

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Matematika berperan penting dalam membangun pola pikir dan sikap ilmiah manusia. Hendriana & Sumarmo (2014, hlm. 6) berpandangan bahwa visi pembelajaran matematika memiliki 2 arah pengembangan, yaitu untuk memenuhi kebutuhan masa sekarang dan masa yang akan datang. Pertama, mengarahkan pembelajaran matematika untuk pemahaman konsep dan ide matematika. Kedua, mengarahkan pembelajaran matematika untuk memberi peluang berkembangnya kemampuan menalar yang logis, sistematis, kritis, cermat, kreatif, menumbuhkan rasa percaya diri, dan mengembangkan sikap objektif dan terbuka. Sejalan dengan hal tersebut, Harel (2008; 2008) memandang matematika sebagai cara berpikir (*ways of thinking*) dan cara memahami (*ways of understanding*). Peranan matematika ini secara keseluruhan juga termuat dalam kurikulum 2013 (Kemendikbud, 2016). Sehingga pandangan terhadap matematika sebagai ilmu pengetahuan yang ketat dan terstruktur secara rapi, bergeser menjadi pandangan bahwa matematika adalah aktivitas kehidupan manusia (Turmudi, 2010, hlm. 83).

Salah satu materi matematika yang berperan penting dalam mengembangkan kemampuan berpikir siswa adalah persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran. Persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran merupakan salah satu materi Matematika yang termasuk ke dalam Geometri Analitik. Geometri Analitik merupakan materi hasil penggabungan (*blending*) antara Aljabar dan Geometri (Gantert, 2008, hlm. 209). Tidak hanya pemikiran aljabar dapat digunakan untuk memecahkan masalah geometris, tetapi juga gagasan geometris dapat memberikan sumber wawasan untuk masalah aljabar (French, 2004, hlm. 119). Melalui pembelajaran materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran, siswa memiliki kesempatan untuk berkembang dalam kemampuan bernalar, abstraksi, kesadaran spasial, dan berpikir tingkat tinggi (Utami, 2014; Frech, 2004; NCTM, 2000; Azak, 2012).

Hal terpenting dalam mempelajari Geometri Analitik adalah bagaimana menyelaraskan pengetahuan siswa tentang Geometri dan Aljabar. Namun faktanya, pemahaman akan bagian aljabar dan geometri dalam geometri analitik

terisolasikan dalam pikiran siswa (Recegova, 2005; Skordoulis, 2008). Walaupun siswa lebih menyukai ekspresi bentuk geometris dalam menyelesaikan masalah Geometri, hubungan antara ekspresi aljabar dan representasi bentuk geometris tidak begitu jelas bagi mereka. Pada materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran, masih ada hambatan dari siswa ketika ditanya tentang interpretasi bentuk aljabar secara geometris begitupun sebaliknya (Alfiyyati, 2015, hlm. 94). Selain itu, pada tingkat pendidikan yang lebih tinggi, mahasiswa kesulitan dalam menyelesaikan soal-soal Geometri Analitik (Imswatama & Muhassanah, 2016; Junaedi, 2012). Wardani (2015) menunjukkan bahwa terdapat miskonsepsi pada siswa kelas XI SMA terhadap materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran yang disebabkan siswa kesulitan dalam mengklasifikasi bentuk-bentuk persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran.

Berdasarkan hasil kajian pendahuluan yang dilakukan oleh peneliti dalam proses pembelajaran materi Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran, didapatkan adanya hambatan-hambatan belajar pada diri siswa yang disebut *Learning Obstacle* (LO). Brosseau (2002) mengidentifikasi *Learning Obstacle* menjadi *epistemological obstacle*, *ontogenic obstacle*, dan *didactical obstacle*. *Learning obstacle* yang ditemukan pada pembelajaran tersebut yang pertama berupa *didactical obstacle*. *Didactical obstacle* merupakan kesulitan siswa yang dihasilkan dari cara guru mendesain pembelajaran yang menghambat *learning trajectories* siswa. Balachef (dalam Brown, 2008) menyatakan bahwa kesulitan siswa muncul sebagai bagian dari cara siswa mengadaptasikan pengetahuannya terhadap lingkungannya.

Penyajian konteks nyata sangat diperlukan agar siswa tertarik untuk mempelajari konsepnya dan mengetahui aplikasi konsep tersebut pada kehidupan sehari-hari. Namun penyajian konteks nyata tersebut haruslah diperhatikan fungsinya bagi konsep matematika yang akan dibangun oleh siswa. Menurut Suryadi (2016, hlm. 142), bahan ajar yang dikembangkan seringkali kurang mempertimbangkan alur belajar baik secara struktural (keterkaitan konsep) maupun fungsional (kesinambungan berpikir). Berdasarkan pengamatan dari video pembelajaran terlihat adanya permasalahan secara struktural pada penyajian konteks nyata untuk mempelajari persamaan lingkaran.

Pada video tersebut teramati bahwa pada awal pembelajaran guru memberikan permasalahan “Misalkan Gunung Tangkuban Perahu meletus, bagaimanakah cara mengetahui daerah-daerah yang aman serta daerah-daerah yang harus dievakuasi, apabila gunung meletus dengan radius 3 km?”. Melalui interaksi antara siswa dan guru, permasalahan tersebut digambarkan dalam bentuk lingkaran dan diubah menjadi gambar lingkaran pada bidang Cartecius. Saat diberikan permasalahan tentang Gunung Tangkuban, hal yang siswa pikirkan hanyalah membuat radius disekitar gunung yang dapat digambarkan dalam bentuk lingkaran. Ketika lingkaran digambarkan pada bidang Cartecius, siswa mengalami kebingungan karena tidak ada penjelasan apa maksud dan tujuan dari proses perubahan tersebut. Proses perubahan menjadi lingkaran pada bidang Cartecius menimbulkan permasalahan dalam hal alur belajar secara struktural. Sehingga pada akhirnya siswa mengikuti alur yang ada walaupun sulit untuk dipahami maksud dan tujuannya. Hambatan belajar ini termasuk ke dalam *didactical obstacle* (Brousseau, 2002). Alur berpikir siswa saat memahami keterkaitan antara lingkaran dan persamaan lingkaran terhambat karena struktur pada tiap proses kurang saling menunjang. Sehingga bisa berdampak pada akhirnya siswa hanya melakukan imitasi dari apa yang disajikan. Imitasi tanpa memaknai lebih lanjut masih memainkan peranan sentral dalam mempelajari konsep persamaan (Vinner, 2013, hlm. 474).

Selanjutnya, *didactical obstacle* juga ditemukan pada materi kedudukan garis terhadap lingkaran dalam buku ajar. Penyiapan bahan ajar pada umumnya hanya didasarkan pada model sajian yang tersedia dalam buku-buku acuan tanpa melalui proses pengkajian yang mendalam terlebih dahulu (Suryadi, 2010, hlm. 6). Sehingga jika terdapat kekeliruan pada buku ajar, maka berdampak pula pada proses pembelajarannya. Pada salah satu buku Matematika (Sukino, 2013, hlm. 193), ditemukan adanya permasalahan pada proses penyampaian materi kedudukan garis dan lingkaran. Pada penyajian konsep ini, alur yang ada berjalan dari bentuk aljabar menjadi geometris bukan sebaliknya seperti pada Gambar 1.1.

Pada tingkat SMP, siswa mempelajari kedudukan garis terhadap lingkaran secara geometris (Dewi, Suryadi, & Sumiati, 2016, hlm. 13). Pemahaman ini selanjutnya dikembangkan pada tingkat SMA yaitu mempelajari kedudukan garis

terhadap lingkaran secara aljabar. Pada buku ajar dijelaskan bahwa secara aljabar, persamaan garis dapat disubstitusikan pada persamaan lingkaran. Adanya prosedur substitusi persamaan garis terhadap persamaan lingkaran tidak dijelaskan alasannya. Padahal jika diperhatikan secara geometris, kedudukan garis terhadap lingkaran terlihat dari banyaknya titik perpotongan. Adapun secara aljabar, titik perpotongan dari garis dan lingkaran dapat ditentukan dengan cara mensubstitusikan persamaan garis terhadap persamaan lingkaran. Oleh karena itu, alur yang dibuat haruslah berawal dari bentuk Geometri menjadi bentuk Aljabar. Jika dibuat sebaliknya, maka siswa akan sulit memahami konsep ini dan berakibat pada terjadinya hambatan belajar pada siswa.

9.2 Kedudukan Garis terhadap Lingkaran ●●●

Misalkan diketahui garis lurus g dengan persamaan $y = mx + k$ dan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. Secara aljabar, kita dapat mensubstitusikan persamaan garis g ke dalam persamaan lingkaran L hingga diperoleh:

$$x^2 + (mx + k)^2 + Ax + B(mx + k) + C = 0$$

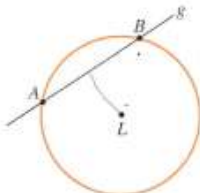
$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + (A + 2mk + Bm)x + (C + Bk + k^2) = 0$$

Berdasarkan tinjauan diskriminan $D = b^2 - 4ac$ dapat ditentukan posisi garis g terhadap lingkaran L sebagai berikut:

- (i) Jika $D > 0$, maka garis g memotong lingkaran L di dua titik berlainan.
- (ii) Jika $D = 0$, maka garis g menyinggung lingkaran L .
- (iii) Jika $D < 0$, maka garis g tidak memotong maupun menyinggung lingkaran L .

Ketiga kondisi di atas, secara geometri bidang dapat dilukiskan sebagai berikut.

- (i) Garis g memotong lingkaran L



Hubungan yang harus ditaati:

$D > 0$

Gambar 1.1 Pembahasan Materi Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Selain *didactical obstacle*, ditemukan pula hambatan belajar berupa *epistemological obstacle*. *Epistemological obstacle* merepresentasikan batasan pemahaman siswa yang menghalangi siswa untuk memahami konteks yang lebih luas (Brousseau, 2002). Miskonsepsi, informasi implisit, serta representasi visual adalah faktor-faktor yang dapat mempengaruhi hambatan epistemologis (Schneider, 2014; Hutapea, Suryadi & Nurlaelah, 2015). Konsep awal yang dipahami oleh siswa kadangkala tidak sesuai dengan konsep para ilmuwan dimana perbedaan itulah yang mengakibatkan kesalahpahaman konsep/miskonsepsi (Li & Li, 2008). *Epistemologis Obstacle* muncul saat siswa diberikan latihan soal yang berkaitan dengan persamaan lingkaran dan persamaan garis singgung lingkaran. Berdasarkan hasil pengaman video pembelajaran, pemberian latihan soal hanya bersifat prosedural seperti pada gambar berikut ini.

The image shows a student's handwritten work on a math problem. The text is written in Indonesian and includes the following:

- Top line: *Persamaan Umum Lingkaran*
- Second line: *11. Pusat (0,0) & jari-jari (r)*
- Third line: *x = 1 Tent. Pers. Lingkaran dg P(0,0) & jari-jari 5*
- Fourth line: $x^2 + y^2 = r^2$
- Fifth line: $x^2 + y^2 = 5^2$
- Sixth line: $x^2 + y^2 = 25$ (boxed)

Gambar 1.2 Latihan Soal Persamaan Lingkaran

Siswa kurang terfasilitasi untuk dapat mengeksplorasi permasalahan tentang persamaan lingkaran dalam konteks yang lebih luas. Permasalahan tentang persamaan lingkaran pada umumnya tidak dikaitkan dengan bentuk lingkaran secara langsung. Padahal persamaan lingkaran merupakan interpretasi dari bentuk lingkaran. Soal-soal yang diberikan biasanya bersifat prosedural yang langsung dapat ditemukan jawabannya dengan rumus yang sudah diberikan. Hasil studi pendahuluan yang dilakukan peneliti dengan mengujikan instrumen kepada siswa menunjukkan bahwa siswa masih kesulitan dalam memahami permasalahan yang disajikan dalam bentuk geometris seperti berikut.

Diketahui lingkaran A, B, dan C saling bersinggungan luar seperti pada gambar di bawah ini, dan memiliki pusat yang termuat di garis yang sejajar dengan sumbu-x. Perbandingan jari-jari ketiga lingkaran tersebut adalah 4:2:1. Jika persamaan lingkaran A adalah $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 23 = 0$, maka persamaan lingkaran C adalah?

Gambar 1.3 Soal Uji *Learning Obstacle* (LO)

Pers. B lingkaran A:
 $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 23 = 0$
 $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 - 23 - 25 - 16 = 0$
 $(x+5)^2 + (y-4)^2 - 64 = 0$
 $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 64$
 maka, lingkaran A pusat di $(-5, 4)$
 dan jari-jari = 8

 Lingkaran C

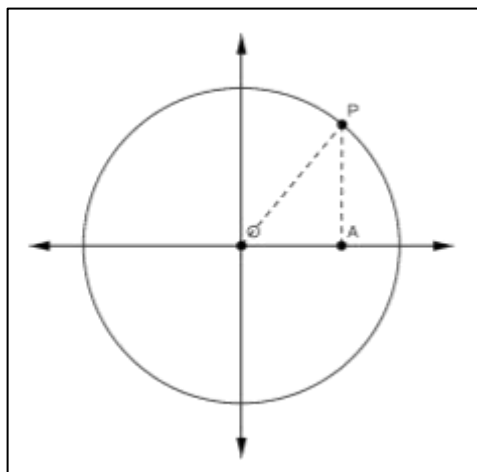
 pusat di $(9, 4)$
 jari-jari 2

 Pers. lingkaran C:
 $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 4$

Gambar 1.4 Jawaban Siswa

Jawaban siswa pada Gambar 1.4 menunjukkan bahwa secara prosedural siswa dapat mencari titik pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran A. Namun saat berlanjut mencari titik pusat lingkaran C, siswa tersebut mengalami kekeliruan dalam menentukan koordinat titik C. Hal ini menunjukkan bahwa siswa belum terbiasa dengan permasalahan yang disajikan dalam bentuk geometris. Permasalahan tersebut terjadi karena keterbatasan konteks dan konsep pada siswa yang memunculkan hambatan bersifat epistemologis sehingga jika disajikan hanya konteks aljabar saja siswa tidak akan mampu menyelesaikan masalah yang bersifat nonrutin sehingga perlu diperkaya dengan konteks visual melalui geometri (Brousseau, 2002).

Epistemological obstacle juga ditemukan pada konsep persamaan lingkaran dan konsep persamaan garis singgung lingkaran. Berdasarkan kajian yang dilakukan terhadap 3 buku ajar matematika (Sukino, 2014; Wargiyanto, 2008; Widodo, 2015), sajian dari proses penemuan persamaan lingkaran didapatkan dari jarak antara sembarang titik pada lingkaran (Titik P) dan titik pusat lingkaran (Titik O) seperti pada Gambar 1.5. Titik P dimisalkan memiliki koordinat (x_1, y_1) sehingga jarak antara titik P dan titik pusat $O(0,0)$ dapat ditentukan dengan menghitung sisi miring dari segitiga siku-siku OPA dengan $PA = y_1$, $OA = x_1$ dan didapat $PO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Karena PO adalah jari-jari lingkaran dan P adalah sembarang titik pada lingkaran, maka persamaan dari lingkaran yang berpusat di titik $O(0,0)$ dan berjari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$



Gambar 1.5 Lingkaran

Namun faktanya, pada video pembelajaran ditemukan bahwa siswa sebenarnya belum memahami titik koordinat dalam bentuk umum seperti (x_1, y_1) . Pemahaman siswa masih sampai pada titik koordinat dalam bentuk suatu bilangan real. Hal tersebut terlihat dari tanya jawab antar guru dan siswa berikut ini.

- Guru : “Panjang dari atas (titik P) sampai bawah (sumbu x) kira-kira berapa?”
 Siswa : “3”
 Guru : “Bukan 3”
 Siswa : “2 koma sekian”
 Guru : “2 koma sekian, tau gak berapa?”
 Siswa : “2,7”
 Guru : “Berarti bisakan saya pake y_1 ?”

Pernyataan siswa menunjukkan bahwa adanya hambatan bagi siswa dalam memahami koordinat bentuk umum seperti (x_1, y_1) dikarenakan pengalaman belajar siswa terbatas hanya sampai pada koordinat khusus seperti (2,3). Sehingga pada akhirnya siswa menyimpulkan untuk menghafal rumus persamaan lingkaran tanpa memikirkan kembali proses-proses yang ada sebelumnya. Hal tersebut terlihat dari salah satu siswa yang terdiam beberapa saat dan akhirnya mengatakan “kalo ada soal, langsung pake rumus ini aja kan?” pada gurunya. Pernyataan ini mencerminkan adanya ketidakbermaknaan dari proses pembelajaran yang telah terjadi.

Selanjutnya pada konsep persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik singgungnya, pemahaman tentang karakteristik dari titik singgung kurang dijelaskan. Padahal rumus persamaan garis singgung didapat karena adanya titik singgung. Kurangnya penjelasan ini dapat terlihat dari contoh pengerjaan latihan di buku ajar pada Gambar 1.6. Kurangnya penjelasan tentang titik singgung dapat menimbulkan miskonsepsi pada pemahaman siswa. Hal tersebut dikarenakan jika titik yang diketahui adalah bukan titik singgung, maka siswa akan terjadi kekeliruan pada jawaban siswa.

| |
|--|
| <p>Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran:</p> <p>a. $L = x^2 + y^2 = 5$ di titik singgung $A(1, -2)$</p> <p>b. $L = x^2 + y^2 = 169$ di titik singgung $B(12, -5)$</p> <p>Jawab:</p> <p>a. Persamaan garis singgung: $x - 2y = 5$ atau $x - 2y - 5 = 0$.</p> <p>b. Persamaan garis singgung: $12x - 5y = 169$ atau $12x - 5y - 169 = 0$.</p> |
|--|

Gambar 1.6 Contoh Pengerjaan Latihan Soal Persamaan Garis Singgung

Berdasarkan penjelasan hasil kajian pendahuluan tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa terdapat permasalahan berupa *epistemological obstacle* dan *didactical obstacle* pada pembelajaran konsep persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran yang meliputi: (1) Pada materi persamaan lingkaran, alur belajar yang disajikan kurang saling menunjang pada tiap tahapannya, (2) Terdapat adanya kekeliruan secara struktural (keterkaitan konsep) pada materi kedudukan garis dan lingkaran (3) Kurangnya pengalaman siswa dalam

menyelesaikan permasalahan persamaan lingkaran yang disajikan dalam bentuk geometris, (4) Siswa belum memahami titik koordinat dalam bentuk umum seperti (x_1, y_1) , (5) Adanya langkah yang hilang pada materi garis singgung lingkaran yang melalui titik singgungnya.

Sekolah dan ruang kelas harus nyata, asli dan bermakna bagi siswa, bukan menyesuaikan dengan sesuatu yang eksternal yang memiliki kualitas ini, tapi dengan kualifikasi dari siswa sendiri (Splitter, 2009, hlm. 143). Pembelajaran berlangsung ketika informasi baru secara aktif dibangun atau ditambahkan secara mandiri pada struktur pemahaman dan *skill* yang sebelumnya telah didapat (aktivitas konstruksi) bukan transmisi pengetahuan yang disampaikan orang lain (Pritchard, 2009 & Applefield, 2001). Efektivitas proses pembelajaran berkaitan erat dengan prinsip pembelajaran *student centered* dan *self-regulated learning* (Sabandar, 2010; Song, 2015). Sehingga proses pembelajaran yang berlangsung pada hakikatnya haruslah memenuhi kebutuhan siswa untuk berpikir secara mandiri. Menurut NCTM, “*All students should have the opportunity and the support necessary to learn significant mathematics with depth and understanding*” (Wilson, Mojica & Confrey, 2013, hlm. 103). Proses pembelajaran ini tidak akan terlaksana dengan baik jika hambatan-hambatan yang ada tidak direduksi terlebih dahulu.

Hal utama yang perlu diperhatikan pendidik agar proses pembelajaran berlangsung sesuai tujuan yang ingin dicapai adalah pada pengembangan materi ajarnya. Menurut Suryadi (2016, hlm. 141), permasalahan materi ajar penting untuk dikaji dalam konteks pembelajaran. Mewarisi materi ajar yang ada serta menggunakannya tanpa pengkajian lebih lanjut secara mendalam dapat menciptakan pelestarian masalah tanpa menyadarinya sebagai masalah. Sebagai contoh, materi ajar yang terkait dengan persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran terbukti memunculkan hambatan belajar (*learning obstacle*).

Berdasarkan penjelasan tersebut, maka penting untuk dirancang kembali suatu materi ajar baru atau sering disebut dengan desain didaktis konsep persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran yang dapat mereduksi hambatan belajar yang telah terjadi. Desain pembelajaran yang dibuat haruslah berlandaskan pada prinsip *student centered* yang mengarah pada *actual*

development dan *potential development* siswa (Suryadi, 2010, hlm 59) serta membentuk sikap kemandirian pada siswa. Salah satu kerangka berpikir yang dapat memfasilitasi hal tersebut adalah *Didactical Design Research* (DDR).

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai “Desain Didaktis Persamaan Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran untuk SMA berdasarkan *Learning Obstacle*”.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dikemukakan, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pengembangan desain didaktis awal berdasarkan analisis *Learning Obstacle* (LO) pada pembelajaran persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran?
2. Bagaimana implementasi desain didaktis awal ditinjau dari respon siswa yang muncul?
3. Bagaimana dampak dari implementasi desain didaktis awal terhadap *Learning Obstacle* (LO) pada pembelajaran persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran?
4. Bagaimana pengembangan desain didaktis revisi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran berdasarkan analisis *Learning Obstacle* (LO)?

C. Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, maka batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Penyusunan desain didaktis awal dalam pembelajaran persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran di Sekolah Menengah Atas (SMA) mempertimbangkan *learning obstacle* dan hasil repersonalisasi serta rekonstruksi awal.
2. Penyusunan desain didaktis revisi dalam pembelajaran persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran di Sekolah Menengah Atas (SMA) didasarkan hasil implementasi desain didaktis awal.

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan, maka tujuan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Mengetahui pengembangan desain didaktis awal berdasarkan analisis situasi didaktis pada pembelajaran persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran
2. Mengetahui implementasi desain didaktis awal ditinjau dari respon siswa yang muncul
3. Mengetahui dampak dari implementasi desain didaktis awal berdasarkan analisis metapedadidaktik pada pembelajaran persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran
4. Mengetahui desain didaktis revisi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran berdasarkan analisis retrospektif

E. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Bagi peserta didik, dapat lebih memahami konsep persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran dalam pembelajaran matematika.
2. Bagi guru, menjadi motivasi untuk melakukan proses pembelajaran matematika berdasarkan karakteristik dan proses berpikir peserta didik.
3. Bagi peneliti lain, dapat mengetahui desain didaktis alternatif materi persamaan lingkaran dan garis singgung lingkaran pada pembelajaran matematika di Sekolah Menengah Atas (SMA).