P dengan cara menggambar segitiga APB dengan panjang AB = 3 dan perbandingan panjang PA dan PB adalah 2:1. Himpunan titik P akan membentuk gambar lingkaran yang berpusat di (2,1) dan berjari-jari 2. Permasalahan ini dipilih agar siswa memiliki pengalaman baru dalam menggambar lingkaran menggunakan cara lain. Selain itu, kegiatan ini juga mengarah pada tujuan yang ingin dicapai yaitu mempelajari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C =$

0. Kegiatan pada LK 3 ini mencakup LT dari rasio antara 2 jarak titik ke titik menuju persamaan lingkaran bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Selain membuat lembar kegiatan, dibuat pula respon-respon yang diprediksikan akan muncul saat siswa menjawab permasalahan tersebut beserta antisipasinya yang termuat dalam tabel berikut ini.

Tabel 4.4 Tabel Prediksi Respon Siswa dan Antisipasinya Terhadap Lembar Kegiatan 3

<table>
<tr><th>No</th><th>Prediksi</th><th>Antisipasi</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Siswa menggambar titik A dan B dan tidak menemukan titik P</td><td>• Apabila muncul prediksi 1, 1 siswa pada kelompok tersebut diminta untuk datang ke kelompok yang muncul prediksi 2 sampai 4 dan menjelaskan pada anggota kelompoknya.
• Apabila hanya muncul prediksi 1, siswa diminta untuk kembali memperhatikan segitiga APB yang sebelumnya telah dibuat. Titik P pada segitiga tersebut berjarak 2 cm terhadap titik A dan berjarak 4 cm terhadap titik B. Sehingga memenuhi hubungan PB = 2 PA</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Siswa menemukan titik P(1,2) yang memenuhi hubungan PB = 2 PA</td><td rowspan="2">Apabila muncul prediksi 2 dan 3, siswa diminta menemukan titik lain yang memenuhi hubungan PB = 2 PA sehingga sampai pada prediksi 5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Siswa menemukan titik P(2,1), P(-2,1) yang memenuhi hubungan PB = 2 PA</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Siswa menemukan titik P(2,1), P(-2,1), P(0,3) dan P(0,-1) dengan perhitungan menggunakan pythagoras

</td><td>Apabila muncul prediksi 4, siswa diminta untuk mencari titik lain yang memenuhi hubungan PB = 2 PA dengan cara yang sama (minimal 3 titik).</td></tr>
</table>

No	Prediksi	Antisipasi
5	Siswa dapat menemukan beberapa titik P dengan menggunakan jangka Misalnya saat PA = 2 satuan dan PB 4 satuan 	Apabila muncul **prediksi 5**, siswa diminta untuk mencari titik lain yang memenuhi hubungan PB = 2 PA dengan cara yang sama (minimal 3 titik).

Untuk memperoleh titik P yang memenuhi hubungan PB = 2 PA, siswa dapat menentukan terlebih dahulu panjang PA yang diinginkan. Karena pada awal pembelajaran disajikan segitiga APB dengan panjang PA = 2 dan PB = 4, maka prediksi respon yang memungkinkan banyak muncul adalah menemukan titik P dengan ukuran PA = 2 dan PB = 4. Agar dapat menemukan posisi titik P yang lain, maka diberikan *scafolding* berupa pernyataan "coba cari ukuran PA dan PB yang lain sehingga perbandingannya tetap 1:2". Selanjutnya diharapkan siswa dapat mencari ukuran lain seperti PA = 3 dan PB = 6 atau PA = 1,5 dan PB = 3. Apabila sudah ditemukan paling sedikit 4 titik P dengan posisi yang berbeda-beda, maka siswa diminta untuk menggambar bentuk geometris yang memuat titik-titik P tersebut. Cukup sulit bagi siswa untuk memahami bahwa lingkaran merupakan bentuk geometris yang dapat terbentuk dari himpunan titik P jika hanya diketahui 4 titik P saja. Sehingga kesimpulan yang diperoleh pada kegiatan aksi ini dijadikan dugaan/hipotesis yang selanjutnya akan dibuktikan dengan konsep jarak antara 2 titik (aljabar).

b. Formulasi

Bentuk lingkaran yang didapat dari himpunan titik P adalah lingkaran yang berpusat di titik (2,1) dan berjari-jari 2 satuan. Sehingga didapat persamaan lingkaran tersebut adalah $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ yang selanjutnya dapat diuraikan menjadi bentuk umum yaitu $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$. Persamaan inilah yang akan dibuktikan dengan konsep jarak antara 2 titik sehingga terbukti benar bahwa himpunan titik P berbentuk lingkaran yang berpusat di titik (2,1) dan berjari-jari 2 satuan.

Tahapan pembuktian ini sudah masuk pada kegiatan awal formulasi, dimana siswa mulai mempelajari keterkaitan antara bentuk $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ dan bentuk $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Berdasarkan pengalaman belajar yang telah dilalui siswa pada pertemuan 1, siswa sudah dapat menghitung jarak antara 2 titik secara aljabar. Oleh karena itu, untuk dapat membuktikan bahwa himpunan titik P adalah suatu lingkaran, siswa diberikan pertanyaan "Bagaimana cara menyelesaikan Lembar Kegiatan 3 secara aljabar?".

Adapun respon yang diprediksikan akan muncul adalah (prediksi 1) siswa bingung dalam memahami pertanyaan yang diberikan, (prediksi 2) siswa menjawab dengan menggunakan rumus jarak 2 titik namun masih bingung dalam mengaplikasikannya, (prediksi 3) siswa menjawab dengan menggunakan rumus jarak 2 titik dan mampu mengaplikasikannya. Prediksi yang ingin diharapkan muncul adalah prediksi ke 3 yaitu siswa menjawab menggunakan rumus jarak antara 2 titik. Diketahui koordinat titik P(x,y), A(1,1), dan B(4,1) sehingga didapat $PA=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ dan $PB=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$. Jika diketahui bahwa PB = 2 PA maka berlaku $\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. selanjutnya disederhanakan secara aljabar dan didapat bentuk persamaan lingkaran yaitu $x^2+y^2-4x-2y+1=0$. sehingga terbukti bahwa himpunan dari seluruh titik P akan membentuk lingkaran dengan pusat (2,1) dan berjari-jari 2.

Tujuan dari kegiatan tersebut adalah agar siswa dapat membangun pengetahuan ke arah penemuan titik pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ yang akan disajikan pada situasi selanjutnya. Telah ditunjukan bahwa bentuk persamaan $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ merupakan suatu persamaan lingkaran sehingga bentuknya dapat digeneralisasikan menjadi $x^2+y^2+Ax+By+C=0$. Situasi selanjutnya, siswa diminta untuk menentukan titik pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ yang termuat dalam Lembar Kegiatan 4 sebagai berikut.

LEMBAR KEGIATAN 4

Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dengan A, B merupakan koefisien dan C konstanta

Gambar 4.10 Lembar Kegiatan 4

Situasi ini masih dikategorikan dalam situasi formulasi. Pengetahuan yang sudah didapatkan siswa pada situasi diaplikasikan untuk menggeneralisasikan persamaan lingkaran yang ada agar dapat diaplikasikan pada permasalahan lainnya. Adapun respon yang diprediksikan akan muncul beserta antisispasi yang diberikan guru termuat dalam tabel berikut ini.

Tabel 4.5 Tabel Prediksi Respon Siswa Terhadap Lembar Kegiatan 4

No	Prediksi Respon
1	Siswa melihat pola pada jawaban WS 3 dan menemukan bahwa a = $-\frac{A}{2}$ dan $b = -\frac{A}{2}$
2	Siswa ingin menggunakan cara "melengkapkan kuadrat" namun kesulitan karena koefsiennya berupa A,B dan C
3	Siswa menemukan keterkaitannya dengan cara: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ $x^2 + y^2 + Ax + By = -C$ $x^2 + Ax + y^2 + By = -C$ $x^2 + Ax + (\frac{A}{2})^2 + y^2 + By + (\frac{B}{2})^2 = (\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C$ $(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = (\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C$ Sehingga didapat $a = -\frac{A}{2}\ dan\ b = -\frac{B}{2}$ Serta $r = \sqrt{(\frac{A}{2})^2 + (\frac{B}{2})^2 - C}$
4	Siswa menemukan keterkaitannya dengan cara menguraikan bentuk persamaan lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$ $x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

No	Prediksi Respon
	$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ Disamakan dengan bentuk $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ Sehingga didapat $A=-2a \qquad B=-2b$ dan $C=a^2+b^2-r^2$ Didapat $=-\frac{A}{2}\ dan\ b=-\frac{B}{2}$ Serta$r=\sqrt{(-\frac{A}{2})^2+(-\frac{B}{2})^2-C}$

Berdasarkan hasil repersonalisi didapat 4 respon yang diprediksikan akan muncul dari siswa. Dari keempat respon ini yang paling diharapkan muncul adalah respon 3 dan 4 karena dari kedua respon inilah didapat formulasi cara mencari titik pusat dan jari-jari lingkaran. Apabila muncul prediksi 1 dan 2, 1 siswa pada kelompok tersebut diminta untuk datang ke kelompok yang muncul prediksi 3 atau 4 dan menjelaskan pada anggota kelompoknya. Jika prediksi 3 dan 4 tidak muncul, maka diberikan bantuan agar sampai pada prediksi 4 dengan cara siswa diminta untuk kembali melihat bagaimana proses penemuan titik pusat dan jari-jari dari persamaan $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ yang sebelumnya telah dilakukan sehingga dapat sampai pada prediksi 4. Apabila muncul prediksi 3 dan 4, dipresentasikan dan ditambahkan syarat pada jari-jari yaitu $(\frac{A}{2})^2+(\frac{B}{2})^2-C\geq 0$.

c. Validasi

Untuk memvalidasi apakah siswa sudah memahami bagaimana cara menentukan titik pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, maka siswa diberikan permasalahan yaitu menentukan titik pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran$2x^2+2y^2+8x+12y-24=0$. Untuk menyelesaikan persoalan tersebut, siswa harus menyederhanakan bentuk persamaannya menjadi $x^2+y^2+4x+6y-12=0$. Prosedur awal inilah yang dapat menentukan apakah siswa sudah memahami bentuk umum persamaan lingkaran atau hanya mengaplikasikan rumus yang sudah didapat sebelumnya.

3. Desain Didaktis Konsep Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

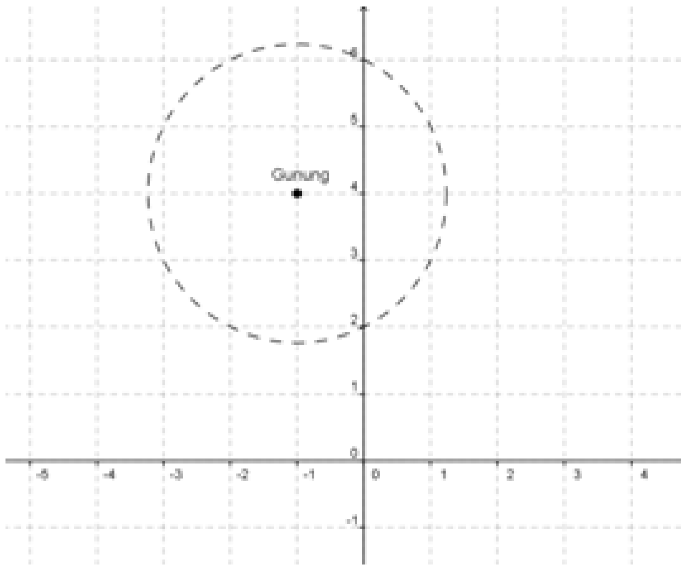
Pada pertemuan 1 dan 2, siswa sudah mempelajari tentang persamaan lingkaran. Pembelajaran selanjutnya adalah mempelajari kedudukan antara garis terhadap lingkaran. Secara geometris, siswa sudah mengenal bahwa terdapat 3 kedudukan garis terhadap lingkaran. 3 kedudukan tersebut adalah memotong lingkaran (garis dan lingkaran memiliki 2 titik perpotongan), menyinggung lingkaran (garis dan lingkaran memiliki 1 titik perpotongan), dan tidak memotong maupun menyinggung lingkaran (garis dan lingkaran tidak memiliki titik perpotongan). Pengetahuan tersebut yang dijadikan prasyarat untuk siswa mempelajari kedudukan garis terhadap lingkaran secara aljabar. Tahapan yang dibuat dari bentuk geometris menjadi aljabar ini merupakan cara untuk mengantisipasi *didactical obstacle* yang terdapat pada buku ajar materi kedudukan garis terhadap lingkaran. Sebagaimana telah dijelaskan bahwa terdapat *didactical obstacle* pada buku paket berupa alur yang tidak sesuai dengan alur belajar siswa. Kedudukan garis terhadap lingkaran disajikan dalam bentuk aljabar lalu digambarkan secara geometris. Hal ini bertentangan dengan alur belajar siswa yang terlebih dahulu mengenal kedudukan garis terhadap lingkaran secara geometris. Sesuai dengan teori situasi didaktis, kegiatan yang ada pada pertemuan ini meliputi kegiatan aksi, formulasi, validasi, dan instruksionalisasi.

a. Aksi

Situasi didaktis awal yang disajikan bagi siswa adalah siswa menggambar kembali kedudukan garis terhadap lingkaran. situasi ini disajikan dalam suatu permasalahan konteks nyata tentang lintasan kapal. Konteks ini berhubungan dengan konteks nyata pada pertemuan 1 yang bercerita tentang kapal laut. Adapun LT pada situasi aksi ini mencakup gambar macam-macam kedudukan garis terhadap lingkaran dan titik potong garis terhadap lingkaran. Adapun situasi yang dimaksud tercantum dalam Lembar Kegiatan 5 sebagai berikut.

LEMBAR KEGIATAN 5

Menurut data pada sistem navigasi, di tengah samudra atlantik terdapat sebuah gunung es besar yang berada pada koordinat (-1,4). Zona aman kapal melintas di sekitar gunung es adalah lebih dari $\sqrt{5}$ satuan seperti pada gambar berikut ini.



Sementara itu, pada koordinat (-4,0) ada kapal yang akan melintas menuju suatu tempat di kuadran I dengan pilihan lintasan sebagai berikut:

Lintasan 1 melaju lurus melalui titik (0,4)

Lintasan 2 melaju lurus melalui titik (0,2)

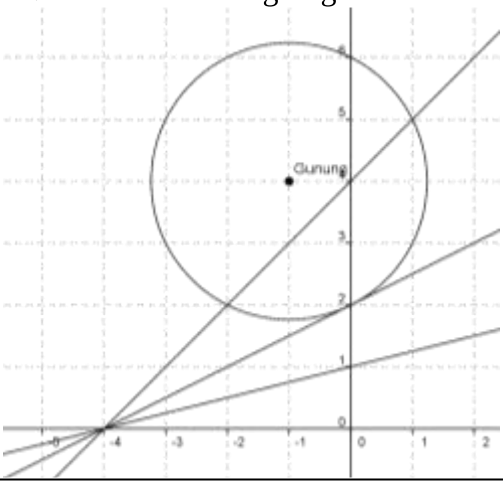
Lintasan 3 melaju lurus melalui titik (0,1)

Andaikan anda menjadi kapten kapal, lintasan mana yang akan anda pilih untuk dilalui kapal? Berikan alasan untuk semua lintasan yang dipilih dan tidak dipilih!

Gambar 4.11 Lembar Kegiatan 5

Melalui permasalahan pada LK 5, siswa tidak hanya menggambar kedudukan garis terhadap lingkaran namun juga diberikan pengalaman bagaimana mengambil suatu keputusan jika dihadapkan dengan situasi yang diberikan. Siswa diminta untuk menentukan lintasan mana yang akan dipilih untuk dilalui agar dapat sampai pada tempat yang akan dituju dengan aman. Gambar lingkaran pada LK 4 ini diilustrasikan sebagai batasan zona berbahaya bagi kapal untuk melintas di sekitar gunung es, sedangkan kedudukan garis diilustrasikan sebagai lintasan lurus kapal yang melalui titik tertentu. Adapun respon yang diprediksikan muncul termuat dalam tabel berikut ini.

Tabel 4.6 Tabel Prediksi Respon Siswa Terhadap Lembar Kegiatan 5

No	Prediksi Respon
1	Siswa bingung dengan konteks yang diberikan pada WS 5
2	Siswa menggambar lintasan 1, 2, dan 3 pada gambar di WS 5 dan memilih lintasan ke 3 karena: a. Paling aman untuk dilintasi b. Paling terjauh dari zona aman gunung c. Tidak memotong lingkaran 
3	Siswa menggambar lintasan 1, 2, dan 3 pada gambar di WS 5 dan memilih lintasan ke 2 karena sudah berada pada zona aman

Berdasarkan hasil repersonalisasi didapat 3 respon yang diprediksikan akan muncul dari siswa. Dari ketiga respon ini yang paling diharapkan muncul adalah respon 2 dan 3 karena dari kedua respon inilah didapat gambar dari macam-macam kedudukan garis terhadap lingkaran. Apabila muncul prediksi 1, 1 siswa pada kelompok tersebut diminta untuk datang ke kelompok yang muncul prediksi 2 dan 3 dan menjelaskan pada anggota kelompoknya. Jika muncul prediksi 2 dan 3 pada semua kelompok, maka dilanjutkan pada pembahasan tentang kedudukan garis terhadap lingkaran dengan penjelasan bahwa batasan zona aman kapal melintas merupakan suatu lingkaran dan lintasan 1 merupakan suatu garis yang memotong lingkaran (garis dan lingkaran memiliki 2 titik perpotongan), lintasan 2 merupakan suatu garis yang menyinggung lingkaran (garis dan lingkaran memiliki 1 titik perpotongan), sedangkan lintasan 3 merupakan suatu garis yang saling lepas terhada lingkaran (garis dan lingkaran tidak memiliki titik perpotongan).

b. Formulasi

Setelah melakukan kegiatan aksi, siswa dikondisikan pada situasi formulasi. Pada situasi ini, siswa diminta untuk menggeneralisasikan 3 kedudukan garis terhadap lingkaran tersebut secara aljabar. Langkah awal yang dilakukan adalah membuktikan apakah terdapat 2, 1 atau tidak ada titik perpotongan antar garis dan lingkaran. sehingga pada akhirnya akan sampai pada syarat kapan saat garis memotong, menyinggung, dan saling lepas terhadap lingkaran. Kegiatan tersebut termuan dalam LT titik potong garis terhadap lingkaran dan syarat kedudukan garis terhadap lingkaran.

Untuk mencapai kegiatan tersebut, maka siswa diberikan pertanyaan "Bagaimana cara menunjukkan bahwa lintasan 1 memiliki 2 titik perpotongan dengan lingkaran, lintasan 2memiliki 1 titik perpotongan dengan lingkaran, dan lintasan 3 tidak memiliki titik perpotongan dengan lingkaran secara aljabar?". Pertanyaan ini langsung dikemukakan setelah adanya kesimpulan tentang kedududkan garis terhadap lingkaran secara geometris tanpa memberikan Lembar Kegiatan (LK) baru. Hal ini dikarenakan persoalan yang ada masih temuat dalam LK 5. Adapun respon yang diprediksikan akan muncul dan antisipasi yang akan diberikan termuat dalam tabel berikut.

Tabel 4.7 Tabel Prediksi Respon Siswa Terhadap Lembar Kegiatan 5 (Lanjutan)

No	Prediksi Respon	Antisipasi
1	Siswa lupa cara menentukan persamaan garis yang melalui 2 titik	Siswa diingtkan kembali tentang persamaan garis yang melalui titik potong sumbu x dan sumbu y
2	Siswa lupa cara menentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (-1,4) dan berjari-jari $\sqrt{5}$	Siswa diingatkan kembali tentang persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) dan berjari-jari r
3	Siswa dapat mencari persamaan garis 3 lintasan tersebut namun bingung dengan langkah selanjutnya	Siswa diminta untuk memperhatikan kedudukan ketiga garis yang ada di gambar, jika garis dan lingkaran dibentuk ke dalam suatu persamaan,

No	Prediksi Respon	Antisipasi
		bagaimana cara kita tahu kapan garis memotong lingkaran? (saat hasil substitusi persamaan garis ke persamaan lingkaran memiliki penyelesaian real)
4	Siswa mencari persamaan garis dan persamaan lingkaran, lalu mensubstitusi garis y = f(x) pada persamaan lingkaran: Lintasan 1 $4x - 4y = -16$ $y = x + 4$ Persamaan lingkaran $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$ Atau $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$ Persamaan garis disubstitusikan pada persamaan lingkaran sehingga menjadi: $x^2 + (x+4)^2 + 2x - 8(x+4) + 12 = 0$ $x^2 + x^2 + 8x + 16 + 2x - 8x - 32 + 12 = 0$ $2x^2 + 2x - 4 = 0$ $x^2 + x - 2 = 0$ $(x+1)(x-1) = 0$ Didapat$x = -1\ dan\ x = 1$ Lintasan 2 $2x - 4y = -8$ $y = \frac{x+4}{2}$ Persamaan lingkaran $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$ Atau $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$ Persamaan garis disubstitusikan pada persamaan lingkaran sehingga menjadi: $x^2 + (\frac{x+4}{2})^2 + 2x - 8(\frac{x+4}{2}) + 12 = 0$ $4x^2 + x^2 + 8x + 16 + 8x - 16x - 64 + 48 = 0$ $5x^2 = 0$ Didapat$x = 0$ Lintasan 3 $x - 4y = -4$	Jika muncul prediksi 5 dan 6 tetapi bingung untuk mencari penyelesaian dari hasil substitusi **lintasan 3,** maka diingatkan kembali tentang rumus kudratis

No	Prediksi Respon	Antisipasi
	$y = \frac{x+4}{4}$ Persamaan lingkaran $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5$ Atau $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$ Persamaan garis disubstitusikan pada persamaan lingkaran sehingga menjadi: $x^2 + (\frac{x+4}{4})^2 + 2x - 8(\frac{x+4}{4}) + 12 = 0$ $16x^2 + x^2 + 8x + 16 + 32x - 32x - 128 + 192 = 0$ $17x^2 + 8x + 80 = 0$ Didapat$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 17 \cdot 80}}{2 \cdot 17}$	
6	Siswa mencari persamaan garis dan persamaan lingkaran, lalu mensubstitusi garis x = f(y) pada persamaan lingkaran: (cara sama dengan prediksi 5)	Jika muncul prediksi 5 dan 6, maka dipresentasikan

Respon yang sangat diprediksikan muncul adalah siswa mengetahui tentang persamaan garis dan lingkaran namun kesulitan dalam menemukan cara bagaimana menentukan titik potongnya. Sehingga diperlukan bantuan berupa pertanyaan yang tercantum dalam antisipasi respon. Apabila tetap tidak memahaminya, diberikan bantuan kembali berupa pertanyaan "bagaimana cara menentukan titik potong dari 2 garis yang saling berpotongan?". Pertanyaan ini diberikan karena siswa lebih memahami tentang titik potong antara 2 garis dibandingkan titik potong antara garis dan kurva. Diharapkan siswa sudah sampai pada pemahaman tentang prosedur eliminasi atau substitusi untuk mencari titik potong antara 2 bentuk geometris. Setelah siswa dapat memahaminya, maka diharapkan akan menuju respon 5 atau 6.

Respon 5 dan 6 adalah respon yang diharapkan muncul karena kedua respon ini menunjukan adanya titik potong atau tidak antara garis dan lingkaran. setelah didapatkan kesimpulan tentang cara menentukan titik potong, maka dilanjutkan dengan memberikan pertanyaan "jadi, jika diketahui persamaan garis dan persamaan lingkaran, bagaimana kita mengetahui kedudukan garis tersebut terhadap lingkaran?" sebagai suatu kesimpulan dari situasi formulasi. Respon yang diprediksikan muncul adalah (prediksi 1) dengan melihat hasil substitusinya (terdapat titik potong atau tidak), dan (prediksi 2) dengan melihat diskriminananya. Apabila muncul prediksi 1, maka diantisipasi dengan memberikan pertanyaan "jadi, saat persamaan kuadrat memiliki penyelesaian real dan tidak real, itu dapat dicek dari apa ya?" dan diharapkan muncul prediksi 2.

Pada kegiatan formulasi ini, diharapkan siswa sampai pada kesimpulan sebagai berikut:

Diketahui persamaan garis $px + qy + r = 0$ dan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Hasil substitusi persamaan garis terhadap persamaan lingkaran tersebut menghasilkan bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ atau $ay^2 + by + c = 0$.

Diperoleh hasil $D = b^2 - 4ac < 0 \leftrightarrow$ garis dan lingkaran tidak memiliki titik perpotongan

Diperoleh hasil $D = b^2 - 4ac = 0 \leftrightarrow$ garis dan lingkaran memiliki 1 titik perpotongan

Diperoleh hasil $D = b^2 - 4ac > 0 \leftrightarrow$ garis dan lingkaran memiliki 2 titik perpotongan

c. Validasi

Selanjutnya dibuat situasi validasi berupa persoalan pada Lembar Kegiatan 6. Permasalahan pada LK 6 dirancang dengan prosedur terbalik dengan permasalahan sebelumnya. Jika pada permasalahan sebelumnya siswa harus menentukan hasil diskriminan untuk menentukan kedudukan garis terhadap lingkaran, pada LK 6 ini siswa diminta untuk mencari persamaan garis yang kedudukannya sudah diketahui yaitu menyinggung lingkaran. hal ini dilakukan untuk memastikan bahwa siswa sudah memahami syarat kedudukan antara garis dan lingkaran. tujuan dari situasi ini adalah agar siswa dapat memvalidasi pemahaman yang telah diketahui tentang syarat kedudukan garis terhadap lingkaran.

Jika diketahui garis $x - y = p$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 9 = 0$, maka nilai p adalah

Gambar 4.12 Lembar Kegiatan 6

Permasalahan ini dapat diselesaikan apabila siswa sudah memahami syarat dari kedudukan garis yang menyinggung lingkaran. Berdasarkan pengalaman sebelumnya yaitu pada kegiatan formulasi, diprediksikan siswa akan mensubstitusi persamaan garis $y = x\text{-}p$ pada persamaan lingkaran sehingga akan menghasilkan persamaan kuadrat $2x^2 + (-2p - 10)x + (p^2 + 8p + 9) = 0$. Untuk menentukan nilai dari $p$maka siswa harus memperhatikan kembali bagaimana kedudukan garis terhadap lingkaran. Karena diketahui bahwa garis menyinggung lingkaran, maka didapatkan nilai Diskriminan (D) = 0. Sehingga akan didapat nilai $p$dengan prosedur berikut.

$\leftrightarrow D = 0$

$\leftrightarrow (-2p - 10)^2 - 4(2)(p^2 + 8p + 9) = 0$ (1)

dengan mengoperasikan persamaan (1) didapat

$\leftrightarrow p^2 + 6p - 7 = 0$

dengan cara faktorisasi, didapat nilai p adalah -7 atau 1

Penggunaan syarat kedudukan garis terhadap lingkaran dalam permasalahan ini dapat memperjelas bahwa untuk membuktikan kedudukan garis pada lingkaran tidak cukup dengan menemukan titik potong, tetapi sampai pada nilai diskriminan. Adapun diprediksikan juga terdapat siswa yang masih kesulitan dalam menggunakan syarat ini. Sehingga disediakan antisipasi berupa dilakukan penjelasan ulang terhadap kesimpulan yang telah didapat pada kegiatan formulasi.

4. Desain Didaktis Konsep Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Melalui Titik Singgungnya

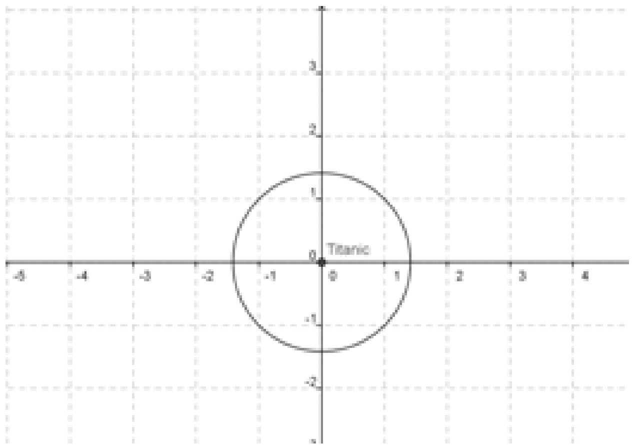
Tujuan utama dari pertemuan 4 ini adalah siswa dapat merepresentasikan gambar garis singgung lingkaran pada koordinat Kartesius yang diketahui melalui suatu titik pada lingkaran menjadi suatu bentuk persamaan. Pada pertemuan sebelumnya siswa sudah mengenal tentang garis singgung lingkaran secara geometris dan bagaimana posisi titik secara aljabar saat diketahui ada pada lingkaran tertentu. Selain itu, saat tingkat SMP siswa telah memperoleh pengetahuan tentang persamaan garis yang melalui suatu titik tertentu. Pemahaman sebelumnya inilah yang menjadi prasyarat siswa untuk mempelajari persamaan garis singgung lingkaran. Misalkan diketahui terdapat suatu garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan titik tersebut ada pada lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Melalui situasi didaktis yang telah dirancang, diharapkan siswa dapat menemukan persamaan dari garis singgung tersebut yaitu $(x-x_1)(x-a) + (y-y_1)(y-b) = r^2$. Untuk sampai pada penemuan ini, siswa diharapkan memiliki kemampuan dalam memanipulasi bentuk aljabar. Sesuai dengan teori situasi didaktis, kegiatan yang ada pada pertemuan ini meliputi kegiatan aksi, formulasi, validasi, dan instruksionalisasi.

a. Aksi

Suatu garis yang melalui suatu titik tertentu dapat ditentukan persamaan garisnya jika diketahui gradien dari garis tersebut. Jika gradien garis tidak dapat diketahui secara langsung, maka dapat mencari gradien dari garis lain yang memiliki keterkaitan dengan garis tersebut misalnya saling sejajar atau saling tegak lurus. Kegiatan aksi ini bertujuan agar siswa dapat mencari gradien dari garis singgung lingkaran agar selanjutnya dapat digunakan untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran. Oleh karena itu, kegiatan awal dari pembelajaran ini adalah menggambar dan menentukan persamaan garis singgung yang melalui titik (-1,1). Adapun titik (-1,1) berada pada lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ yang dapat teramati secara langsung oleh siswa melalu gambar yang telah disajikan. Kegiatan ini disajikan dalam bentuk lembar kegiatan berisi suatu permasalahan tentang cerita lintasan kapal yang melintas dengan lurus dan memiliki kondisi tertentu seperti pada Lembar Kegiatan 7 berikut.

Selamatkan Penumpang Titanic!

Kapal Titanic yang terletak pada koordinat (0,0) akan tenggelam di tengah Samudra Atlantik dikarenakan menabrak sebuah gunung es. Seluruh penumpang panik dan menyelamatkan diri menggunakan sekoci. Sementara itu, kapten kapal mengirimkan SOS pada kapal Carpathia agar dapat menolong para penumpang. Adapun zona kapal berhenti untuk menyelamatkan penumpang harus berada pada radius $\sqrt{2}$dari kapal Titanic agar tetap aman. Gambar berikut menampilkan posisi kapal dan zona kapal Carpathia dapat berhenti.



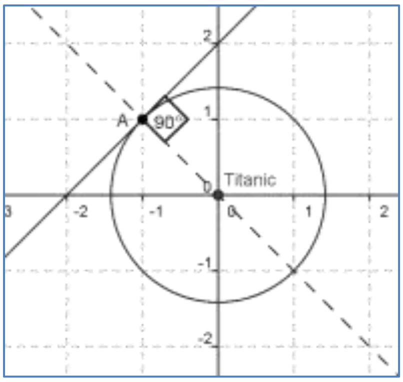
Jika kapal Carpathia melaju lurus dari kuadran III menuju kuadran I dengan berhenti terlebih dahulu pada titik (-1,1) untuk menyelamatkan penumpang, bagaimana gambar lintasan kapal Carpathia dan persamaan garis yang menunjukkan lintasan kapal Carpathia?

Gambar 4.13 Lembar Kegiatan 7

Permasalahan pada LK 7 ini menceritakan lintasan kapal yang melaju lurus dari kuadran III menuju kuadran I dan melaui titik (-1,1). Selain itu, lintasan harus menyinggung zona aman kapal melintas yang digambarkan sebagai bentuk lingkaran. Tujuan dari penyajian masalah tersebut agar siswa dapat menggambar garis singgung lingkaran yang melalui titik tertentu pada lingkaran dan mengetahui aplikasinya pada kehidupan sehari-hari. Selain itu, konteks tentang SOS disajikan agar terjalin keterkaitan dengan pertemuan 1 yang membahas tentang SOS juga. Sehingga pada tiap pertemuan terdapat rangkaian cerita yang dapat menarik perhatian siswa.

Kegiatan pada LK 7 ini mencakup LT dari garis singgung lingkaran yang melalui titik tertentu pada lingkaran tertentu dan gradien garis singgung lingkaran. Untuk menyelesaikan permasalahan pada LK 7 diharapkan siswa dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran (lintasan kapal) dengan cara mencari terlebih dahulu gradien dari garis singgung tersebut. Sebelumnya siswa pada tingkat SMP telah mempelajari tentang konsep dari garis singgung lingkaran yang tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran yang bersesuaian. Sehingga konsep tersebut dapat diaplikasikan untuk mencari gardien garis singgung lingkaran.

Persamaan garis yang didapat siswa yang melalui titik (-1,1) adalah $y-1=m(x+1)$ dengan m adalah gradien dari garis singgung. Persamaan garis singgung dapat ditentukan dengan mencari terlebih dahulu gradien garis AT (Titik A merupakan titik singgung dan titik T adalah titik pusat lingkaran) seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.14 Garis Singgung Lingkaran

Gradien garis (lintasan kapal) saling tegak lurus dengan garis AT. Sehingga gradien garis (lintasan kapal) adalah

$$m=\frac{-1}{m_{AT}}$$

$$m=\frac{-1}{-1}=1$$

Sehingga didapat persamaan garis yang bergradien 1 dan melalui titik (-1,1) adalah

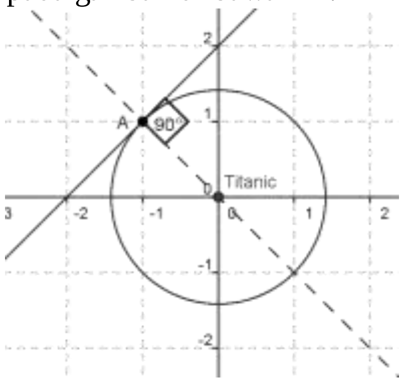
$$y-1=1(x-(-1))$$

$$y=x+2$$

Respon siswa yang diprediksikan akan muncul saat menentukan persamaan garis singgung adalah saat-saat dimana siswa mengalami hambatan dalam menyelesaikan prosedur tersebut. Selain itu, diprediksikan pula respon siswa yang dapat menentukan persamaan garis singgung dengan cara lainnya. Sehingga disediakan pula antisipasi untuk respon yang diprediksikan muncul tersebut yang termuat dalam tabel berikut.

Tabel 4.8

Tabel Prediksi Respon Siswa Terhadap Lembar Kegiatan 7

No	Prediksi Respon	Antisipasi
1	Persamaan garis yang didapat siswa adalah $2x - 2y = -4$, karena terlihat dari gambar pada prediksi 3 bahwa garis memotong sumbu y di (0,2) dan memotong (-2,0)	Jika muncul prediksi 1, siswa diminta mencari cara lain untuk menentukan persamaan garis tersebut jika hanya diketahui melalui titik (-1,1).
2	Persamaan garis yang didapat siswa yang melalui titik (-1,1) adalah $y - 1 = m(x + 1)$ namun belum dapat menetukan nilai gradien dari garis tersebut	Jika muncul prediksi 6, siswa diberikan bantuan berupa garis yang melalui titik (-1,1) dan titik pusat lingkaran yaitu (0,0) seperti pada gambar di bawah ini.  Diharapkan dengan bantuan ini, siswa dapat mencari gradien lintasan yang tegak lurus dengan garis AT (garis yang melalui titik A(-1,1) dan T(0,0)

b. Formulasi

Aktifitas selanjutnya adalah formulasi yaitu menggeneralisasikan permasalahan untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran. Pada aktifitas aksi, siswa diberikan informasi yang lebih khusus untuk dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran. hal ini bertujuan agar siswa lebih mudah memahaminya dan melihat bagaimana prosedur yang ada agar dapat diaplikasikan pada bentuk yang lebih umum. Persamaan garis singgung lingkaran yang sebelumnya diketahui melalui titik (-1,1) digeneralisasikan menjadi melalui titik (a,b) sedangkan lingkaran yang sebelumnya memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 2$ diubah menjadi $x^2 + y^2 = r^2$. Persamaan lingkaran yang dipilih adalah persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0,0) terlebih dahulu agar siswa dapat memahami bagaimana prosedur yang ada untuk selanjutnya dapat diaplikasikan pada persamaan lingkaran yang lebih umum. Adapun permasalahan yang disajikan temuat dalam Lembar Kegiatan 8 berikut ini.

LEMBAR KEGIATAN 8

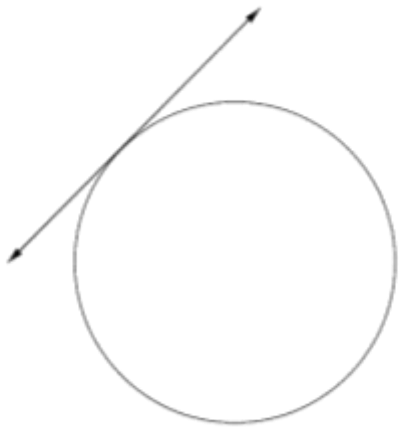
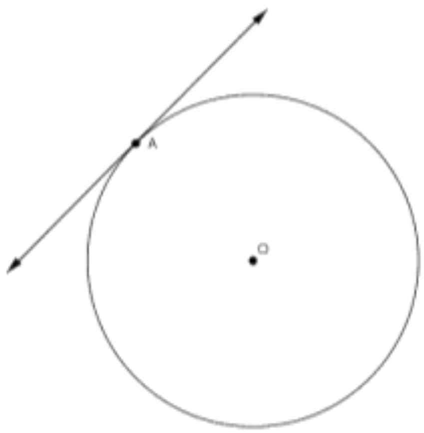
Jika titik (x_1, y_1) terdapat pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, buktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik tersebut adalah adalah $x_1x + y_1y = r^2$

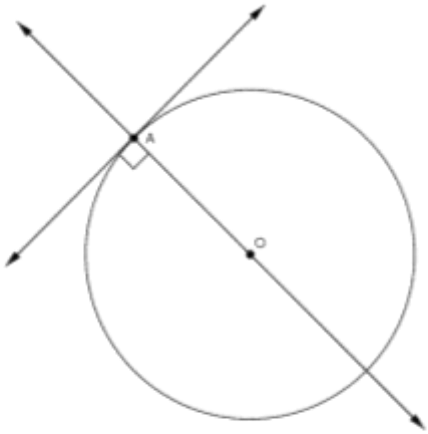
Gambar 4.15 Lembar Kegiatan 8

Lembar Kegiatan 8 memuat pernyataan tentang pembuktian dari persamaan garis singgung lingkaran yang melalui suatu titik pada lingkaran. Menurut penulis, siswa dalam proses pembelajaran sehari-hari belum terbiasa dalam menyelesaikan permasalahan yang memuat perintah untuk membuktikan rumus. Hal tersebut dikarenakan siswa terbiasa secara langsung mengetahui rumus yang akan dipelajari tanpa dilakukan pembuktian terlebih dahulu. Oleh karena itu, dengan adanya kegiatan ini siswa diharapkan dapat memperoleh pengalaman bagaimana cara membuktikan suatu rumus dari informasi-informasi yang telah diketahui sebelumnya. Teorema pada LK 8 memuat premis dan konklusi (Heinze, 2008, hlm. 444). Tujuan utama dari proses pembuktian adalah mengkonstruksi susunan argumen dari premis ke konklusi dengan alasan yang mendukung.

Jawaban dari permasalahan pada LK 8 dapat secara mandiri dibuktikan oleh siswa jika siswa telah memahami bagaimana proses menentukan persamaan garis singgung lingkaran pada LK 7. Namun dikarenakan informasi yang disediakan jauh lebih umum dan abstrak, maka penulis memprediksikan akan adanya hambatan yang terjadi pada siswa khususnya saat mencari gradien dari garis singgung lingkaran tersebut. Berdasarkan hasil repersonalisasi yang telah dilakukan sebelumnya, maka respon-respon siswa yang akan diprediksikan muncul beserta antisipasi yang akan dilakukan adalah sebagai berikut.

Tabel 4.8 Prediksi Respon dengan Antisipasi untuk LK 8

No	Prediksi Respon	Antisipasi
1	Siswa membuat gambar garis yang menyinggung lingkaran, namun tidak memberikan keterangan posisi titik pusat dan titik yang dilalui garis sehingga tidak mengetahui cara untuk menentukan persamaan garis singgungnya 	Jika muncul prediksi 1, siswa diminta untuk menambahkan keterangan berdasarkan informasi yang telah diketahui yaitu koordinat titik pusat lingkaran dan titik yang dilalui garis singgung tersebut. Diharapkan siswa dapat menentukan gradien garis singgung berdasarkan pengalaman yang telah didapat sebelumnya yaitu melalui keterkaitan antara garis singgungdan garis melalui titik pusat dan titik singgung yang saling tegak lurus.
2	Siswa membuat gambar garis yang menyinggung lingkaran dan diberikan keterangan posisi titik pusat dan titik yang dilalui garis tersebut, namun tidak dapat menentukan langkah selanjutnya  Dengan koordinat titik A = (x_1, y_1) dan O = (0,0)	Jika muncul prediksi 2, siswa diminta menggambar garis yang melalui titik A dan O agar dapat mengingat kembali keterkaitan antara dua garis yang saling tegak lurus tersebut. Selanjutnya berdasarkan pengetahuan yang telah didapat sebelumnya, siswa dapat menghitung gradien garis yang melalui titik A dan O

<table>
<tr><th>No</th><th>Prediksi Respon</th><th>Antisipasi</th></tr>
<tr><td>3</td><td>Siswa membuat gambar garis yang menyinggung lingkaran dan diberikan keterangan posisi titik pusat dan titik yang dilalui garis tersebut, dan dapat menentukan persamaan garis tersebut dengan mencari terlebih dahulu gradiennya.


Dengan koordinat titik A = (x_1, y_1) dan O = (0,0)

Misalkan garis singgung lingkaran adalah garis l dan garis yang melalui titik pusat lingkaran dan titik A adalah garis g.
Gradien dari garis g adalah
$$m_g = \frac{y_1}{x_1}$$
Diketahui bahwa garis l dan garis $g$saling tegak lurus (berdasarkan sifat garis singgung). Sehingga gradien dari garis l adalah
$$m_l = -\frac{1}{m_g}$$
$$m_l = -\frac{x_1}{y_1}$$
Diketahui garis l melalui titik (x_1, y_1) sehingga persamaan dari garis l adalah
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1(y - y_1) = -x_1(x - x_1)$$
$$y_1 y - {y_1}^2 = -x_1 x + {x_1}^2$$
$$x_1 x + y_1 y = {x_1}^2 + {y_1}^2$$</td><td>Jika muncul prediksi 3, maka siswa diingatkan kembali materi yang telah dipelajari pada pertemuan 1 yaitu kedudukan titik terhadap lingkaran</td></tr>
</table>

No	Prediksi Respon	Antisipasi
	Sehingga didapat $$x_1x+y_1y = {x_1}^2 + {y_1}^2$$ Kemudian siswa kesulitan untuk mengubahnya menjadi $$x_1x+y_1y = r^2$$	
4	Siswa sudah sampai pada prediksi 4 dan dapat melanjutkan bagaimana cara mengubah persamaan $$x_1x+y_1y = {x_1}^2 + {y_1}^2$$ Menjadi $$x_1x+y_1y = r^2$$ Dikarenakan titik (x_1, y_1) ada pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga berlaku ${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2$	

Setelah dapat menentukan gradien dari garis singgung lingkaran, pada kegiatan ini diharapkan siswa dapat memahami penggunaan informasi titik (x_1, y_1) ada pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga dapat digunakan pada persamaan yang telah didapat sebelumnya. Pengetahuan ini selanjutnya dapat diaplikasikan oleh siswa pada permasalahan di LK 9 yang memuat perintah membuktikan sebagai berikut.

LEMBAR KEGIATAN 9

Jika titik (x_1, y_1) terdapat pada lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, buktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik tersebut adalah adalah $(x_1 - a)(x-a) + (y_1 - b)(y-b) = r^2$

Gambar 4.16 Lembar Kegiatan 9

Lembar Kegiatan 9 merupakan generalisasi dari LK 8 dimana pusat lingkaran diubah menjadi lebih umum yaitu pada koordinat (a,b). Untuk menyelesaikan permasalahan ini siswa sudah memiliki pengalaman belajar dari LK 7 dan LK 8 yang saling berkaitan sehingga memungkinkan siswa untuk dapat lebih mudah menyelesaikannya. Adapun yang diprediksi menjadi kesulitan siswa pada LK 9 adalah bagaimana cara mengubah persamaan yang telah didapat menjadi bentuk persamaan yang diinginkan yaitu $(x_1 - a)(x-a) + (y_1 - b)(y-b) = r^2$.

Berdasarkan pengalaman sebelumnya yaitu menentukan gradien dari garis singgung pada LK 8, maka diprediksikan siswa dapat mengaplikasikannya pada permasalahan LK 9. Sehingga didapatkan gradien garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) adalah $m_l = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$

Selanjutnya akan didapat persamaan dari garis singgung lingkaran adalah

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

$\leftrightarrow (y_1 - b)(y - y_1) = -(x_1 - a)(x - x_1)$

$\leftrightarrow y_1 y - by - {y_1}^2 + by_1 = -x_1 x + ax + {x_1}^2 - ax_1$ (1)

$\leftrightarrow y_1 y - by + by_1 + x_1 x - ax + ax_1 = {x_1}^2 + {y_1}^2$ (2)

Diketahui bahwa titik (x_1, y_1) terdapat pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ sehingga

berlaku $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

$\leftrightarrow {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2ax_1 - 2by_1 = r^2$

$\leftrightarrow {x_1}^2 + {y_1}^2 = 2ax_1 + 2by_1 + r^2$

Sehingga ${x_1}^2 + {y_1}^2$ dapat disubtstitusi menjadi $2ax_1 + 2by_1 + r^2$ pada persamaan (2) dan menjadi

$y_1 y - by + by_1 + x_1 x - ax + ax_1 = 2ax_1 + 2by_1 + r^2$ (3)

Dengan proses faktorisasi maka akan didapat bentuk persamaan lingkaran

$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$ (4)

Siswa diprediksikan akan kesulitan pada saat merubah persamaan (1) atau persamaan (2) menjadi persamaan (3). Sehingga dibuatkan antisipasi berupa penjelasan kembali tentang kedudukan titik terhadap lingkaran agar siswa dapat menentukan persamaan (3). Adapun perubahan dari persamaan (3) menjadi persamaan (4), maka dibuatkan antisipasi berupa alur mundur dari persamaan (4) menjadi (4). Alur mundur ini diprediksikan akan lebih memudahkan siswa untuk memahami tahapan faktorisasinya.

c. Validasi

Pemahaman siswa tentang persamaan garis singgung lingkaran yang telah didapatkan dari kegiatan formulasi selanjutnya divalidasi dengan memberikan permasalahan yaitu menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik (3,4). Jika siswa sudah memahami bagaimana cara mengaplikasikan rumus persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik singgung, maka permasalahan yang disajikan akan dengan mudah diselesaikan. Jika siswa masih kesulitan, maka kegiatan formulasi yang telah dilakukan belum sepenuhnya dipahami siswa. Sehingga diberikan antisipasi berupa tanya jawab kembali tentang rumus persamaan garis singgung lingkaran.

Pada kegiatan validasi ini, tujuan utama yang ingin dicapai adalah siswa dapat mengaplikasikan konsep persamaan garis singgung dengan memeriksa terlebih dahulu apakah titik (3,4) ada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25.$ Karena jika titik tersebut tidak berada pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 25,$ maka konsep persamaan garis singgung lingkaran tidak dapat secara langsung diaplikasikan dengan menganggap bahwa $(x_1, y_1) = (3,4).$ Hal tersebut dikarenakan syarat agar diperoleh persamaan garis singgung lingkaran pada kegiatan formulasi adalah jika garis singgung lingkaran melalui titik singgungnya atau dapat dikatakan bahwa titik (x_1, y_1) ada pada lingkaran.

5. Desain Didaktis Konsep Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu (m)

Persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan dengan 2 cara yaitu diketahui melalui suatu titik dan diketahui memiliki gradien tertentu. Setelah siswa dapat mempelajari bagaimana proses menentukan persamaan garis singgung yang melalui titik singgungnya, maka proses pembelajaran dilanjutkan dengan mempelajari bagaimana proses menentukan persamaan garis singgung lingkaran dengan gradient tertentu (m). Tujuan utama dari pertemuan 5 ini adalah siswa dapat merepresentasikan gambar garis singgung lingkaran (geometris) pada koordinat Kartesius yang diketahui bergradien tertentu (m) menjadi suatu bentuk persamaan (aljabar). Sebelumnya, pada pertemuan 3 siswa sudah mengenal tentang kedudukan garis terhadap lingkaran baik secara geometris maupun aljabar. Pemahaman sebelumnya inilah yang menjadi prasyarat siswa untuk mempelajari persamaan garis singgung lingkaran.

Misalkan diketahui suatu garis dengan gradien m menyinggung lingkaran $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, melalui situasi didaktis yang telah dirancang diharapkan siswa secara mandiri dapat menemukan persamaan dari garis singgung tersebut yaitu $y-a=m(x-b)\pm r\sqrt{m^2+1}$. Untuk sampai pada penemuan ini, dibutuhkan kemampuan siswa dalam memanipulasi bentuk aljabar. Sesuai dengan teori situasi didaktis, kegiatan yang ada pada pertemuan ini meliputi kegiatan aksi, formulasi, validasi, dan instruksionalisasi.

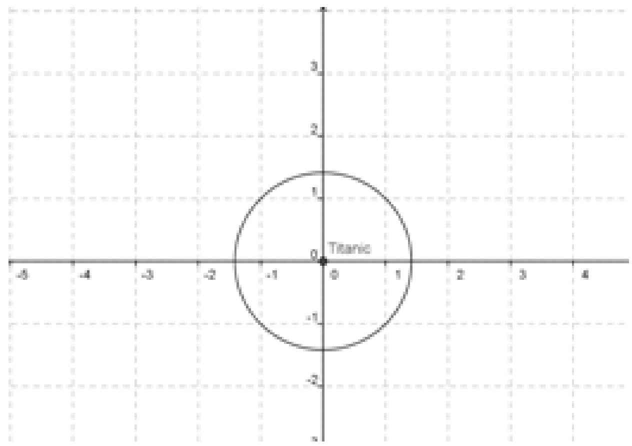
a. Aksi

Diketahui bahwa suatu garis yang bergradien m menyinggung suatu lingkaran dengan persamaan tertentu. Garis yang bergradien m dapat dituliskan secara aljabar menjadi persamaan garis $y=mx+c$ dengan $c$adalah suatu konstanta. Nilai c dapat ditentukan dengan adanya syarat diskriminan pada kedudukan garis yang menyinggung lingkaran. Kegiatan aksi ini bertujuan agar siswa dapat melihat bagaimana proses aplikasi dari konsep kedudukan garis yang menyinggung lingkaran sehingga dapat diaplikasikan kembali pada kegiatan selanjutnya. Oleh karena itu, kegiatan awal dari pembelajaran ini adalah menggambar dan menentukan persamaan gari singgung yang bergradien tertentu.

Kegiatan ini disajikan dalam bentuk lembar kegiatan berisi suatu permasalahan tentang cerita lintasan kapal yang melintas dengan lurus dan memiliki kondisi tertentu seperti pada Lembar Kegiatan 10 berikut.

Selamatkan Penumpang Titanic!

Kapal Titanic yang terletak pada koordinat (0,0) akan tenggelam di tengah Samudra Atlantik dikarenakan menabrak sebuah gunung es. Seluruh penumpang panik dan menyelamatkan diri menggunakan sekoci. Sementara itu, kapten kapal mengirimkan SOS pada kapal Carpathia agar dapat menolong para penumpang. Adapun zona kapal berhenti untuk menyelamatkan penumpang harus berada pada radius $\sqrt{2}$dari kapal Titanic agar tetap aman. Gambar berikut menampilkan posisi kapal dan zona kapal Carpathia dapat berhenti.



Jika kapal Carpathia melaju lurus dari kuadran I menuju kuadran III dengan kemiringan lintasan adalah membentuk sudut$45°$terhadap sumbu x untuk menyelamatkan penumpang, bagaimana gambar lintasan kapal Carpathia dan persamaan garis yang menunjukkan lintasan kapal Carpathia?

Gambar 4.17 Lembar Kegiatan 10

Permasalahan pada LK 10 ini memuat cerita yang sama seperti yang termuat dalam pertemuan sebelumnya (LK 7). Hal ini dilakukan agar terjalin keterkaitan antara konteks yang disajikan pada tiap pertemuannya. Adapun yang berbeda adalah pada informasi bagaimana lintasan kapalnya. Pada LK 10, lintasan kapal harus membentuk sudut $45°$ terhadap sumbu x. Informasi ini dipilih agar muncul konsep gradien sehingga sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai.

Kegiatan pada LK 10 ini mencakup LT dari garis singgung lingkaran yang bergradien tertentu pada lingkaran tertentu dan syarat garis yang menyinggung lingkaran. Untuk menyelesaikan permasalahan pada LK 10 diharapkan siwa dapat menggambar serta menentukan persamaan garis singgung lingkaran (lintasan kapal) dengan cara menghitung terlebih dahulu gradient dari gari singgung yaitu $m = tan\, 45° = 1$ dan selanjutnya memisalkan garis singgungnya memiliki persamaan $y = x + c$ dengan c adalah suatu konstanta. Sebelumnya pada pertemuan 3 siswa sudah mempelajari konsep kedudukan garis terhadap lingkaran. Sehingga konsep tersebut diharapkan dapat diaplikasikan siswa pada permasalahan ini.

Diketahui garis menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ sehingga dengan konsep kedudukan garis terhadap lingkaran, persamaan garis dapat disubstitusikan pada persamaan lingkaran menjadi

$$x^2 + (x + c)^2 = 2$$
$$\leftrightarrow x^2 + x^2 + 2cx + c^2 = 2$$
$$\leftrightarrow 2x^2 + 2cx + c^2 - 2 = 0$$

Dengan syarat diskriminan yaitu $D = 0$ karena garis menyinggung lingkaran, maka didapat nilai dari *c* adalah 2 atau -2.

Respon siswa yang diprediksikan akan muncul saat menentukan persamaan garis singgung adalah saat-saat dimana siswa mengalami hambatan dalam mencari nilai c. Selain itu, diprediksikan pula respon siswa yang dapat menentukan persamaan garis singgung dengan cara lainnya. Sehingga disediakan pula antisipasi untuk respon yang diprediksikan muncul tersebut yang termuat dalam tabel berikut.

Tabel 4.9 Tabel Prediksi Respon Siswa Terhadap Lembar Kegiatan 10

No	Prediksi Respon	Antisipasi
1	Persamaan garis yang didapat siswa adalah $2x - 2y = -4$, karena terlihat dari gambar pada prediksi 3 bahwa garis memotong sumbu y di (0,2) dan memotong (-2,0)	Jika muncul prediksi 1, siswa diminta mencari cara lain untuk menentukan persamaan garis tersebut jika hanya diketahui menbentuk sudut 45° dengan sumbu *x*
2	Siswa menghitung terlebih dahulu gradien dari lintasan kapal laut yaitu $m = \tan 45° = 1$ Sehingga didapat persamaan garis $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - y_1 = 1(x - x_1)$ $y = x + y_1 - x_1$	Jika muncul prediksi 2, siswa diminta untuk memisalkan $y_1 - x_1$ menjadi suatu kontanta c sehingga diharapkan dengan bantuan ini, siswa dapat mencari nilai dari konstanta *c*

No	Prediksi Respon	Antisipasi
	Setelah mendapatkan persamaan garis tersebut, siswa tidak melanjutkan kembali karena titik (x_1, y_1) tidak diketahui	
3	Siswa mengerjakan seperti pada prediksi 2 dan melanjutkan dengan mengubah persamaan $y = x + y_1 - x_1$ menjadi $y = x + c$ Dengan c adalah suatu konstanta Namun siswa tidak mencari nilai dari c	Jika muncul prediksi 3, siswa diminta untuk mencari nilai dari konstanta c berdasarkan keterangan bahwa garis tersebut menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ Dengan mengingat kembali bagaimana syarat dari kedudukan garis yang menyinggung lingkaran yaitu berdasarkan nilai diskriminan dari persamaan kuadrat hasil substitusi persamaan garis pada persamaan lingkaran
4	Siswa mengerjakan seperti pada prediksi 3 dan melanjutkan dengan mensubstitusi persamaan garis tersebut pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 2$ sehingga menjadi $x^2 + (x + c)^2 = 2$ $x^2 + x^2 + 2cx + c^2 = 2$ $2x^2 + 2cx + c^2 = 2$ $2x^2 + 2cx + c^2 - 2 = 0$ Namun tidak melanjutkan kembali bagaimana mencari nilai c	Siswa diminta mengingat kembali bagaimana syarat dari kedudukan garis yang menyinggung lingkaran yaitu berdasarkan nilai diskriminan dari persamaan kuadrat hasil substitusi persamaan garis pada persamaan lingkaran
5	Siswa mengerjakan seperti pada prediksi 4 dan melanjutkan dengan menghitung nilai c dari diskriminan dari persamaan kuadrat $2x^2 + 2cx + c^2 - 2 = 0$ Karena garis $y = x + c$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 2$	

b. Formulasi

Aktifitas selanjutnya adalah formulasi yaitu menggeneralisasikan permasalahan untuk menentukan persamaan garis singgung lingkaran. Pada aktifitas aksi, siswa diberikan informasi yang lebih khusus untuk dapat menentukan persamaan garis singgung lingkaran. hal ini bertujuan agar siswa lebih mudah memahaminya dan melihat bagaimana prosedur yang ada agar dapat diaplikasikan pada bentuk yang lebih umum. Persamaan garis singgung lingkaran yang sebelumnya diketahui bergradien 1 diubah menjadi bergradien $m$sedangkan lingkaran yang sebelumnya memiliki persamaan $x^2 + y^2 = 2$ diubah menjadi $x^2 + y^2 = r^2$. Persamaan lingkaran yang dipilih adalah persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0,0) terlebih dahulu agar siswa dapat memahami bagaimana prosedur yang ada untuk selanjutnya dapat diaplikasikan pada persamaan lingkaran yang lebih umum. Adapun permasalahan yang disajikan temuat dalam Lembar Kegiatan 11 berikut ini.

LEMBAR KEGIATAN 11

Jika gradien garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah m, buktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran tersebut adalah $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$

Gambar 4.18 Lembar Kegiatan 11

Lembar Kegiatan 11 memuat pernyataan tentang pembuktian dari persamaan garis singgung lingkaran yang bergradien tertentu. Seperti pada pertemuan 4, dengan proses pembuktian ini diharapkan siswa dapat memahami bagaimana cara membuktikan suatu rumus dari informasi-informasi yang telah diketahui sebelumnya.

Jawaban dari permasalahan pada LK 11 dapat secara berkelompok dibuktikan oleh siswa jika siswa telah memahami bagaimana proses menentukan persamaan garis singgung lingkaran pada LK 10. Namun dikarenakan informasi yang disediakan jauh lebih umum dan abstrak, maka penulis memprediksikan akan adanya hambatan yang terjadi pada siswa khususnya menentukan nilai c. Berdasarkan hasil repersonalisasi yang telah dilakukan sebelumnya, maka respon-respon siswa yang akan diprediksikan muncul beserta antisipasi yang akan dilakukan adalah sebagai berikut.

Tabel 4.10 Prediksi respon siswa dan antisispasinya untuk Lembar Kegiatan 11

No	Prediksi Respon	Antisipasi
1	Siswa tidak mengetahui bagaimana cara menyelesaikannya	Jika muncul prediksi 1, maka diberikan bantuan

No	Prediksi Respon	Antisipasi
		berupa gambar garis singgung dan lingkaran. Diharapkan dengan diberikannya gambara tersebut, siswa dapat menghubungkannya dengan kegiatan aksi yang dilakukan sebelumnya.
2	Siswa membuat gambar garis yang menyinggung lingkaran, namun tidak dapat menentukan langkah selanjutnya	Jika muncul prediksi 2, siswa diminta untuk menambahkan keterangan dari persamaan garisnya. Diharapkan siswa dapat mensubtitusi persamaan garis pada persamaan lingkaran
3	Siswa mencari persamaan garis dengan cara $y - y_1 = m(x - x_1)$ $y = mx + y_1 - mx_1$ Setelah mendapatkan persamaan garis tersebut, siswa tidak melanjutkan kembali karena titik (x_1, y_1) tidak diketahui	Jika muncul prediksi 3, siswa diminta untuk mengubah $y_1 - mx_1$ menjadi c. Diharapkan siswa dapat mencari nilai c
4	Siswa memisal persamaan garis dengan $y = mx + c$ Dengan c adalah suatu konstanta Namun siswa tidak mencari nilai dari c	Jika muncul prediksi 4 dan 5, maka siswa diingatkan kembali materi yang telah dipelajari pada pertemuan 3 yaitu tentang kedudukan garis terhadap lingkaran
5	Siswa mengerjakan seperti pada prediksi 4 dan melanjutkan dengan mensubstitusi persamaan garis tersebut pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ sehingga menjadi $x^2 + (mx + c)^2 = r^2$ $x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 = r^2$ $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 = r^2$ $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$ Namun tidak melanjutkan kembali bagaimana mencari nilai c	
6	Siswa mengerjakan seperti pada prediksi 5 dan melanjutkan dengan menghitung nilai c dari diskriminan dari persamaan kuadrat $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - r^2 = 0$	

No	Prediksi Respon	Antisipasi
	Yaitu D = 0 $b^2 - 4ac = 0$ $(2mc)^2 - 4(1+m^2)(c^2 - r^2) = 0$ (1) dengan mengoperasikan persamaan (1) maka akan didapat nilai c adalah $c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$	

Setelah dapat menentukan nilai dari konstanta c, maka diharapkan siswa dapat mengaplikasikan proses yang sama pada penyelesaian LK 12. Pada kegiatan ini, siswa diberikan pertanyaan “Setelah mengetahui cara menentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$yang bergradien m, bagaimana ya jika informasinya diubah menjadi lebih umum kembali yaitu menentukan garis singgung lingkaran jika ketahui persamaan lingkarannya adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dan bergradien m?”.

LEMBAR KEGIATAN 12

Jika gradien garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah m, buktikan bahwa persamaan garis singgung lingkaran tersebut adalah $y - a = m(x-b) \pm r\sqrt{m^2+1}$

Gambar 4.19 Lembar Kegiatan 12

Lembar Kegiatan 12 merupakan generalisasi dari LK 11 dimana pusat lingkaran diubah menjadi lebih umum yaitu pada koordinat (a,b). Untuk menyelesaikan permasalahan ini siswa sudah memiliki pengalaman belajar dari LK 10 dan LK 11 yang saling berkaitan sehingga memungkinkan siswa untuk dapat lebih mudah menyelesaikannya. Adapun yang diprediksi menjadi kesulitan siswa pada LK 9 adalah bagaimana cara mengubah persamaan yang telah didapat menjadi bentuk persamaan yang diinginkan yaitu $y - a = m(x-b) \pm r\sqrt{m^2+1}$. Berdasarkan hasil repersonalisasi yang dilakukan oleh penulis, proses mengubah bentuk persamaan $(-2a + 2mc - 2mb)^2 - 4(1+m^2)(a^2 + c^2 -$

$2bc + b^2 - r^2) = 0$ menjadi $c = -am + b \pm r\sqrt{m^2+1}$ adalah yang tersulit. Hal tersebut dikarenakan bentuk persamaan sudah jauh lebih kompleks dan dibutuhkan motivasi yang tinggi untuk dapat merubahnya. Sehingga antisipasi akhir yang dapat dilakukan adalah adanya intervensi guru untuk dapat membimbing siswa dalam mengubah bentuknya namun tetap siswa yang mendiskusikan bagaimana proses perubahannya.

c. Validasi

Pemahaman siswa tentang persamaan garis singgung lingkaran yang telah didapatkan dari kegiatan formulasi selanjutnya divalidasi dengan memberikan permasalahan yaitu menentukan Persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 - 16 = 0$ yang sejajar dengan garis $3x - y + 2 = 0$. Jika siswa sudah memahami bagaimana cara mengaplikasikan rumus persamaan garis singgung lingkaran bergradien tertentu, maka permasalahan yang disajikan akan dengan mudah diselesaikan. Jika siswa masih kesulitan, maka kegiatan formulasi yang telah dilakukan belum sepenuhnya dipahami siswa. Sehingga diberikan antisipasi berupa tanya jawab kembali tentang rumus persamaan garis singgung lingkaran.

Pada kegiatan validasi ini, tujuan utama yang ingin dicapai adalah siswa dapat mengaplikasikan konsep persamaan garis singgung dengan mencari terlebih dahulu jari-jari lingkaran dan gradien garis singgung. Gradient garis singgung dapat ditentukan dengan kedudukannya yang sejajar dengan garis $3x - y + 2 = 0$. Sehingga diperoleh gradient dari garis singgung adalah m = 3. Selajutnya disubstitusikan pada persamaan garis menjadi $y = 3x \pm 4\sqrt{10}$.

B. Implementasi Desain Didaktis Hipotesis Konsep Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran

Desain didaktis hipotesis materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran ini diimplementasikan pada kelas XI MIPA 5 Di salah satu SMA Negeri di Kota Bandung dengan jumlah siswa 36 orang. Kegiatan pembelajaran berlangsung secara berkelompok yang setiap kelompoknya terdiri dari 4 orang. Situasi didaktis dirancang secara berkelompok agar siswa dapat saling berinteraksi karena memiliki rasa tanggung jawab terhadap kelompoknya. Menurut Vigotsky (Suryadi, 2010, hlm 59), belajar dapat membangkitkan berbagai proses mental manakala seseorang berkolaborasi dengan sesama teman. Menurut Sierpinska (1990), pemahaman ,merupakan tindakan yang melibatkan proses penafsiran dan pemaknaan dialektis antara elaborasi dan validasi. Bagi peneliti, proses ini dapat berlangsung maksimal jika proses belajar dikondisikan dalam bentuk kelompok.

1. Implementasi Desain Didaktis Konsep Persamaan Lingkaran $\boldsymbol{L} \equiv (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$

Implementasi pada pertemuan 1 berjalan dengan lancar dan terkondisikan dengan baik.Pembelajaran dimulai dengan tanya jawab tentang SOS kapal. Sebagian besar siswa sudah mengetahuinya sehingga konteks nyata tentang SOS dapat dipahami dengan baik oleh siswa. Selanjutnya situasi didaktis yaitu berupa situasi **aksi** dimulai dengan pemberian Lembar Kegiatan (LK) 1. Setiap siswa diberikan LK dan Lembar Jawaban agar setiap siswa dapat terfasilitasi dalam melakukan aksi. Walaupun permasalahan yang diberikan harus diselesaikan secara berkelompok, namun tidak menutup kemungkinan setiap siswa mencoba menjawab terlebih dahulu berdasarkan pemahaman yang dimilikinya, Vigotsky menyebutnya sebagai actual development (Suryadi, 2010, hlm 59).

Sebagian besar siswa sudah memahami tentang bagaimana menempatkan titik pada koordinat yang diberikan pada Lembar Kegiatan 1. Adapun beberapa siswa yang mengalami kekeliruan, dapat teratasi dengan bantuan dari teman kelompoknya. Selanjutnya, dalam menjawab instruksi yang ada pada LK 1 yaitu memilih kapal yang dapat dikirikman SOS oleh Titanic, semua siswa sudah bisa menjawab bahwa kapal terdekatlah yang harus dipilih. Untuk memilih kapal yang terdekat, secara visual atau dengan hanya melihat gambar siswa sudah dapat memilih kapal yang terdekat menurut mereka. Sebagian besar siswa memilih kapal A(-3,3) yang terdekat karena jaraknya dapat dihitung secara langsung. Namun mereka belum yakin dengan jawabannya saat melihat titik lain yang menurut mereka terdekat juga. Berikut ini salah satu percakapan antara siswa dan guru yang mengilustrasikan kejadian tersebut.

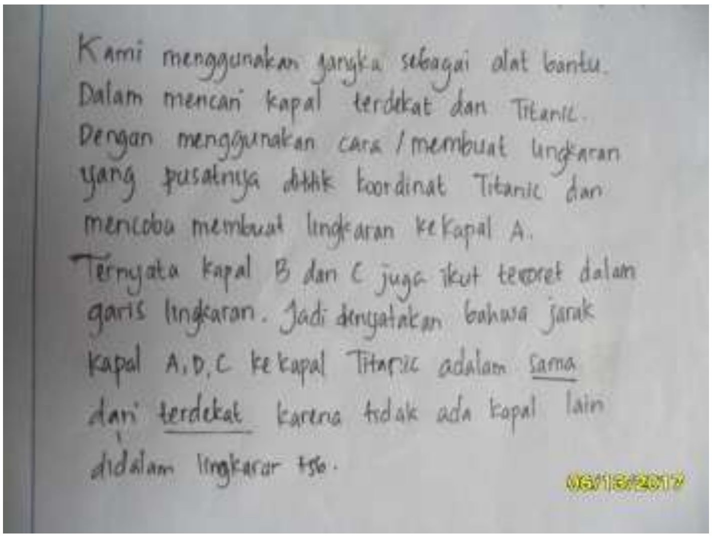
Siswa (M) : "Ibu terus gimana?" (siswa meminta bantuan guru)
Guru : "iya, coba gimana? Dari kapal ini (Kapal T) mana yang terdekat?"
Siswa (M) : "ini (menunjuk kapal A)"
Guru : "kenapa?"
Siswa (M) : "Gatau kenapa" (siswa sudah berhipotesis namun belum yakin)
Guru : "ya kenapa?"
Siswa (M) : "karena dekat"
Guru : "kalau sama yang ini (menunjuk kapal C)"
Penulis sengaja menunjuk kapal C agar siswa memikirkan kembali mana yang lebih dekat.
Siswa (M) : "aaa" (siswa berpikir)
Sementara itu, temannya sedang mencoba menggunakan jangka untuk mencari titik yang terdekat. Siswa M yang masih kebingungan mencoba memperhatikan temannya dan membantunya dalam menggunakan jangka.
M : "ibu, sama ibu" (siswa sudah mendapatkan jawaban setelah adanya interaksi)

Dari perckapan di atas, terlihat bahwa LK yang diimplementasikan sudah memberikan ruang bagi anak untuk dapat berkembang melalui interaksi antara sesama teman. Adapun dalam kelompok lain, siswa mencoba memilih mana titik terdekat terhadap kapal T dengan konsep pythagoras namun belum yakin akan jawabannya seperti terlihat dalam percakapan berikut ini.

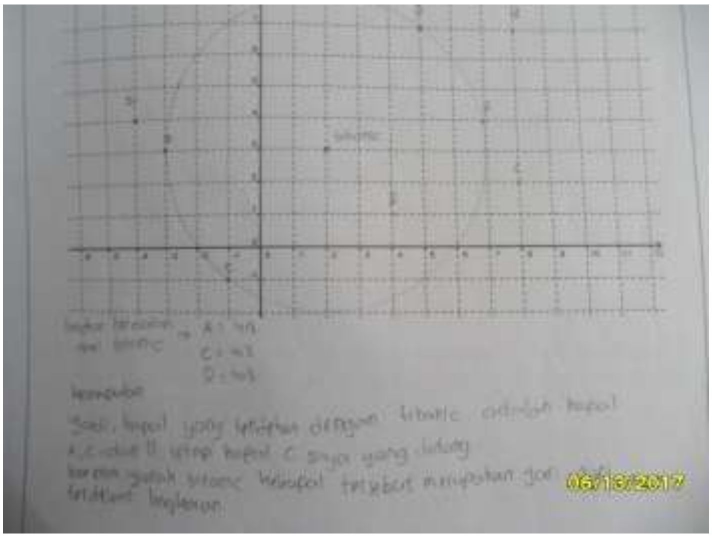
Siswa (L) : "ngitungnya gini sayang, 1, 2, 3, 1, 2, 3"
(siswa sedang mengajari temannya menghitung jarak horizontal dan vertikal untuk menghitung jarak dari 2 titik namun masih keliru)
Sementara itu, temannya yang lain mencoba menghitung juga
Siswa (B) : "1, 2, 3, 1, 2, 3, 4" (caranya sudah benar)
Siswa (B) : "kayaknya A deh ini" (memilih kapal A)
Siswa (B) sebenarnya sudah menemukan cara Pythagoras untuk menentukan jarak titik, namun masih ragu-ragu karena jawabannya belum diperhatikan oleh siswa (L)
Setelah itu guru datan dan menanyakan jarak terdekat sambil menunjuk ruas garis TD (hal tersebut dilakukan agar siswa dapat mengkonfirmasi sendiri cara yang mereka lakukan untuk menjawab permasalahan)

Setelah itu, siswa sejenak terdiam dan kembali menghitung kotak satuan.
Siswa (L) : "ohhh 5 ya bu?" (siswa ingat triple pythagoras)

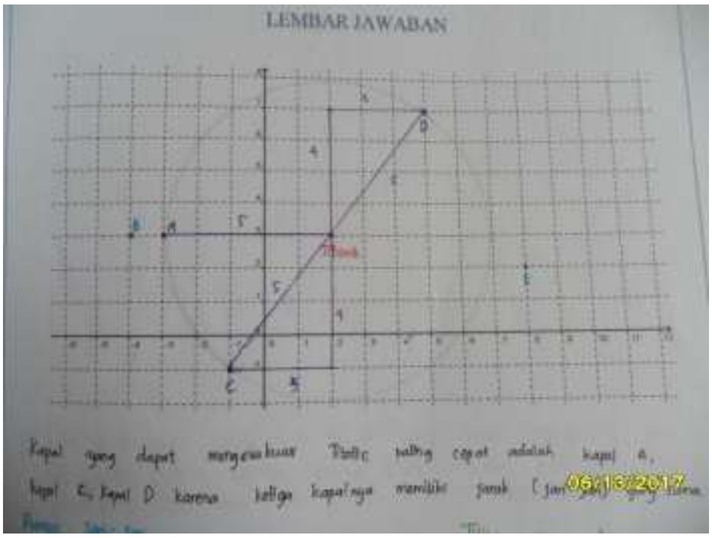
Beberapa contoh aktivitas yang dilakukan siswa tersebut menggambarkan bahwa permasalahan yang ada pada LK 1 memiliki jawaban yang tidak tunggal. Siswa dapat mengeksplorasi cara apa yang digunakan sesuai dengan pengetahuan yang dimilikinya. Secara keseluruhan, semua prediksi respon yang telah dibuat sebelumnya ternyata muncul pada seluruh kelompok. Berikut ini gambar-gambar respon siswa dari prediksi 2 sampai prediksi 5 (prediksi 1 tidak muncul karena sudah temuat dalam prediksi 2).



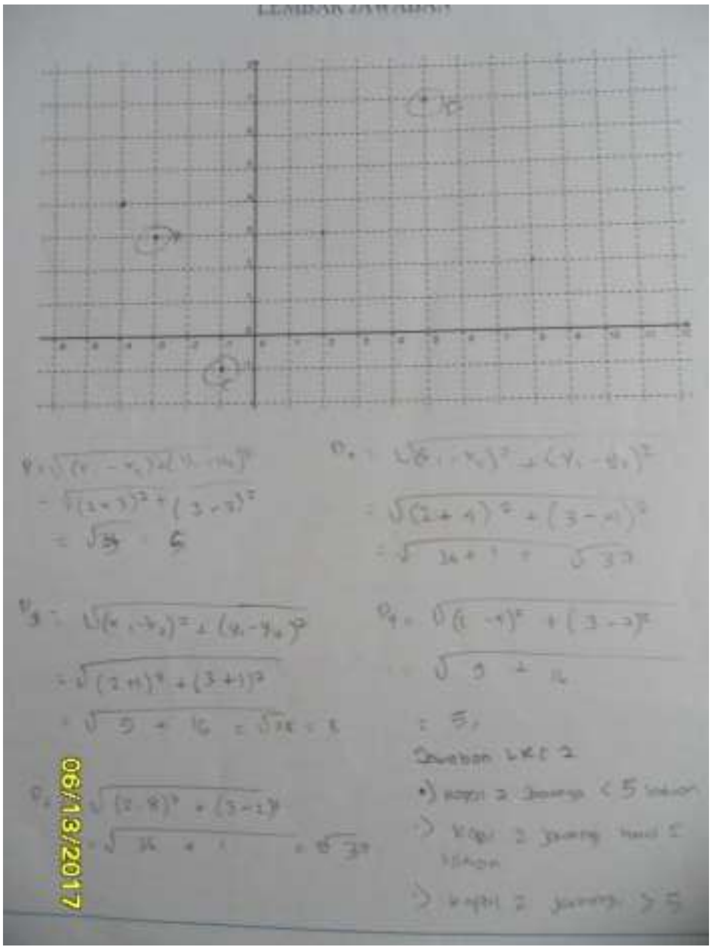
Gambar 4.20 Respon Siswa yang Sesuai dengan Prediksi 2 (Menggunakan Jangka)



Gambar 4.21 Respon Siswa yang Sesuai dengan Prediksi 3 (Menggunakan Penggaris)



Gambar 4.22 Respon Siswa yang Sesuai dengan Prediksi 4 (Menggunakan Konsep Pythagoras)



Gambar 4.23 Respon Siswa yang Sesuai dengan Prediksi 5 (Menggunakan Konsep Jarak 2 Titik)

Berdasarkan munculnya keempat respon ini, maka seluruhnya dipresentasikan dengan urutan dari respon yang sesuai dengan prediksi 2 sampai prediksi 5. Hal ini dilakukan agar siswa melakukan tindakan bersama di dalam kelas yang disebut dengan proses devolusi. Melalui devolusi, guru dan siswa membicarakan mengenai apa yang diperlukan untuk bertransformasi dari situasi ‘orang awam’ ke situasi ‘komunitas’ dimana masyarakat tertentu membahas dan menyepakati sesuatu (Suratno, 2016, hlm. 3). Cara yang dilakukan pada prediksi 2 dan 3 masih bersifat ‘awam’ karena membutuhkan alat bantu jangka dan penggaris. Walaupun menggunakan cara sederhana, namun dari kedua respon inilah muncul konsep lingkaran dan jari-jari serta titik pusat lingkaran. Selanjutnya disajikan cara lainnya yang lebih matematis menggunakan perhitungan dengan konsep Pythagoras dan jarak antara 2 titik. Sebenarnya kedua cara ini sama, namun konsep Pythagoras lebih bersifat Geometris karena masih memerlukan gambar sedangkan konsep jarak antara 2 titik sudah bersifat Aljabar karena langsung pada perhitungan tanpa gambar.

Kesimpulan dari situasi aksi ini adalah bagaimana cara menghitung jarak antara 2 titik yaitu titik pada lingkaran dan titik pusat lingkaran. Siswa dalam menjawab LK 1 sudah dapat menyimpulkan bahwa titik A, C, dan D adalah titik pada lingkaran yang berpusat di titik C dan berjari-jari 5 satuan. Selanjutnya, untuk menggeneralisasikan cara yang dapat dilakukan untuk menghitung jarak dari titik pada lingkaran terhadap titik pusat lingkaran maka situasi berlanjut situasi formulasi yang ada pada Lembar Kegiatan 2.

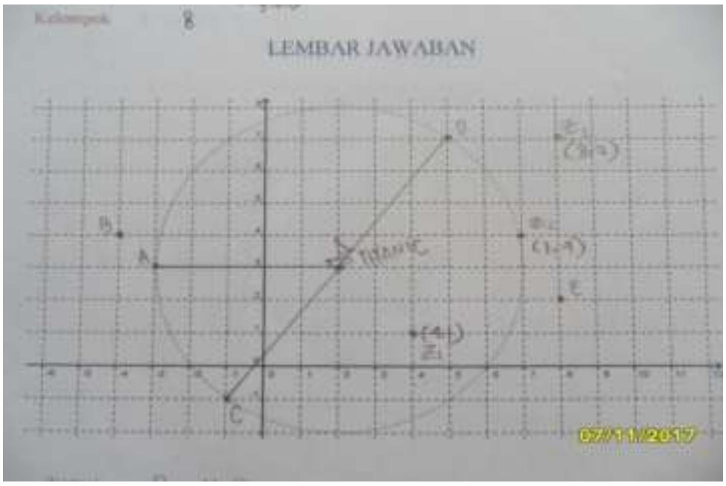
Karena siswa sudah memiliki pengalaman dalam mengenal kembali lingkaran yang berpusat di titik tertentu dan jari-jari tertentu, maka permasalahan dalam Lembar Kegiatan 2 dapat dengan cepat dipahami. Hal tersebut mencerminkan bahwa situasi aksi yang sebelumnya dilakukan berdampak pada sitausi formulasi yang akan dilakukan siswa. Sehingga situasi yang ada sudah memperhatikan alur belajar secara fungsional (kesinambungan berpikir). Untuk menjawab permasalahan pada Lembar Kegiatan 2 ini, siswa kembali berdiskusi dengan teman kelompoknya namun lembar jawaban tetap dibagikan secara individu agar pemikiran tiap siswa dapat terfasilitasi. Berikut ini beberapa percakapan antara siswa saat memberikan respon terhadap permasalahan 2.

Kelompok ini terdiri dari 3 orang yaitu siswa L, B, dan E. Ketiganya sedang mencari cara bagaimana menentukan posisi kapal Z agar sesuai dengan kondisi yang diingingkan.

Siswa (L)	:"di sini bisa" (siswa (L) sedang menunjuk 1 titik tertentu di dalam lingkaran)
Siswa (B)	:"tapi di sini juga bisa" (Siswa (B) menunjukan titik lain di dalam lingkaran)
Siswa (L)	:"iya bisa"
Siswa (B)	:"berarti kalau yang satu-satunya pilihan berarti yang di dalam lingkaran, berarti yang di sini, kalau misalnya yang ini (Z menjadi pilihan dengan A, C, dan D) berarti yang di garis lingkaran"
Siswa (E)	:"yang terakhir (Z tidak menjadi pilihan) berarti di luar?"
Siswa (B)	:"he'eh di luar lingkaran"
Siswa (L)	:"ohh iya-iya"

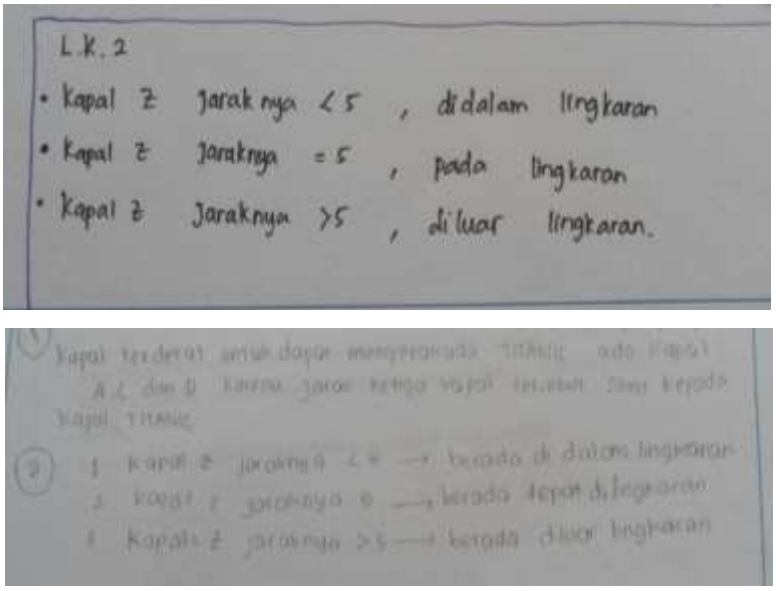
Dari percakapan di atas, terlihat bahwa ketiganya saling berkolaborasi untuk menyelesaikan persoalan yang ada. Siswa (E) yang sebelumnya cenderung pasif, perlahan mulai ikut berpartisipasi dan berperan juga dalam menyelesaikan permasalahannya.

Adapun secara keseluruhan terdapat 3 macam respon yang seluruhnya sudah diprediksikan sebelumnya dan 1 macam respon di luar prediksi sebelumnya. 1 kelompok menjawab dengan cara menempatkan titik Z di dalam lingkaran, pada lingkaran dan di luar lingkaran dengan koordinat tertentu. Siswa menempatkan titik Z pada koordinat (4,1) untuk posisi Z di dalam lingkaran, koordinat (7,4) untuk posisi Z pada lingkaran, dan koordinat (8,7) untuk posisi di luar lingkaran seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.24 Jawaban Siswa (Respon 1)

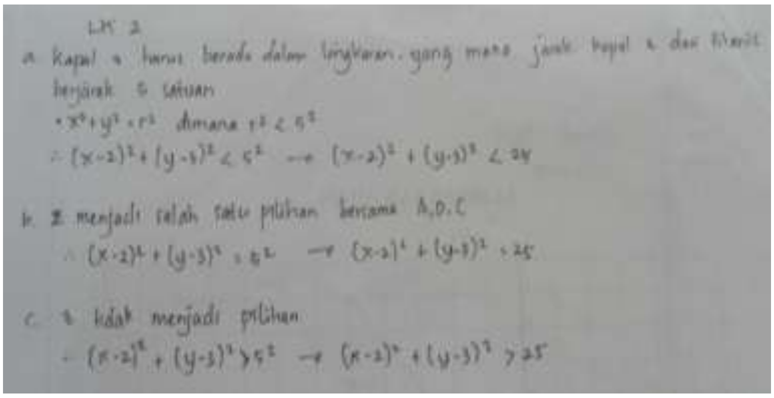
Selanjutnya, 6 kelompok menjawab dengan cara memberikan keterangan jarak atau posisi titik terhadap lingkaran. siswa menjawab jika jaraknya kurang dari 5 satuan atau berada di dalam lingkaran maka hanya kapal Z yang dapat dipilih, jika jaraknya sama dengan 5 satuan atau ada pada lingkaran maka A, C, D, dan Z dapat dipilih, dan jika jaraknya lebih dari 5 satuan atau berada di luar lingkaran maka kapal Z tidak dipilih seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.25 Jawaban Siswa (Respon 2)

Respon lain yang muncul dari siswa saat menjawab LK 2 adalah dengan cara menggunakan konsep Pythagoras, yang hanya muncul pada 2 kelompok saja. Siswa menjawab hanya kapal Z yang dapat dipilih jika berlaku$(x-2)^2+$

$(y-3)^5 < 5^2$, kapal A, B, D dan Z dapat dipilih jika berlaku$(x-2)^2 + (y-3)^5 = 5^2$, dan kapal Z tidak dapat dipilih jika berlaku$(x-2)^2 + (y-3)^5 > 5^2$ seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.26 Jawaban Siswa (Respon 3)

Ketiga macam respon ini menunjukan adanya keragaman siswa dalam menggeneralisasikan konteks yang tersaji pada LK 2 sesuai dengan pemahaman siswa. Respon siswa yang menentukan koordinat tertentu untuk berbagai posisi titik terhadap lingkaran menunjukan masih terdapat batasan pada kemampuan menggeneralisasikan. Jawaban yang diberikan siswa tidak salah, dan dapat diantisipasi dengan memberikan koordinat lain yang posisinya sama terhadap lingkaran sehingga siswa dapat berpikir bagaimana memberikan kesimpulan secara umum untuk menyatakan posisi kedua titik tersebut. Untuk respon yang paling banyak muncul yaitu dengan menggunakan keterangan jarak atau posisi terhadap lingkaran, respon tersebut sudah menunjukan adanya generalisasi pada pemahaman siswa tentang posisi titik terhadap lingkaran namun keterangannya masih kekurangan informasi. Misalnya dalam menjelaskan bagaimana jarak titik Z ketika berada pada 3 posisi yang berbeda, penjelasan tentang jarak tidak disertai dengan keterangan jarak dari Z terhadap titik apa meskipun sebenarnya siswa sudah paham bahwa yang dimaksud jarak adalah jarak dari titik pusat lingkaran terhadap titik Z. Selain itu, siswa yang menjawab dengan keterangan posisi titik terhadap lingkaran, penjelasan tentang lingkaran tidak disertai dengan keterangan titik pusat dan jari-jari lingkaran meskipun siswa juga sebenarnya sudah paham bahwa lingkaran yang dimaksud adalah lingkaran yang berpusat di titik (2,3) berjari-jari 5 satuan. Sehingga generalisasi yang paling lengkap informasinya adalah ketika menjawab dengan menggunakan konsep Pythagoras. Dengan menggunakan keterangan koordinat titik Z yaitu (x,y), siswa menggunakan konsep Pythagoras sehingga dapat ditulis menjadi $(x-2)^2+(y-3)^5=5^2$ untuk posisi titik Z yang berada pada lingkaran.

Antisipasi yang dilakukan tidak diberikan secara langsung pada tiap kelompok melainkan diberikan saat kegiatan presentasi. Seperti presentasi tentang jawaban LK 1, dalam mempresentasikan jawaban LK 2 ini juga dilakukan secara bertahap dari respon tipe 1, 2 dan berakhir pada tipe 3. Sehingga siswa dapat melihat proses generalisasinya secara lengkap dengan kegiatan diskusi seluruh kelompok. Hal menarik ditemukan pada saat kelompok dengan respon ketiga muncul. Siswa menjelaskan jawaban pada Gambar 4. dengan menggunakan konsep Translasi.

Siswa (H)	: "Karena kapal Z satu-satunya pilihan, jadi Z harus berada dalam lingkaran" "Jadi, jarak dari Titanic harus kurang dari 5, oke" "Tapi kita gak tau dimananya, karena ditulisnya x dan y, (4,1) gak tau darimana" "Sini (siswa mengarsir daerah interior lingkaran), misalkan ini (daerah interior lingkaran) berkabut, jadi kita gak tau dimana" "Persamaan lingkaran $x^2+y^2=r^2$, ada yang tau ini darimana?"
Siswa (lain)	: "gak tau, dari lingkaran"
Siswa (H)	: "Ini tuh sama aja kayak Pythagoras" "Liatin, (siswa menunjuk pada jawaban LK 1 yang dipresentasikan) $x^2+y^2=r^2$ (x adalah 4, y adalah 3 dan r adalah 5) Cuma diganti doing bahasanya"
Siswa (lain)	: "oh"
Siswa (H)	: "Jari=jarinya berapa?"
Siswa (lain)	: "5"
Siswa (H)	: "R nya diganti 5 (menjadi $x^2+y^2=5^2$)" "x sama y nya kita gak tau berapa"
Siswa (lain)	: "iya"
Siswa (H)	: "Ini tuh ($x^2+y^2=5^2$) harus di titik 0 koma 0" "Tapi karena ini Titanicnya di 2 koma 3, maka ininya tuh (x nya) harus dikurangi 2 dan y nya dikurangi 3" "Jadi di titik ini (2,3) kenapa dikurangi 2 karena ditarik kesini, habis ditarik dikurangi 2, ditarik ke bawah , jadi di tengah sini"
Guru	: "kenapa dikurangi 2 dan 3?"
Siswa (H)	: "Karena ditarik kesini (titik (2,3) ditranslasi ke (0,2)) sekalian diputerin gitu, ini berapa? 7 (menunjuk ke

titik (7,4) yaitu jawaban dari kelompok dengan respon 1) disini 8, di sini ahhh"

Siswa (lain) : "hahaha"

Guru : "tapi kenapa bisa sama dengan ya?"

Siswa (H) : "Ini tuh bukan sama dengan (diganti dengan tanda kurang dari)"

Guru : "tadikan kelompoknya bilang, harus lebih kecil dari 5"

(Siswa (H) melanjutkan presentasinya)

Siswa (H) : "Yang kedua, Z jadi salah satu pilihan, persamaan b dan c"

Guru : "yang posisi kedua, jaraknya harus sama dengan 5, nah gimana nulisnya? (secara matematis)

Gambar 4.27 Siswa (H) Mempresentasikan Jawabannya

Berdasarkan hasil presentasi siswa (H) terlihat bahwa sebenarnya siswa (H) sudah memahami persamaan lingkaran dengan pemahamannya sendiri. Dengan memperhatikan bagaimana kesimpulan pada situasi aksi, siswa (H) memahami bahwa konsep persamaan lingkaran berasal dari konsep Pythagoras. Sehingga dapat diaplikasikan pada lingkaran dengan titik pusat (0,0) menjadi $x^2 + y^2 = r^2$. Dengan pemahamannya sendiri, siswa (H) menganggap bahwa jika lingkaran dengan pusat (0,0) akan diubah menjadi $(x-2)^2 + (y-3)^5 = 5^2$, maka dilakuak dengan cara menggeser titik pusatnya. Pemahaman yang siswa bangun sendiri berdasarkan perspektifnya ini adalah contoh dari adanya situasi adidaktis.

Selanjutnya situasi didaktis diakhiri dengan kegiatan validasi. Validasi yang dilakukan guru adalah dengan melakukan tanya jawab mengenai konsep yang sedang dipelajari yaitu persamaan lingkaran dan kedudukan titik pada lingkaran. Berdasarkan respon yang muncul dari siswa, dapat disimpulkan bahwa tujuan dari proses pembelajaran pada pertemuan 1 ini sudah tercapai yang tergambar dari interaksi antara guru dan siswa berikut.

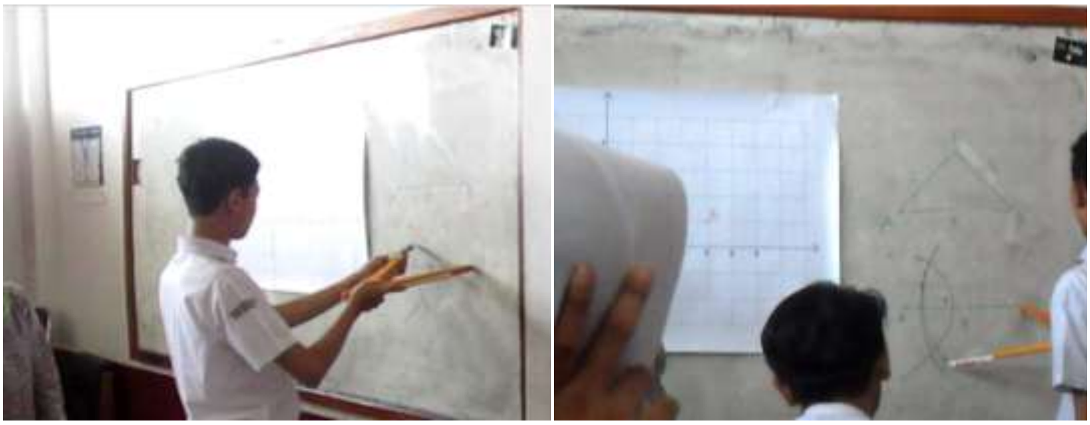
Guru : "Nah secara umum, kalau titik yang berada pada lingkaran disebut?"
(Semua siswa terdiam)
(Siswa sudah mengetahui konsepnya, namun belum mengenal istilah untuk konsep ini)
Siswa (HO) : "jari-jari"
Guru : "persamaan...."
Siswa : "lingkaran"
Siswa (A) : "ohh aku mengerti"
Guru : "yang berpusat di? pusatnya berapa ini lingkarannya?"
Siswa : "titik (2,3)"
Guru : "berjari-jari?"
Siswa : "5"
Guru : "gimana bentuk persamaannya?"
Siswa : "x min 2 kuadrat ditambah y min 3 kuadrat"
Guru : "sama dengan?"
Siswa :"5 kuadrat"
Guru : "kalau 3 kondisi ini? (3 kondisi kapal Z), ada yang tau? Tentang apa?
Siswa : "persamaan lingkaran?"
(Siswa sudah mengetahui konsepnya, namun belum mengenal istilah untuk konsep ini)
Guru : "tentang kedudukan"
Siswa : "titik"
Guru : "ini (menunjuk pada persamaan $(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$) persamaan untuk lingkaran yang berpusat pada 2 koma 3 dan berjari-jari 5. Kalau kita bentuk ke persamaan umum yang pusatnya a koma b dan jari-jarinya r, berarti apa persamaannya?"
Siswa : "$(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$"

Ketika ditanyakan tentang istilah mengenai persamaan lingkaran dan kedudukan titik terhadap lingkaran, tidak ada siswa yang mengetahuinya. Hal ini sesuai dengan yang sudah diprediksikan karena sejak awal pembelajaran, peneliti tidak menyebutkan istilahnya untuk menghindari siswa melihat materinya pada buku ajar mereka saat melakukan situasi didaktis.

2. Implementasi Desain Konsep Persamaan Lingkaran $\boldsymbol{L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}$

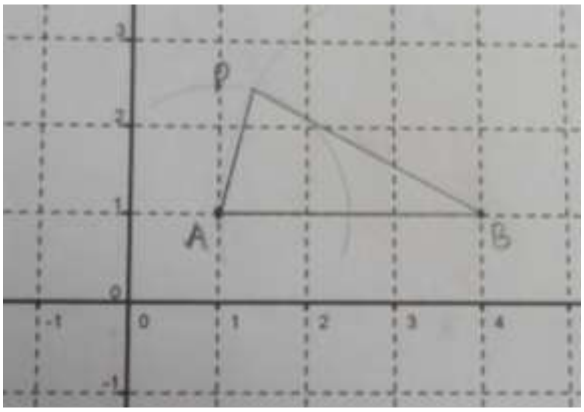
Implementasi pada pertemuan 2 dimulai 15 menit lebih lama dari seharusnya. Hal tersebut dikarenakan adanya pelaksanaan upacara untuk memperingati Hari Pendidikan Nasional di sekolah. Sehingga beberapa situasi yang ada pada skenario untuk pertemuan 2 dipersingkat waktunya namun tetap mengutamakan tujuan yang ingin dicapai.

Pembelajaran dimulai dengan tanya jawab tentang bagaimana membuat segitiga APB yang berukuran tepat AB = 3, AP = 2, dan PB = 4. Sesuai dengan prediksi yang telah dibuat sebelumnya, siswa dapat menjawabnya yaitu dengan bantuan jangka seperti terlihat pada Gambar 4. . Respon ini muncul karena adanya jangka yang diwajibkan siswa bawa saat pertemuan 2 ini. Sehingga kegiatan dilanjutkan dengan melakukan situasi **aksi** yang termuat di LK 3.

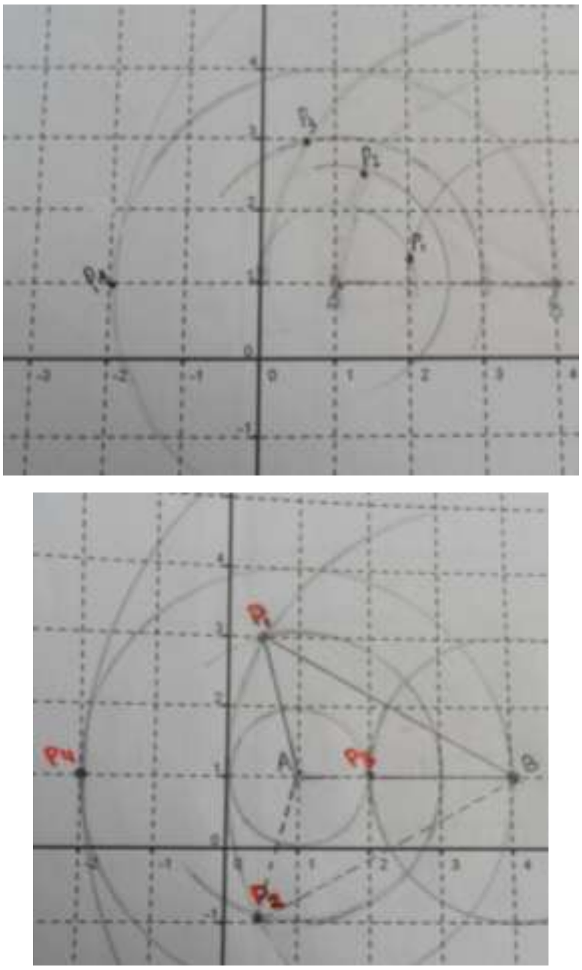


Gambar 4.28 Siswa Menggambar Segitiga Menggunakan Jangka

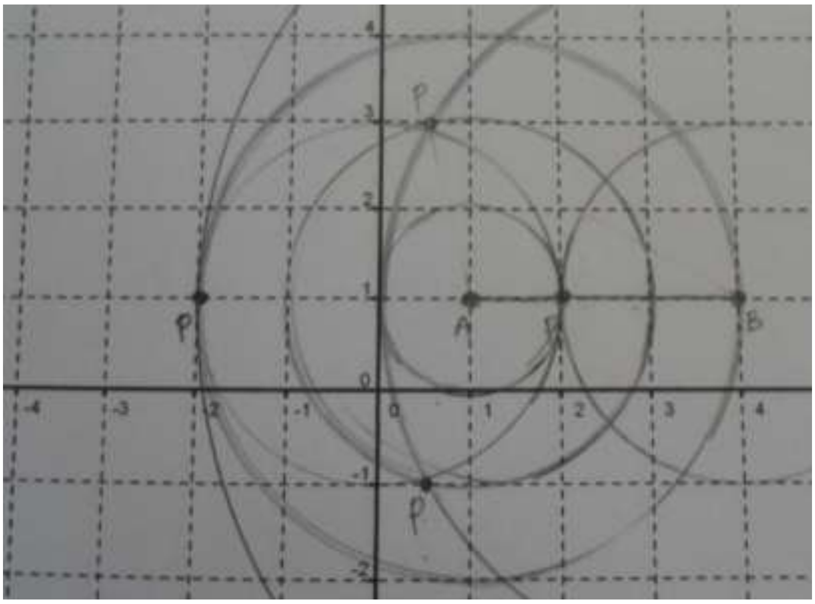
Situasi aksi ini memuat kegiatan menggambar titik P yang berada pada posisi yang telah ditentukan. Karena pada awal pembelajaran dilakukan tanya jawab tentang membuat segitiga, maka siswa memiliki skema tersebut dan diaplikasikan pada penyelesaian LK 3. Respon yang muncul dari siswa sangat beragam. Beberapa kelompok hanya dapat menentuka posisi titik P yang berjarak 2 terhadap A dan berjarak 4 terhadap B. Hal ini dikarenakan contoh yang dibuat pada kegiatan awal adalah segitiga APB dengan AB = 3, AP = 2, dan PB = 4. Selain itu, beberapa kelompok secara mandiri sudah dapat menentukan titik P dengan posisi-posisi tertentu seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.29 Siswa Menemukan 1 Titik P



Gambar 4.30 Siswa Menemukan 4 Titik P



Gambar 4.31 Siswa Menemukan Bentuk Lingkaran

Pada umumnya, setiap kelompok hanya menemukan 4 titik P dengan posisi yang berbeda-beda. 4 titik P dirasakan cukup bagi peneliti untuk memberikan kesimpulan tentang bentuk apa yang dapat dihasilkan jika seluruh himpunan titik P ditemukan. Pada saat ditanyakan pada siswa, hanya ada 1 siswa yang dapat melihat bahwa himpunan titik P membentuk suatu lingkaran dengan titik pusat (0,1) dan berjari-jari 2. Sehingga untuk siswa yang dipresentasikan jawabannya adalah yang menemukan 4 titik P dan jawaban yang menemukan bentuk lingkaran.

Guru : "Coba diterangin gimana caranya supaya jadi lingkaran"

Siswa (H) menggambar lingkaran dengan titik pusat di (0,1)

Guru : "kenapa bisa pusatnya disitu (titik (0,1))?"

Siswa (H) : "Gak tau, ini bayangan saya aja"

Siswa (J) : "bu, aku tau kenapa, soalnya disitu udah terdapat 2 titik yang ada di garis lurus (titik $P_1 = (-2,1)$ dan $P_2 = (4,1)$), kan kalo lingkaran ada jari-jarinya, nah jari-jarinya di tengah itu"

Guru : "Nah boleh"

Siswa (J) : "yeee"

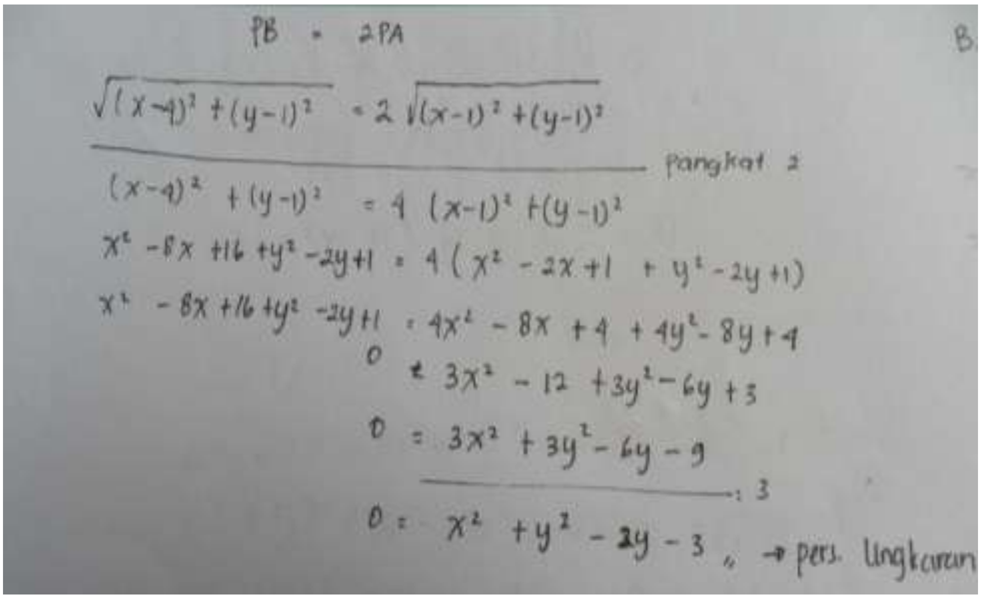
Walaupun ada siswa yang dapat menyelesaikan permasalahan pada LK 3, beberapa siswa masih kesulitan untuk memahami tentang himpunan titik P dan kaitannya dengan lingkaran padahal sudah dapat menentukan beberapa posisi titik P. Untuk mengantisipasinya, maka dilanjutkan dengan kegiatan pada LK 4 yang diawali dengan pertanyaan "ada tidak cara lain yang dapat membuktikan bahwa benar ini adalah lingkaran?".

Untuk sampai pada kesimpulan kegiatan aksi, siswa membutuhkan waktu yang lama sehingga tidak sesuia dengan waktu yang telah direncanakan. Hal tersebut dikarenakan adanya beberapa faktor seperti kesulitan dalam memahami soal, ketertarikan siswa dalam menggambar menggunakan jangka, dan saat presentasi jangka papan tulis yang disediakan sulit untuk digunakan sehingga dibantu oleh penulis. Berdasarkan kondisi ini, maka diputuskan peneliti mengubah situasi selanjutnya yang seharusnya siswa menyelesaikan secara berkelompok, menjadi dikerjakan bersama-sama dengan panduan guru. Walaupun terjadi perubahan skenario, namun proses pembelajaran yang dilakukan tetap berpusat pada siswa dan sampai pada tujuannya.

Ketika ditanyakan bagaimana cara lain untuk mencari bantuk lingkaran, siswa mengalami kesulitan. Maka diberikan antisipasi yaitu menuliskan kembali koordinat titik P(x,y), A(1,1) dan B(4,1) serta keterangan bahwa PB = 2 PA. Diharapkan dengan antisipasi ini, siswa dapat memahami bahwa cara lain yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan konsep jarak dari 2 titik.

Guru	:"gimana kalau menyelesaikan ini secara aljabar? Hubungannya PB = 2 PA"
Guru	: "jarak P ke B, gimana ya cara menuliskannya?"
Siswa (Ho)	: "Oh, $x_2 - x_1$
Guru	: "akar…."

Selanjutnya siswa sudah dapat memahami PB = 2 PA dapat menuliskannya secara aljabar dan didapatkan persamaan $x^2 + y^2 + x - 2y - 3 = 0$.



PB = 2PA

B

$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ pangkat 2

$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 4(x-1)^2 + (y-1)^2$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1)$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 8y + 4$

$0 = 3x^2 - 12 + 3y^2 - 6y + 3$

$0 = 3x^2 + 3y^2 - 6y - 9$: 3

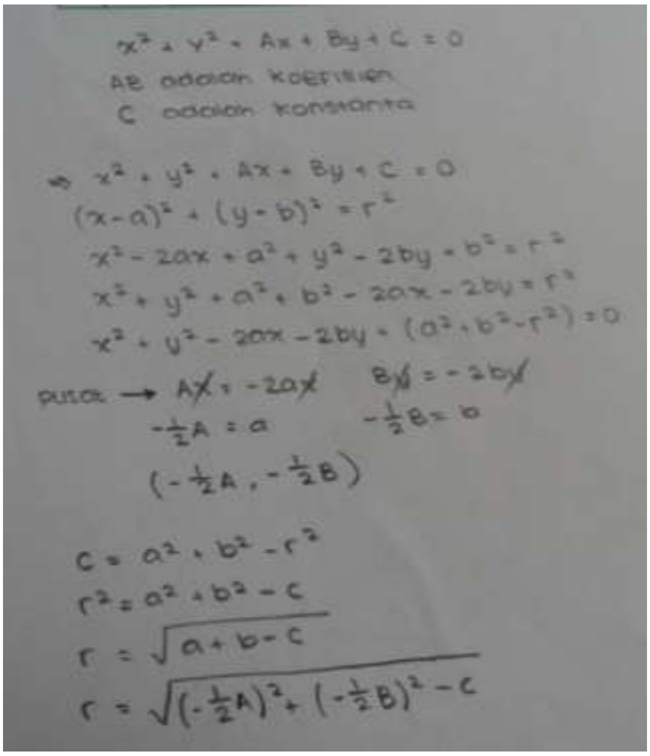
$0 = x^2 + y^2 - 2y - 3$ → pers. Lingkaran

Gambar 4.32 Jawaban Siswa

Persamaan $x^2 + y^2 + x - 2y - 3 = 0$ dapat dibuktikan merupakan lingkaran dengan cara menentukan lingkaran terlebih dahulu persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0,1) dan berjari-jari *2* yaitu $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 2^2$. Terlihat bahwa setelah diuraikan, akan menjadi persamaan yang sama. Proses ini lebih mudah bagi siswa karena pada siswa sudah dapat menentukan persamaan lingkaran dari pertemuan 1 dibandingkan dengan menyelesaikannya dengan cara melengkapkan persamaan kuadrat.

Selanjutnya dilakukan situasi formulasi yaitu mencari titik pusat dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Pada tahapan ini, awalnya siswa cukup sulit untuk memahami bagaimana cara mencarinya. Proses yang sudah dilakukan sebelumnya, belum sepenuhnya dapat diaplikasikan pada permasalahan ini. Sehingga dilakukan antisipasi berupa penjelasan ulang mengenai bagaimana persamaan $x^2 + y^2 + x - 2y - 3 = 0$ dapat dibuktikan menjadi suatu persamaan lingkaran yang berpusat di titik (0,1) dan berjari-jari *2*.

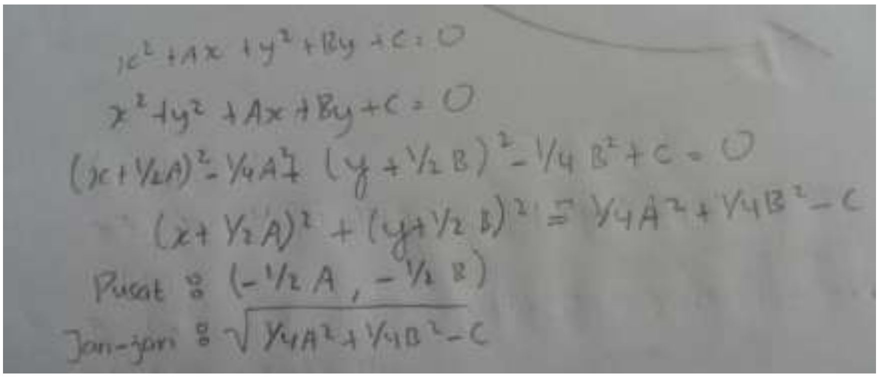
Dengan diskusi yang dilakukan oleh siswa secara berkelompok, terdapat 2 respon yang muncul dan sesuai dengan yang diprediksikan. Respon pertama, siswa dapat menentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan menguraikan terlebih dahulu persamaan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.33 Jawaban Siswa (Respon 1)

Gambar 4.34 Siswa Menjelaskan Jawabannya

Respon ini muncul dikarenakan siswa sudah memahami bagaimana proses yang sebelumnya telah dilakukan. Adapun respon lain yang muncul adalah dengan cara mengubah bentuk $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ menjadi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ seperti pada gambar berikut.



Gambar 4.35 Jawaban Siswa (Respon 2)

Gambar 4.36 Siswa Menjelaskan Jawabannya

Siswa (L) :"tadi kan diketahuinya $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Terus digabungin x sama x, y sama y"

Siswa (lain) : "iya"

Siswa (L) : "kan pake cara yang Bu Dara (guru matematika) tea geuning"

Selanjutnya siswa menjelaskan bagaimana prosedurnya dengan cara melengkapkan kuadrat. Namun dalam menjelaskan, ada siswa yang masih belum memahami mengapa muncul $-\frac{1}{4}A^2$ dan $-\frac{1}{4}B^2$. Sehingga siswa (H) menjelaskannya dengan alur mundur dari $(y + \frac{1}{2}B)^2$ untuk membantu temannya yang belum memahaminya.

Siswa (L) : "nah kita butuh rumus ini (menunjuk $y^2 + By$) kan?"

Siswa (lain) : "iya"

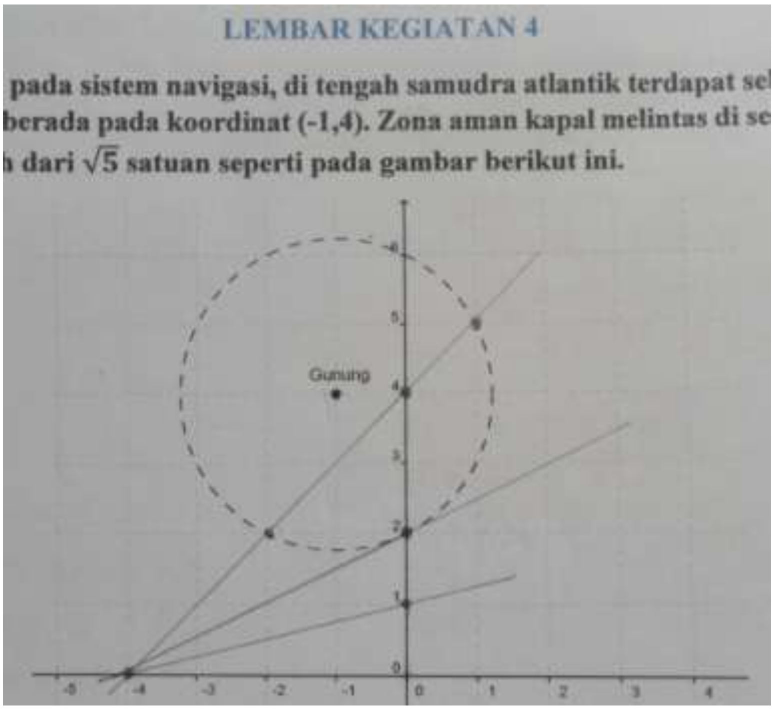
Siswa : "nah ari disininya (menunjuk $y^2 + By + \frac{1}{4}B^2$) ada $\frac{1}{4}B^2$, makannya harus dikurangi"

Gambar 4.37 Siswa Menjelaskan Kembali Cara Mendapat Persamaan

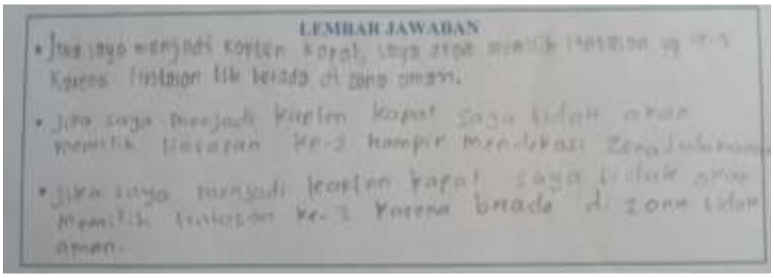
Walaupun situasi sebelumnya tidak menjelaskan tentang cara melengkapkan kuadrat, namun tetap ada siswa yang dapat menyelesaikannya dengan cara melengkapkan kuadrat. Hal ini menggambarkan bahwa situasi yang dirancang sudah menyediakan ruang bagi siswa untuk berpikir secara mandiri berdasarkan pengetahuan yang dimilikinya. Dikarenakan waktu yang sangat terbatas, maka pertemuan 2 hanya diakhiri dengan kesimpulan bagaimana cara menentukan titik pusat dan jari-jari tanpa adanya kegiatan mengerjakan latihan soal.

3. Implementasi Desain Didaktis Konsep Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Pertemuan ketiga memuat situasi didaktis yang bertujuan agar siswa dapat merepresentasikan kedudukan garis terhadap lingkaran secara geometri menjadi bentuk aljabar. Untuk sampai pada tujuan tersebut, pembelajaran diawali dengan kegiatan aksi yang termuat dalam LK 5. Adapun respon yang muncul dari siswa, sesuai dengan yang diprediksikan. Siswa menggambar berbagai lintasan kapal yang sesuai dengan permasalahan yang diberikan dan menentukan lintasan mana yang siswa pilih.



Gambar 4.38 Jawaban Siswa untuk LK 4

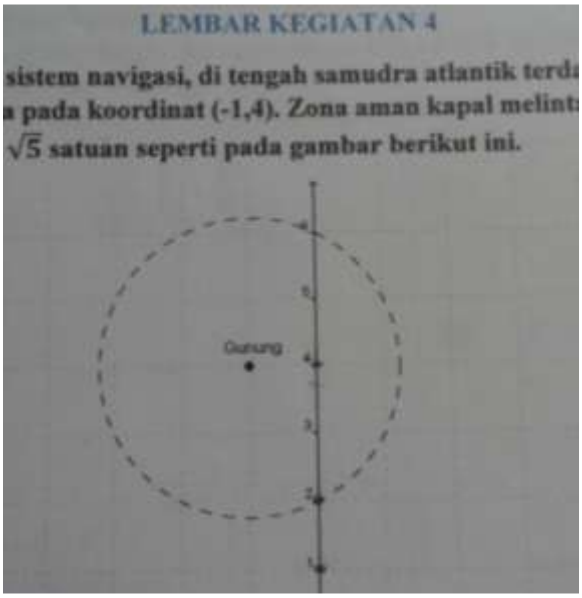


LEMBAR JAWABAN

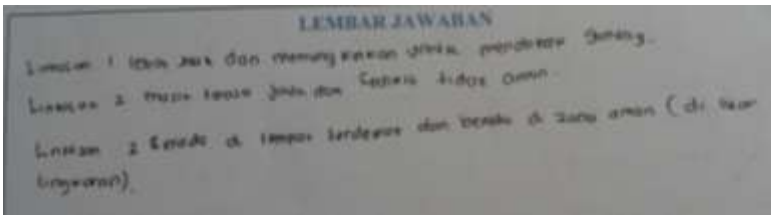
- Jika saya menjadi kapten kapal, saya akan memilih lintasan yg ke-1 karena lintasan tsb berada di zona aman.
- Jika saya menjadi kapten kapal saya tidak akan memilih lintasan ke-2 hampir mendekati Zona
- Jika saya menjadi kapten kapal saya tidak akan memilih lintasan ke-3 karena berada di zona tidak aman.

Gambar 4.39 Jawaban Siswa untuk LK 4

Selain menggambar lintasan, ada pula siswa yang langsung memilih lintasan dengan menggambarkan keterangan posisi titik yang dilalui kapal



Gambar 4.40 Jawaban Siswa untuk LK 4



Gambar 4.41 Jawaban siswa untuk LK 4

Respon lain yang muncul adalah siswa membuktikan posisi dari titik yang akan dilewati kapal terlebih dahulu menggunakan konsep kedudukan titik terhadap lingkaran yang sebelumnya telah dipelajari pada pertemuan 1.

Gambar 4.42 Jawaban Siswa untuk LK 4

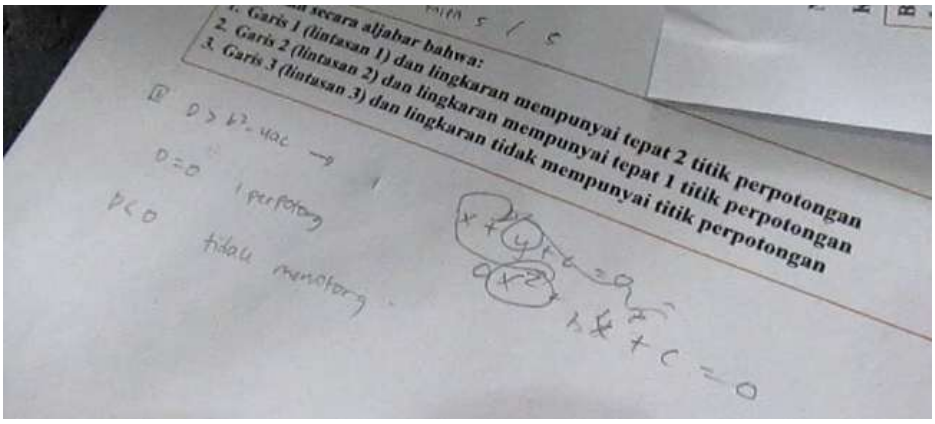
Berdasarkan hasil respon tersebut, maka salah satu siswa diminta untuk menggambarkannya pada karton yang telah disediakan. Selanjutnya dilakukan tanya jawab tentang kedudukan dari ketiga gambar lintasan tersebut. Karena siswa sudah mengenal kedudukan garis terhadap lingkaran secara geometris saat SMP, maka dengan mudah siswa dapat menjelaskan kedudukan dari ketiga lintasan tersebut. Namun ada sedikit kekurangan dari pemahaman siswa tentang garis singgung lingkaran yaitu garis singgung tidak memotong lingkaran melainkan hanya menempel. Sehingga dilakukan antisipasi berupa titik perpotongan dari garis dan lingkaran.

Guru : "kalau lintasan 2 posisinya?"
Siswa :"menyinggung"
Guru : "kalau menyinggung itu memotong gak?"
Siswa : "gak", "hanya menyinggung", "hanya bertempelan"
Guru : "hanya bertempelan? Berarti memotong di berapa titik?"
Siswa :" satu"
Guru : "berarti titik perpotongannya ada berapa?"
Siswa : "satu"

Penjelasan tentang titik perpotongan ini sangat penting dilakukan karena berhubungan dengan situasi selanjutnya. Setelah mengingat kembali kedudukan garis terhadap lingkaran secara geometris, maka dilanjutkan dengan kegiatan membuktikan bahwa lintasan 1 memiliki 2 titik perpotongan, lintasan 2 memiliki 1 titik perpotongan dan lintasan 3 tidak memiliki titik perpotongan.

Saat situasi aksi ini, pada awalnya seluruh siswa kebingungan mencari cara untuk menentukan titik perpotongan dari garis dan lingkaran. Ada 1 kelompok (Kelompok 9) yang di dalamnya terdapat siswa yang menjelaskan tentang diskriminan, namun siswa tersebut merasa kebingungan bagaimana cara mendapatkan diskriminananya. Kemungkinan munculnya diskriminan pada pemikiran tersebut adalah karena siswa telah mempelajari kedudukan antara garis dan kurva dari fungsi kuadrat.

Siswa (Ho) :"D (diskriminan) lebih besar sama dengan 0"
"D sama dengan b kuadrat -4ac"
Siswa (M) : "ih kok gitu"
Siswa (Ho) : "ya kan sama, kalo D dengan 0, berarti 1 titik perpotongan, kalo D kurang dari 0 berarti tidak memotong"
Siswa (M) : "ohhh, tapi itu dapet b sama c nya darimana?"
Siswa (Ho) : "inikan persamaannya ada $x + y$
Siswa (M) : "garisnya darimana? Kan kita gak punya garisnya?"
Siswa (Ho) : "eh tunggu, kan ada $x^2 + x +$ eh apa sih, $ax^2 + bx + c = 0$" (namun tidak tahu bagaimana menemukan nilai a,b, dan c)



Gambar 4.43 Jawaban Siswa untuk LK 5

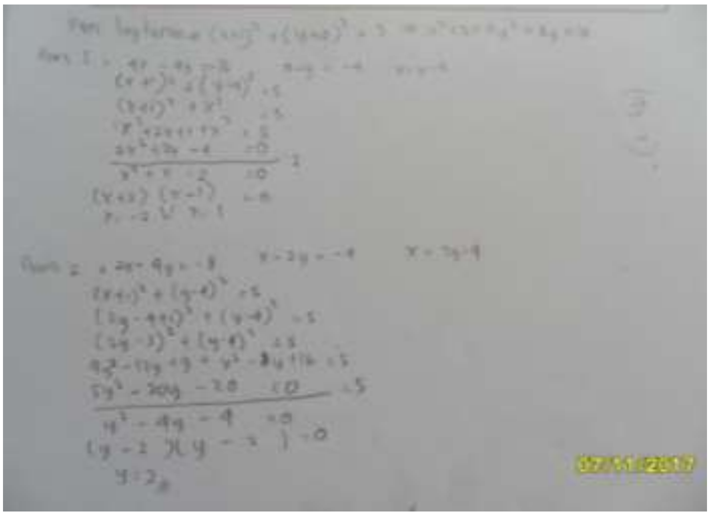
Hal ini sudah diprediksikan sehingga diberikan antisipasi berupa pertanyaan kembali pada siswa tentang cara mencari titik potong antara 2 garis. Antisipasi ini membantu siswa untuk memahami bagaimana cara mencari titik potong antara garis dan lingkaran. Setelah dilakukan diskusi kembali secara berkelompok, beberapa siswa kembali mengalami hambatan yang berkaitan dengan (konsep sebelumnya) seperti menentukan persamaan garis yang melalui 2 titik dan menentukan akar-akar penyelesaiaan kuadrat.

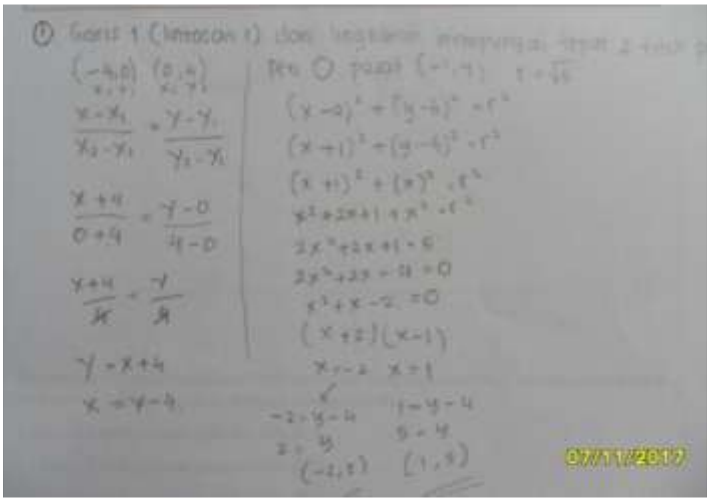
Gambar 4.44 *Scaffolding* yang Dilakukan Guru

Gambar 4.45 Aktivitas Saat Guru Berinteraksi dengan Siswa

Guru	:"sekarang coba cek satu-satu, bagaimana caranya garis pertama dengan lingkaran ini punya dua titik perpotongan?
Siswa (Hi)	: "gak tau bu"
Guru	: "gini, sekarang kalau garis, garis saling berpotongan, gimana caranya kita tahu dia saling berpotongan?"
Siswa (Hi)	: "substitusi"
Guru	: "apa yang disubstitusi berarti?"
Siswa (Hi)	: "lingkaran sama garis"
Guru	: "dari mana ke mana?"
Siswa (A)	: "dari garis ke lingkaran"
Siswa (Hi)	: "oh garisnya disubstitusi ke lingkaran ya?"
Guru	: "iya"

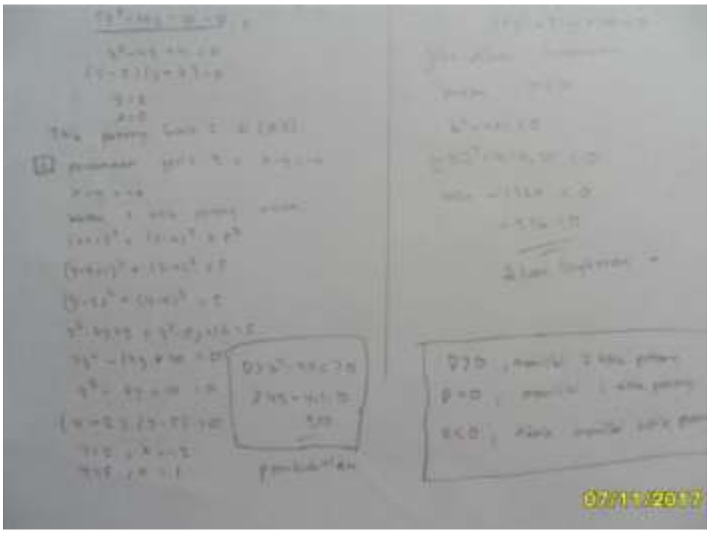
Dengan dialakukanya antisipasi seperti pada interaksi di atas, siswa sudah dapat menyelesaikan permasalahan yang diberikan. Pada jawaban akhir, terdapat 2 respon siswa yang sesuai dengan prediksi dan terdapat 1 respon yang di luar prediksi peneliti. Respon yang sesuai prediksi adalah siswa dapat membuktikan kedudukan garis terhadap lingkarn dengan mencari titik potongnya. Dengan menghitung titik perpotongannya, terbukti bahwa lintasan 1 memotong lingkaran di 2 titik, lintasan 1 menyinggung lingkaran, dan lintasan 3 saling lepas dengan lingkaran.





Gambar 4.46 Jawaban Siswa untuk LK 5

Respon kedua yang telah diprediksikan akan muncul adalah adanya kesimpulan tentang nilai diskriminan dari persamaan kuadrat hasil dari substitusi garis terhadap lingkaran.



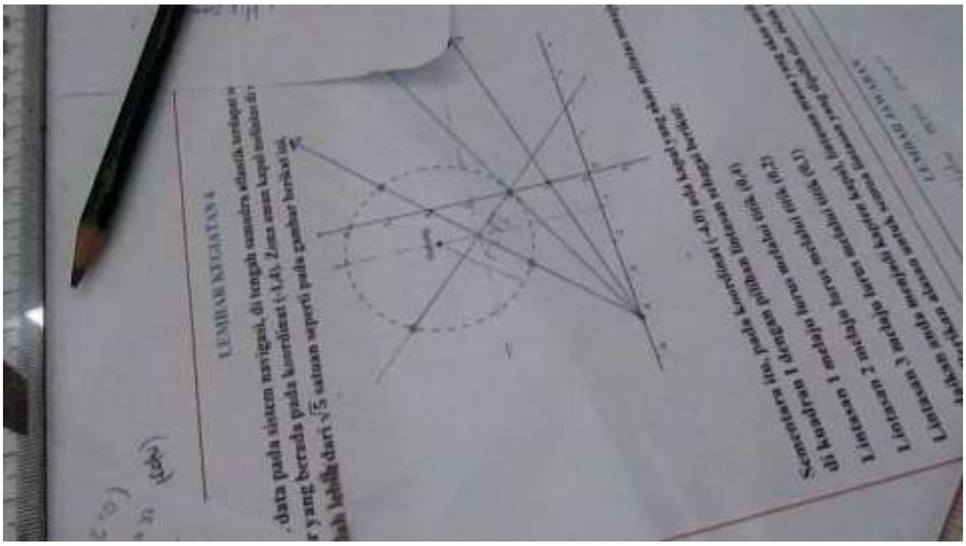
Gambar 4.47 Jawaban Siswa untuk LK 5

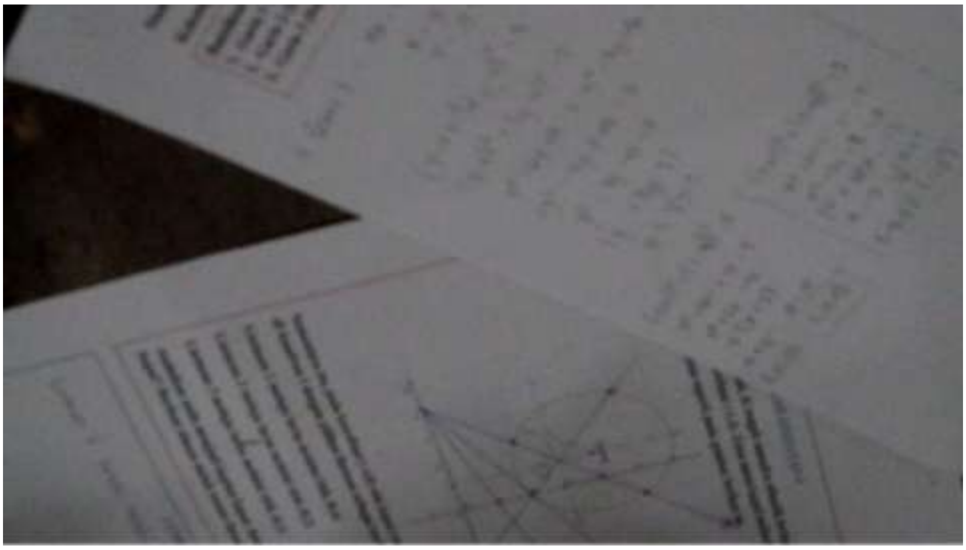
Karena munculnya prediksi ini, maka dipresentasikan dan dilakukan Tanya jawab mengenai kesimpulan yang dibuat oleh siswa.

Guru	: "lintasan 2, kenapa ke D = 0? Bukan mencari titik potong"
Siswa (A)	: "bisa dicari juga titik potongnya bu"
Guru	: "jadi, untuk membuktikan ada titik potong atau tidak, kita harus nyari titiknya (titik potong) atau diskriminannya?"
Siswa	: "diskriminan"
Guru	: "kenapa?"
Siswa	: "itu punya titik potong kan, ya diskriminan bu"

Siswa sebenarnya telah memahami tentang makna diskriminan pada perpotongan antara garis dan lingkaran. Namun belum dapat menjelaskan secara jelas. Sehingga penulis perlu menjelaskan kembali alasan dari munculnya diskriminan pada titik perpotongan garis dan lingkaran. Selain itu, ada pula siswa yang belum memahami mengapa diskriminan memiliki rumus $D = b^2 - 4ac$. Pertanyaan tentang diskriminan ini dijelaskan di luar pembelajaran karena berkaitan dengan konsep-konsep yang sudah dipelajari siswa.

Adapun respon yang di luar prediksi adalah terdapat siswa yang menemukan 4 titik perpotongan antara lintasan 1 dan lingkaran. Respon ini tidak secara maksimal diantisipasi oleh peneliti karena harus dipahami secara keseluruhan bagaimana cara siswa mendapatkan 4 titik perpotongan. Pada saat itu, peneliti belum menemukan alasan mengapa jawaban tersebut kurang tepat padahal sudah prosedur yang dilakukan sudah benar.

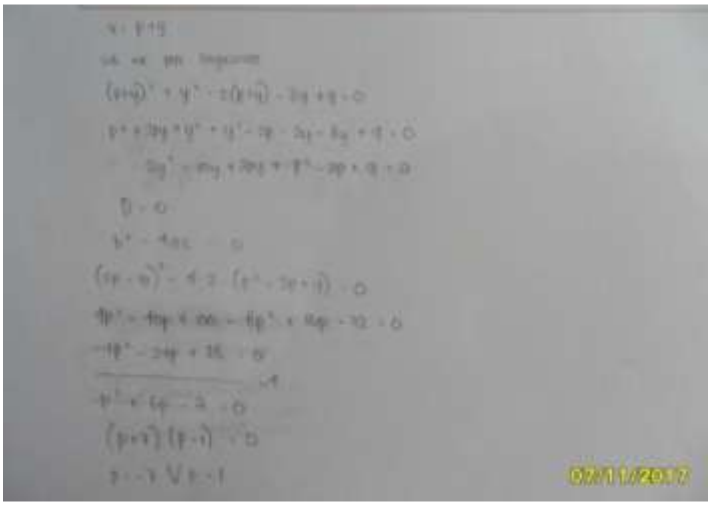




Gambar 4.48 Respon siswa yang di luar prediksi

Setelah dilakukan pengkajian ulang di luar pembelajaran, peneliti menemukan jawaban dari respon siswa tersebut yaitu karena disubstitusikan pada persamaan lingkaran. Titik perpotongan antara garis dan lingkaran adalah hasil irisan himpunan titik pada lingkaran dan garis. Jika substitusi x atau y dilakukan terhadap persamaan garis maka akan langsung menghasilkan titik perpotongan. Jika disubstitusikan pada lingkaran maka harus dilakukan substitusi pula pada garis sehingga didapatkan irisan penyelesaiaannya. Respon ini dapat menjadi bahan revisi untuk bagi desain didaktis revisi.

Selanjutnya dilakukan validasi dengan memberikan LK 6. Jika siswa sudah dapat memahami syarat dari kedudukan garis terhadap lingkaran secara aljabar, maka siswa dapat mengaplikasikannya pada permasalahan ini.



Gambar 4.49 Jawaban Siswa untuk LK 6

Guru : ”untuk mencari p nya, ini ada keterangan menyinggung”
Guru : ”Kalo menyinggung itu, gimana ya? (syaratnya)”
Siswa berpikir
Guru : ” menyinggung itu saat kondisinya apa?”
Siswa : “saat sebuah garis menyinggung lingkaran”
Guru : “Iya, saat menyinggung lingkaran dia punya 1 titik potong, nah artinya?
Siswa : “titik potongnya 1”
Guru : “titik potongnya 1 itu artinya?”
Siswa : “oh D nya nol”

Berdasarkan proses tanya jawab ini, siswa belum melakukan formulasi pada kegiatan sebelumnya. Siswa belum memahami kesimpulan yang didapat pada kegiatan formulasi yaitu tentang diskriminan. Sehingga pada tahapan validasi ini, siswa secara bersamaan juga melakukan formulasi tentang kedudukan garis dan lingkaran.

4. Implementasi Desain Didaktis Konsep Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Melalui Titik Singgungnya

Implementasi pada pertemuan ke 4 dimulai dengan tanya jawab tentang pertemuan ke 3 yaitu tentang kedudukan garis terhadap lingkaran. Hal ini bertujuan untuk menkonfirmasi kembali apakah siswa masih mengingat konsep kedudukan garis terhadap lingkaran. Selanjutnya konsep tentang garis yang menyinggung lingkaran akan diaplikasikan pada persamaan garis singgung lingkaran yang dipelajari pada pertemuan ini.

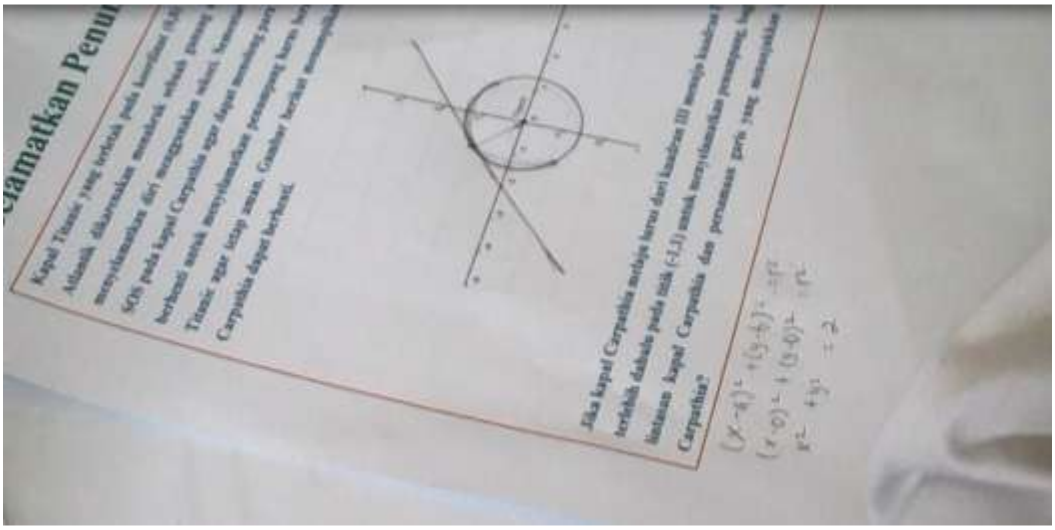
Situasi aksi dimulai dengan menggambar dan menentukan persamaan garis singgung yang terdapat dalam permasalahan LK 7. Diskusi dilakukan secara berkelompok dengan kelompok yang sama seperti pertemuan sebelumnya. Setiap anggota kelompok diberikan kertas kosong untuk menuliskan hasil pemikirannya dan hasil dari jawaban akhir dituliskan pada 1 lembar jawaban untuk 1 kelompok.

Gambar 4.50 Aktivitas Siswa (Kelompok 4) Saat Mendiskusikan LK 7

Saat aktivitas menggambar, diprediksikan siswa akan dapat mengerjakannya dalam waktu yang singkat. Namun ternyata, sebagian besar kelompok membutuhkan 5 menit untuk mendiskusikan gambar lintasan yang ada pada LK7. Hal tersebut dikarenakan siswa belum terbiasa sehingga membutuhkan waktu lebih untuk memahami permasalahan yang yang disajikan dengan suatu cerita seperti yang terdapat pada LK 7. Misalnya pada kelompok 9, siswa mengalami kekeliruan dengan informasi yang disajikan pada LK 7.

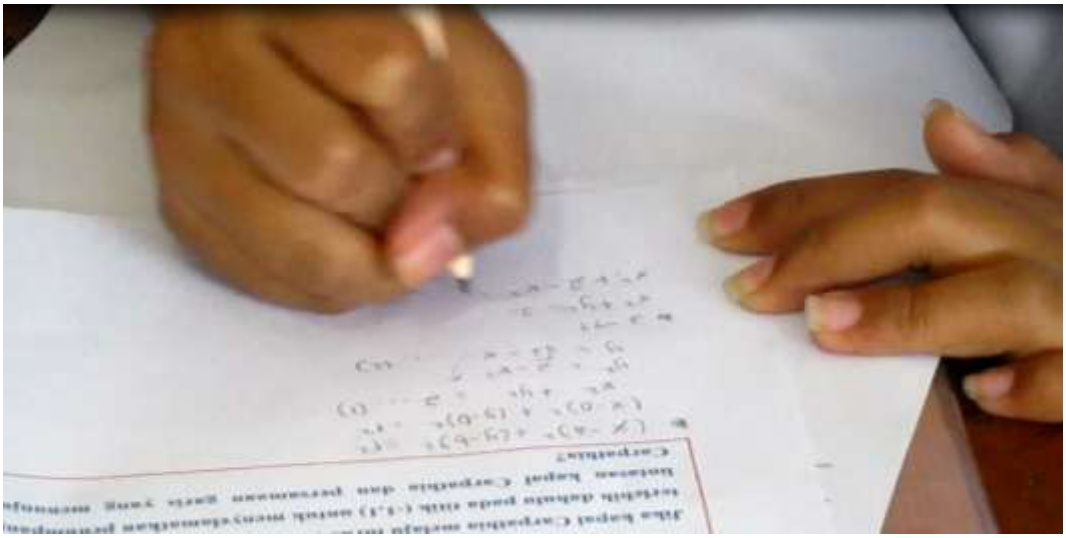
Siswa (Ho) : “gak ngerti, ini titiknya (-1,1) tapi kuadran III”

Siswa (M) : “ini kan kuadran I, II, III...”
Siswa (Ho) : “ini tidak *baleg* (tidak benar), ibuu...” (memanggil guru)
Siswa (Ho) : “bu, ini tidak *baleg*, kenapa kuadran III tapi (-1,1)?”
Guru : “melajunya dari kuadran III...”
Siswa (Ho) : “ohhh kesini”
Guru : “naaahhh”
Siswa menggambarkan lintasan dengan benar



Gambar 4.51 Lintasan Kapal

Setelah dapat menggambar lintasan kapal yang diinginkan, siswa sebenarnya sudah dapat menentukan persamaan lintasan secara benar dengan cara menentukan persamaan garis yang melalui 2 titik. Namun, adanya lingkaran pada gambar ternyata mempengaruhi pemikiran siswa sehingga menurut pemikirannya persamaan garis yang ditentukan haruslah melibatkan persamaan lingkaran juga. Hal ini diperkirakan adanya pengaruh dari pembelajaran sebelumnya tentang kedudukan garis terhadap lingkaran. Beberapa kelompok diantaranya (Kelompok 2 dan 9) sampai melihat kembali catatan di buku tentang garis dan lingkaran.



Gambar 4.52 Respon siswa saat menentukan persamaan garis pada LK 7

Sehingga penulis merasa perlu melakukan penegasan kembali bahwa yang ditanyakan hanyalah persamaan dari lintasan kapal saja. Setelah adanya penegasan itu, maka siswa dapat mengkonfirmasi jawabannya sendiri. Adapun cara yang dipakai adalah dengan menggunakan persamaan garis yang melalui 2 titik potong lintasan dengan sumbu x dan sumbu y seperti pada gambar berikut.

Sehingga agar sampai pada tujuan yang ingin dicapai pada kegiatan aksi ini, dilakukan antisipasi berupa pertanyaan yaitu "apakah ada cara lain yang dapat digunakan untuk mencari persamaan garisnya?". Kemudian kelompok 1 menjawab dengan menggunakan Phytagoras.

Respon ini juga belum sesuai dengan prediksi yang paling diharapkan muncul tetapi ada konsep yang dapat digunakan untuk dipakai pada cara selanjutnya, maka ditanyakan kembali pada siswa:

Guru : "kalau garis yang melaui 1 titik, persamaannya gimana ya?"
Siswa : "$y - y_1 = m(x - x_1)$"
Guru menuliskan rumus tersebut di papan tulis
Siswa : "gak ada....eh min 1 koma 1"
Guru : sehingga menjadi $y - 1 = m(x + 1)$ kan ya?, terus cara nyari gradiennya gimana?"
Siswa : "pake tegak lurus bu"
Guru : "tegak lurus, apa yang tegak lurus?"
Siswa : "gradiennya 1, karena 45 derajat"
Guru : "iya, karena memang gambarnya 45 ya?"
Siswa : "iya"
Guru : "kalau gambarnya belum tentu 45 derajat gimana?"
Guru : "ini gradiennya m, gradien ini (jari-jari lingkaran yang tegak lurus garis singgung) bisa diketahui ga?"
Siswa : "bisa"
Guru : "apa gradienny?"
Siswa menyebutkan rumus gradien yang dari garis yang melalui 2 titik
Siswa : "tapi kan kita gak tahu titiknya bu?"
Guru : "ini kan (-1,1), titik ini?" (guru menunjuk pada titik pusat lingakar)
Siswa : "oh iya ya, tegak lurus jadi dikali -1"

Kebingungan siswa dalam mencari cara lain untuk menentuka persamaan garis terhambat karena gambar yang ada sudah jelas keterangannya. Kekurangan lain adalah guru tidak menegaskan adanya titik pusat lingkara yang dapat digunakan untuk mencari gradien. Dengan aktivitas diskusi yang memerlukan waktu yang panjang, akhirnya ditemukan respon siswa yang sesuai dengan yang paling diprediksikan. Sehingga pembelajaran dilanjutkan pada kegiatan formulasi.

Proses diskusi yang membutuhkan waktu lama saat situasi aksi, ternyata sangat berpengaruh pada alur berpikir siswa tekait dengan gradien garis singgung.

Untuk membuktikan pernyataan yang ada pada LK 8, siswa sudah dapat menyelesaikannya tanpa banyak bantuan guru dan memerlukan waktu yang lebih singkat. Adapun kesulitan yang dihadapi adalah saat mengubah ${x_1}^2 + {y_1}^2$ menjadi r^2

Siswa : "kenapa ya ini gini?" (siswa menujuk pada LK 8 yaitu $xx_1 + yy_1 = r^2$)

Siswa : "trus ini $({x_1}^2 + {y_1}^2)$ jadi r nya gimana bu?"

Siswa (S) sebenarnya belum memahami cara mengubah ${x_1}^2 + {y_1}^2$ menjadi r. Namun karena kesimpulan pada LK 8 sudah ada, maka siswa (S) langsung mengubahnya.

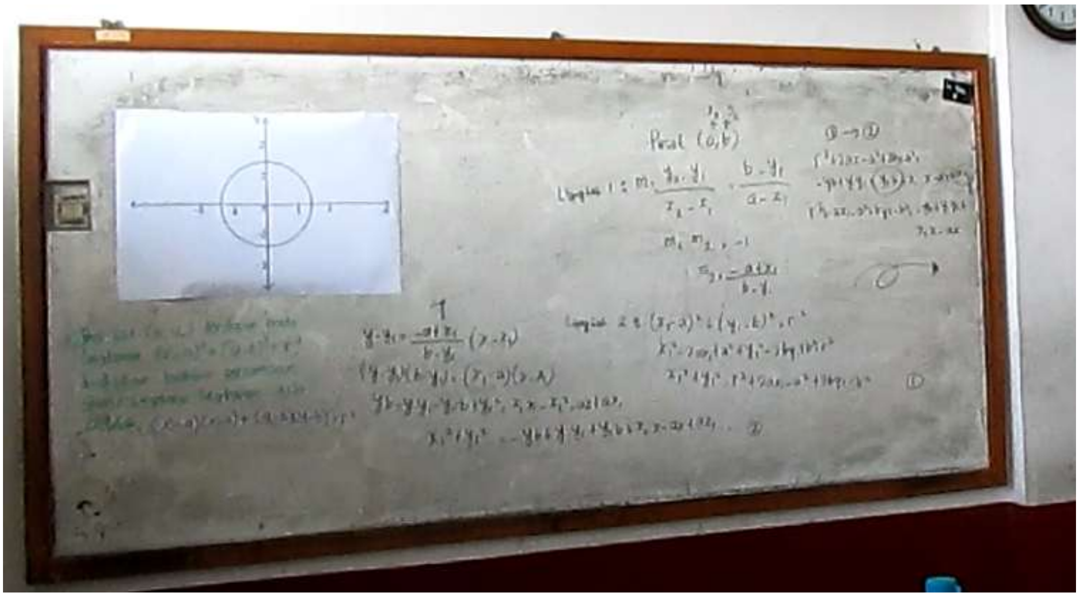
Siswa (T) : "ini ${x_1}^2 + {y_1}^2$, r kuadrat gitu?"
Siswa (D) : "iya"
Siswa (T) : "oh, pake Pythagoras gitu?"
Siswa (D) : " yang mana?"
Siswa (T) : "pake Pythagoras yang x dan y itu"
Sswa (D) : "oh he eh"
Siswa (T) : "coba ya"

Setelah didapatkan kesimpulan tentang pembuktian dari pernyaataan pada LK 8, maka ppembelajaran dilanjutkan dengan menggeneralisasikan pusat lingkaran menjadi (a,b) yang termuat dalam LK 9. Sebagian besar siswa (8 kelompok) sudah dapat mengetahui bagaimana prosedur yang dilakukan untuk membuktikan bahwa persamaan garis singgungnya berdasarkan pengalaman pada LK 8. Namun dikarenakan panjangnya persamaan yang harus disederhanakan, hanya ada beberapa siswa yang berkeinginanan untuk membuktikannya. Hal ini dikarenakan kemampuan siswa dalam menyelesaikan permasalahan bentuk aljabar berbeda-beda.

Adapun kesulitan yang dihadapi diantaranya karena kesalahan menghitung gradien, kesalahan mengoperasikan aljabar, dan bingung dalam mengubahnya menjadi bentuk persamaan garis singgung yang diinginkan. Sehingga dilakukan antisipasi sesuai dengan kesulitan-kesulitan yang dihadapi siswa. Pada akhirnya, haya ada 1 kelompok saja yang tuntas dalam menemukan persamaan garis yang diinginkan yaitu kelompok 4. Untuk kelompok yang tidak menyelesaikan sampai akhir, tidak dituntut untuk menyelesaikannya. Karena keberhasilan dari pertemuan ini bukan dilihat dari jawaban akhir, namun dari proses berkembangnya pemikiran siswa dalam menyelesaikan persoalan bentuk pembuktian. Adapun situasi validasi tidak dapat diimplementasikan karena waktunya tidak mencukupi. Sehingga situasi validasi dilanjutkan pada pertemuan berikutnya.

5. Implementasi Desain Didaktis Konsep Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien Tertentu (m)

Pembelajaran pada pertemuan 5 diawali dengan kegiatan validasi yang tidak terlaksana pada pertemuan 4. Terdapat 1 kelompok yang dapat menyelesaikan sampai tuntas proses pembuktiannya yaitu kelompok 5 maka kelompok inilah yang dipilih untuk mempresentasikan jawabannya yang dapat terlihat pada gambar berikut.



Gambar 4.53 Kelompok 4 Mempresentasikan Jawaban LK 9

Secara prosedur, kelompok 4 sudah dapat menuliskan pembuktian dari persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik singgungnya. Namun argumen tentang perubahan ${x_1}^2 + {y_1}^2$ (kedudukan titik pada lingkaran) belum lengkap sehingga ditambahkan oleh guru agar siswa dapat lebih memahaminya.Selanjutnya siswa diberikan pertanyaan untuk mengkonfirmasi apakah sudah paham dengan konsep yang ada pada LK 8 dan 9. Pemberian pertanyan juga dilakukan sebagai kegiatan institusionalisasi bagi siswa.

Karena kegiatan ini seharusnya diimplementasikan pada pertemuan sebelumnya, maka pemberian pertanyaan dilakukan di depan kelas dan didiskusikan secara bersama-sama agar mempersingkat waktu namun tetap pada tujuan yang ingin dicapai. Adapun soal yang diberikan dan respon siswa terhadap soal tersebut dapat terlihat pada gambar dan dialog berikut.

Gambar 4.54 Guru memberikan soal latihan

Siswa (K) : "itu 4 koma 2 nya $x_1 y_1$"

Guru : "betul, tapi apa keterangan awalnya (menunjuk pada pernyataan di LK 9)? Emang sudah pasti boleh dimasukan ke sini?"

Siswa (I) : "oh iya, itu kan yang terdapat pada lingkaran"

Guru : "pertama, jika maka, kalau jika maka, jika nya harus terpenuhi dulu tidak?"

Siswa : "iya"

Guru : "jika nya harus terpenuhi dulu baru bisa jalan ke maka nya, kalau di sini (teorema pada LK 9), jika nya berarti syarat. Jika titik x_1 koma y_1 terdapat pada lingkaran. Nah, cara memeriksa ini (titik 4 koma 2) terdapat pada lingkaran ini gak?"

Siswa : "gak"

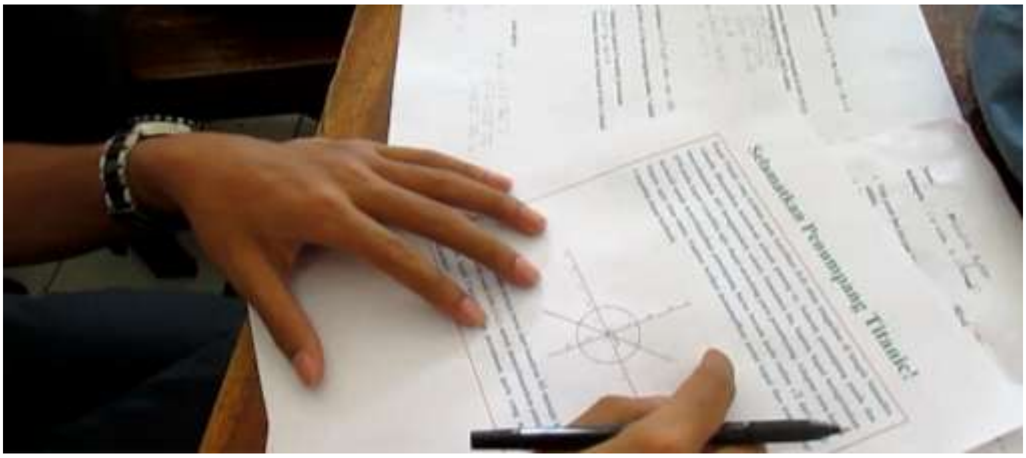
Guru : "kenapa gak?"

Siswa (I) : "eh itu" (siswa (I) berpikir sejenak)

Siswa (S dan A) : “dimasukin dulu”
Guru : “iya, memeriksa (menulis syarat pada papan tulis), memeriksa syaratnya, disubstitusikan”
Nilai x dan y pada koordinat titik disubstitusikan pada persamaan lingkaran
Guru : “sudah benar?”
Siswa : “iyaa..”
Guru : “sudah terpenuhi syaratnya?”
Siswa : “sudah”

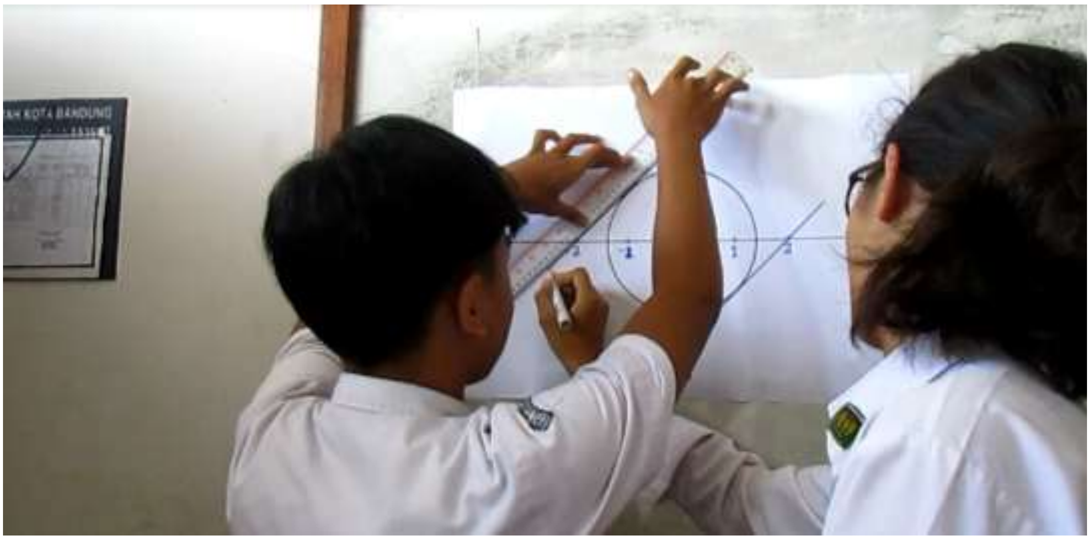
Pada percakapan ini, terlihat bahwa kegiatan diskusi yang dilakukan oleh guru dan siswa terlalu banyak didominasi oleh guru. Ini menjadi evaluasi tersendiri bagi peneliti, karena seharusnya peneliti memberikan kesempatan bagi siswa untuk menjawab terlebih dahulu kemudian adanya kekurangan dapat dikoreksi secara bersama-sama. Adapun respon yang muncul sudah terprediksikan oleh peneliti. Siswa sudah dapat mengaplikasikan teorema pada LK 9 namun tahapan untuk memeriksa terpenuhinya syarat titik berada pada lingkaran terlewati. Sehingga diberikan antisipasi yang telah direncanakan sebelumnya.

Selanjutnya situasi didaktis dilanjtkan pada kegiatan aksi kembali untuk pertemuan 5 yaitu menggambar garis singgung yang bergradien tertentu dan menentukan persamaannya yang termuat dalam LK 10. Walaupun konteksnya masih sama dengan pertemuan sebelumnya, namun siswa masih membutuhkan waktu untuk dapat memahami permasalahan pada LK 10 karena adanya perubahan keterangan. Respon siswa sesuai dengan yang diprediksikan. Sebagian kelompok sudah dapat menggambarkan dengan benar namun belum lengkap. Hal ini mungkin dikarenakan siswa tahu jika saat itu sedang mempelajari persamaan gari singgung. Terdapat juga jawaban yang kurang tepat dikarenakan ada beberapa syarat dalam LK 10 yang tidak dapat dipahami. Respon-respon tersebut dapat terlihat pada gambar-gambar berikut.



(a)

(b)



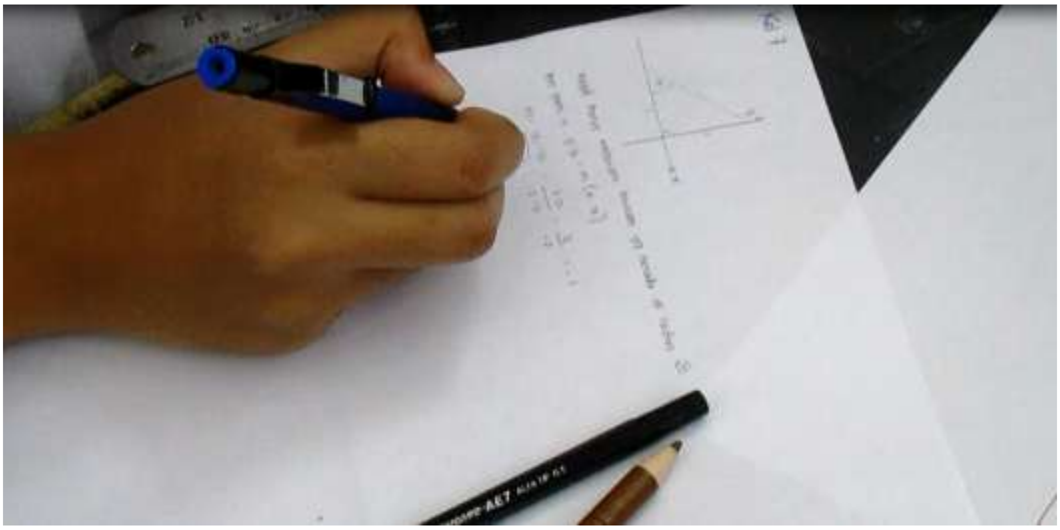
(c)

Gambar 4.55 Berbagai Respon Siswa dalam Menggambar Lintasan

Berikut ini percakapan siswa untuk mendiskusikan cara menentukan persamaan garis pada LK 10

Siswa (J)	: “maksudnya yang ditanya apa sih?”
Siswa (L)	: “jangan-jangan sudut 45 teh gradien juga. Jadi rumusnya pake tan theta sama dengan gradien”
Siswa (J)	: “ini mah yang tahunya yang ....(tidak terdengan jelas)”
Siswa (L)	: “tapi kenapa bisa tan?”
Siswa (J)	: “ini nih gradiennya berarti kan? Membentuk 45 derajat terhadap sumbu x, berarti ini 45”
Siswa (L)	: “ke bawahnya kita harus nyari ini kan?”

Kelompok ini pada awalnya berdiskusi tentang nilai sin, cos, dan tan 45. Namun karena mereka merasa jawabannya bukan dengan cara itu, maka digunakan cara lain untuk dapat menentukan persamaan garis. Sebagian besar kelompok menggunakan cara yang sama dengan pertemuan 4 yaitu persamaan garis yang bergradien dan melalui 1 titik (yaitu titik (-1,1)).



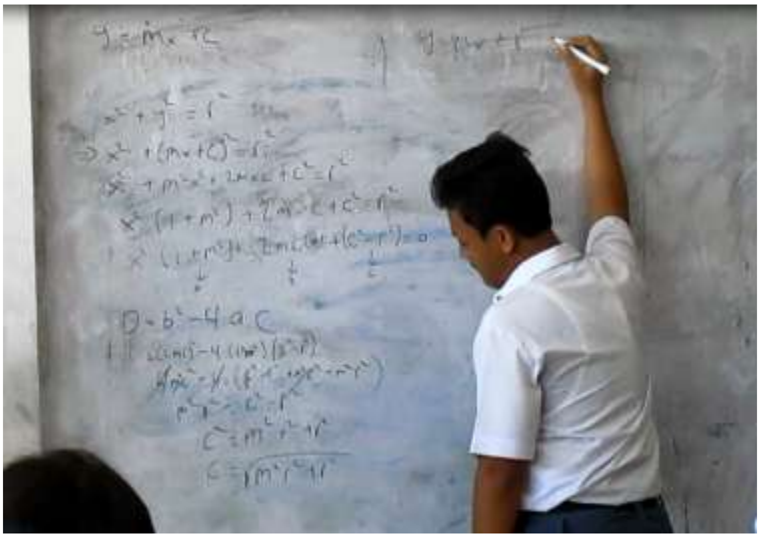
Gambar 4.56 Jawaban Siswa Terhadap LK 10

Untuk kelompok yang belum menemukan jawabannya, peneliti memberikan petunjuk bahwa konsep pada pertemuan ini ada kaitannya dengan pertemuan 3. Sehingga muncul respon yang diharapkan yaitu dari kelompok 6. Sehingga dipilih untuk dipresentasikan pada teman-temannya di depan.

Gambar 4.57 Jawaban Kelompok 6 Terhadap LK 10

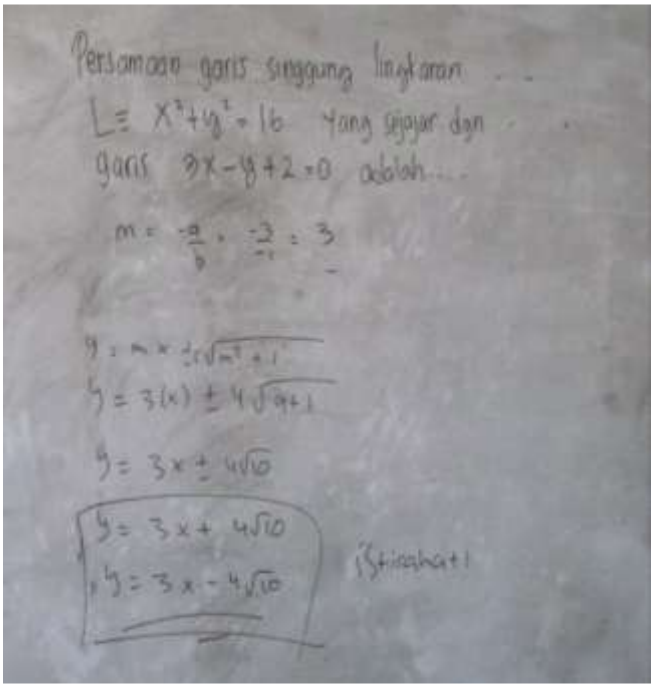
Setelah dilakukan kegiatan aksi, maka berlanjut pada kegiatan formulasi yaitu membuktikan teorema persamaan garis singgung yang termuat dalam LK 11. Pada awalnya, peneliti memperkiran bahwa siswa sudah dapat menuliskan persamaan garis yang bergradien m dengan $y = mx + c$ karena hasil jawaban yang dipresentasikan sudah berbentuk $y = mx + c$. Namun ternyata respon ini hanya muncul. Pada 1 kelompok saja yaitu kelompok 6. Kelompok lain membuat persamaan garis dengan bentuk $y = mx - mx_1 + y_1$. Sehingga diperlukan adanya antisipasi agar dapat merubah $-mx_1 + y_1$ menjadi suatu konstanta c.

Selanjutnya siswa sudah dapat mengaplikasikan prosedur yang dilakukan pada kegiatan aksi untuk pembuktian teorema pada LK 11. Adapun kesulitan yang dihadapi siswa adalah dalam mengoperasikan aljabarnya dan mengubah menjadi $c = \pm r\sqrt{m^2 + 1}$. Berikut ini beberapa respon siswa dalam membuktikan teorema.



Gambar 4.58 Respon Siswa Terhadap LK 11

Dikarenakan sampai pada kegiatan ini sudah memerlukan waktu 85 menit, maka peneliti putuskan untuk tidak mengimplementasikan LK 12 dan 5 menit terakhir digunakan untuk kegiatan validasi dengan memberikan latihan soal. Berdasarkan respon yang muncul dari siswa, siswa sudah dapat mengaplikasikan teorema pada LK 11 dengan tepat yang terlihat pada gambar. Sehingga dapat disimpulkan bahwa siswa sudah memahami teorema pada LK 11.



Gambar 4.59 Jawaban Siswa Saat Latihan Soal

C. Dampak dari Implementasi Desain Didaktis Hipotesis Konsep Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran

Berdasarkan hasil implementasi yang telah dilakukan, Desain didaktis yang dikembangkan sudah mempertimbangkan alur belajar baik secara struktural (keterkaitan konsep) maupun fungsional (kesinambungan berpikir). Tahapan-tahapan yang dibuat dalam *Lesson Design* sebagian besar sudah berjalan sesuai prediksi. Hal ini dapat terlihat dari adanya respon siswa yang diharapkan muncul pada setiap pertemuannya. Namun tidak semua siswa dapat menjalankan tahapan tersebut. Karakteristik siswa yang terlihat dalam implementasi ini terbagi menjadi 2, yaitu siswa yang mudah memahami sajian desain didaktis saat berkenaan dengan Geometri dan siswa yang mudah memahami sajian desain didaktis saat berkenaan dengan Aljabar. Saat sajian desain berkenaan dengan Geometri, siswa yang lebih memahami Geometri akan dengan mudah dan cepat merespon sedangkan siswa yang lebih memahami Aljabar lebit sulit dan membutuhkan waktu lebih dalam memahaminya, begitupun sebaliknya. Karakteristik ini semakin terlihat saat implementasi sudah memasuki pertemuan 3. Selain itu, dapat ditunjukan pula bahwa terdapat respon siswa yang sesuai dengan yang telah diprediksikan, dan terdapat pula respon di luar prediksi. Respon di luar prediksi ini dapat dijadikan tambahan bagi prediksi respon pada desain didaktis revisi agar terjadi kesinambungan berpikir pada siswa.

Rancangan didaktis yang dibuat bertumpu pada hasil penelitian dan hasil kajian yang dilakukan peneliti melalui proses repersonalisasi dan rekontekstualisasi. Sehingga didapatkan data mengenai hambatan-hambatan apa saja yang dihadapi siswa pada saat mempelajari konsep persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran dan merancang situasi didaktis agar dapat mereduksi hambatan tersebut. Hasil perhitungan N-Gain dari *pretest* dan *posttest* menunjukkan adanya peningkatan belajar sebesar 71% pada siswa. Hal ini menunjukan bahwa desain didaktis yang telah diimplementasikan berdampak pada meningkatnya hasil belajar siswa dengan tinggi dan *learning obstacle* yang ada sebelumnya telah tereduksi.

D. Desain Didaktis Revisi Konsep Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran

Berdasarkan hasil analisis metapedadidaktik yang dilakukan saat implementasi desain didaktis, terdapat beberapa desain yang harus direvisi. Pada pertemuan 3, awalnya siswa diharuskan membuktikan 3 lintasan direvisi menjadi hanya memilih salah satu lintasan yang dibuktikan kedudukannya terhadap lingkaran. Selain itu, pada prediksi respon siswa, ditambahkan respon lain yang muncul saat implementasi. Pada pertemuan 4, siswa membutuhkan waktu yang lebih lama dari yang sudah dialokasikan untuk menentukan persamaan garis. Oleh karena itu, LK 9 tetap diimplementasikan dengan alokasi waktu yang sudah ditentukan. Namun jika tidak tuntas, dapat dijadikan tugas harian. Selain itu, dibutuhkan banyak latihan (institusionalisasi) bagi siswa terutama untuk materi kedudukan garis terhadap lingkaran.