BAB III

MODEL FUNGSI TRANSFER MULTIVARIATE PADA DERET BERKALA MUSIMAN

Model fungsi transfer multivariat pada deret berkala pola musiman adalah penggabungan beberapa karakteristik dari model *ARIMA* univariat pola musiman dan analisis regresi berganda, sehingga menjadi suatu model yang menggabungkan pendekatan deret berkala pola musiman dengan pendekatan kausal. Model fungsi transfer pola musiman ini memodelkan deret berkala output (Y_t) yang diperkirakan akan dipengaruhi oleh beberapa deret berkala input (X_t), dan input-input lainnya yang digabungkan dalam satu kelompok sebagai faktor gangguan (*noise)* N_t. Seluruh sistem tersebut adalah sistem yang dinamis, dengan kata lain deret input X_t memberikan pengaruh kepada deret output melalui fungsi transfer, yang mendistribusikan dampak X_t melalui beberapa periode waktu yang akan datang.

3.1 Deret Berkala Pola Musiman

Menurut Makridakis dkk. (1999, hlm.356), musiman merupakan suatu pola yang berulang-ulang dalam selang waktu yang tetap. Apabila pada deret memperlihatkan suatu pola musim tertentu secara konsisten, maka koefisien autokorelasi dengan lag 12 bulan untuk data bulanan dan lag 4 untuk data kuartal akan mempunyai nilai positif yang tinggi yang memperlihatkan adanya pengaruh musiman. Deret berkala pola musiman memiliki karakteristik yang ditunjukkan dengan adanya korelasi beruntun yang kuat pada jarak semusim, yaitu waktu yang berkaitan dengan banyak observasi per periode musim. Metode peramalan dengan adanya pola musiman adalah dekomposisi, *exponensial smoothing winter*, dan *seasonal Autoregresive Integrated Moving Average* (SARIMA)

3.1.1 *Seasonal Autoregresive Integrated Moving Average* (SARIMA)

Secara umum Z_t didalamnya mengandung korelasi periode yang mewakili korelasi antara ...$Z_{t-2}, Z_{t-1}, Z_t, Z_{t+1}, \ldots$. Box jenkins mengusulkan bahwa korelasi antara observasi dalam periode musim dapat dikenal dengan anggapan bahwa input gerakan pada ARIMA musimam tidak independen, melainkan beruntun korelasi. Diketahui bahwa Z_t dihasilkan oleh model pola musiman :

$$\varphi_P(B^g)\,(1-B^g)^D Z_t = \vartheta_Q(B^g)\epsilon_t \quad (3.1)$$

dengan ϵ_t merupakan input gerakan non musiman yang dihasilkan oleh proses ARIMA, dengan proses ARIMA yang memiliki bentuk umum yaitu :

$$\phi_p(B)(1-B)^d\epsilon_t = \theta_q(B)\,a_t \quad (3.2)$$

Apabila persamaan (3.1) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2) maka diperoleh bentuk model ARIMA musiman yang dapat dinyatakan sebagai SARIMA $(\mathrm{p,d,q})(\mathrm{P,D,Q}\,)^g$ yang berbentuk:

$$\phi_p(B)\varphi_P(B^g)(1-B)^d(1-B)^D Z_t = \theta_q(B)\vartheta_Q(B^g)a_t \quad (3.3)$$

$$Z_t = \frac{\theta_q(B)\vartheta_Q(B^g)a_t}{\phi_p(B)\varphi_P(B^g)(1-B)^d(1-B)^D}$$

dengan

$\phi_p(B) = (1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p)$ merupakan operator AR(p),

$\theta_q(B) = (1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q)$ merupakan operator MA(q),

$\varphi_P(B^g) = (1-\varphi_1 B^g-\varphi_2 B^{2g}-\cdots-\varphi_P B^{Pg})$ merupakan operator AR(P) pola musiman,

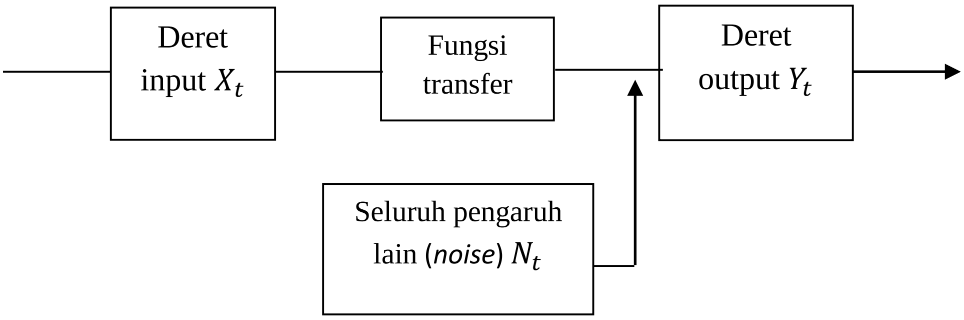
$\vartheta_Q(B^g) = (1-\vartheta_1 B^g-\vartheta_2 B^{2g}-\cdots-\vartheta_Q B^{Qg})$ merupakan operator MA(Q) pola musiman,

g adalah banyak periode per musim.

3.2 Model Fungsi Transfer

Model fungsi transfer merupakan model yang berbeda dengan ARIMA, karena model ARIMA hanya menghubungkan deret dari data masa lalu, sementara model fungsi transfer menghubungkan deret dari data masa lalu dan menghubungkan deret tersebut dengan deret berkala lainnya. Tujuan model fungsi transfer adalah untuk menetapkan model sederhana, yang menghubungkan Y_t dengan X_t dan N_t

Konsep fungsi transfer ditunjukan pada Gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1 Konsep Fungsi Transfer

Menurut Makridakis dkk. (1999, hlm.448), bentuk umum model fungsi transfer tunggal adalah:

$$Y_t = v(B)X_t + N_t \tag{3.4}$$

dengan

Y_t menyatakan deret output,

X_t menyatakan deret input,

N_t menyatakan pengaruh kombinasi dari seluruh faktor yang mempengaruhi Y_t,

$v(B) = (v_0 + v_1B + v_2B^2 + \cdots + v_kB^k)$ fungsi transfer dengan k adalah orde fungsi transfer.

Deret input dan output dari persamaan (3.4) dapat ditransformasikan, dalam hal ini dengan melakukan penyelisihan supaya model stasioner. Untuk membedakan data mentah Y_t, X_t, N_t pada persamaan (3.4) dengan data yang telah ditransformasi, data hasil transformasi ditulis menggunakan huruf kecil x_t, y_t, n_t.

Orde dari fungsi transfer adalah k (menjadi orde tertinggi untuk proses penyelisihan) dan nilainya terkadang dapat lebih besar dari banyaknya lag pada korelasi silang. Oleh karena itu nilai k tidak terlalu dibatasi sehingga model fungsi transfer dapat ditulis sebagai :

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)}x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)}a_t \tag{3.5}$$

dengan $v(B) = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)}$ dan $n_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}a_t$

dimana

$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \cdots - \omega_s B^s$$
$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \cdots - \delta_r B^r,$$
$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q,$$
$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p,$$

y_t merupakan nilai Y_t yang telah ditransformasi dengan penyelisihan,

x_t merupakan nilai X_t yang telah ditransformasi dengan penyelisihan,

a_t merupakan nilai gangguan random,

r,s,p,q,b menyatakan konstanta.

Pada fungsi transfer multivariat terdapat beberapa variabel input x_t yang dimasukkan pada bentuk pemodelan. Bentuk umum persamaan fungsi transfer multivariat sebagai berikut:(Wei, 2006, hlm.362)

$$y_t = \sum_{j=1}^{k} v_j(B)x_{jt} + n_t \tag{3.6}$$

$v_j(B) = \frac{\omega_j(B)B^{bj}}{\delta_j(B)}$ fungsi transfer ke-j untuk deret input x_{jt}, j = 1,2,…,k.

Persamaan (3.6) dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$$y_t = \sum_{j=1}^{k} \left[\delta_j(B)\right]^{-1} \omega_j(B)B^{bj}x_{jt} + \left[\phi_p(B)\right]^{-1}\theta_q(B)a_t \tag{3.7}$$

dengan

y_t merupakan variabel dependen,

x_{jt} merupakan variabel independen ke-j,

$\omega_j(B)$ merupakan operator *moving average* orde s_j untuk variabel ke-j,

$\delta_j(B)$ merupakan operator *autoregressive* orde r_j untuk variabel ke-j,

$\theta_q(B)$ merupakan operator *moving average* orde q,

$\phi_p(B)$ merupakan operator *autoregressive* orde p,

a_t merupakan nilai gangguan acak.

Apabila deret input x_{it} dan x_{jt} tidak berkorelasi untuk i ≠ j, maka analisis dan perhitungannya sama seperti model fungsi transfer input tunggal. Sedangkan untuk deret multivariat x_{jt} dengan i ≠ j yang saling berkorelasi perlu dilakukan analisis korelasi silang (*cross correlation*) antar deret berkala untuk mengetahui deret mana yang harus dikeluarkan dari model.

3.3 Prosedur Pembentukan Model Fungsi Transfer Multivariat

Terdapat empat tahap utama dalam prosedur pembentukan model fungsi transfer multivariat untuk deret input (X_t) dan deret output (Y_t) yaitu:
(Makridakis dkk, 1999, hlm.450)

3.3.1 Tahap Pertama : Identifikasi Bentuk Model

1) Mempersiapkan deret input dan deret output tunggal

Pada tahap ini dilakukan identifikasi kestasioneran deret input dan deret output. Apabila data tidak stasioner dalam rata-rata maka untuk menghilangkan ketidakstasionerannya adalah dengan melakukan penyelisihan dengan cara mentransformasikan deret-deret input dan output. Transformasi yang biasa digunakan : (Makridakis dkk, 1999, hlm.451)

$$(1-B)X_t = x_t$$
$$(1-B)Y_t = y_t \tag{3.8}$$

2) Pemutihan deret input

Pemutihan deret input bertujuan untuk membuat deret input menjadi lebih dapat diatur dengan menghilangkan seluruh pola yang diketahui supaya yang tertinggal hanya *white noise*. Pemutihan deret input x_t dengan proses *ARIMA* $(p_x, 0, q_x)$ dapat didefinisikan dengan :

$$\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)\alpha_t \tag{3.9}$$

sehingga, deret α_t menjadi:

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}x_t = \alpha_t \tag{3.10}$$

3) Pemutihan deret output

Fungsi transfer yang akan ditetapkan yaitu memetakan x_t kedalam y_t. Jika suatu transformasi pemutihan diterapkan untuk x_t maka harus menerapkan transformasi yang sama untuk y_t. Transformasi pada y_t tidak harus mengubah y_t menjadi *white noise*, tetapi deret y_t yang telah diputihkan menjadi deret β_t, adalah :

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} y_t = \beta_t \qquad (3.11)$$

4) Perhitungan korelasi silang dan autokorelasi deret input dan deret output yang telah diputihkan.

Kovarian antara dua variabel X dan Y ditetapkan sebagai berikut:

$$C_{xy} = E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\}$$

Bentuk ini dapat digunakan untuk menetapkan dua varian yaitu C_{xx} dan C_{yy}. Dengan memasang subskrip waktu di bawah variabel X dan Y dan dengan memisalkan k sebagai *time lag* (beda waktu pada setiap pasangan data). Kovarians silang $C_{xy}(k)$ dan $C_{yx}(k)$ adalah:

$$C_{xy}(k) = E\{(X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y})\} \qquad (3.12)$$

$$C_{yx}(k) = E\{(Y_t - \bar{Y})(X_{t+k} - \bar{X})\} \qquad (3.13)$$

dengan $k = 0,1,2,3, \ldots$ dan setererusnya. Persamaan (3.12) dan (3.13) didefinisikan sebagai ekspektasi. Dalam prakteknya, taksiran kovarians-silang dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}) \qquad (3.14)$$

$$C_{yx}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y})(X_{t+k} - \bar{X}) \qquad (3.15)$$

Kovarians silang dapat diubah menjadi korelasi silang dengan membagi kovarians tersebut oleh dua standar deviasi sebagai berikut:

$$r_{xy}(k) = \hat{\rho}_{XY}(k) = \frac{C_{XY}(k)}{\sqrt{C_{XX}(0) C_{YY}(0)}} = \frac{C_{xy}(k)}{S_x\, S_y} \qquad (3.16)$$

Dimana k ≥ 0.

Rumus *standar error* berikut digunakan untuk memeriksa apakah $r_{xy}(k)$ berbeda nyata dari nol atau tidak.(Wei, 2006, hlm.330)

$$SE_{r_{xy(k)}} = \frac{1}{\sqrt{n-k}} \qquad (3.17)$$

Apabila pada uji korelasi silang $r_{xy(k)}$, x_t tidak saling berkorelasi dengan y_t maka x_t merupakan *white noise* dengan korelasi silang yang diharapkan adalah nol, dengan k = 0 sehingga $SE_{r_{xy(k)}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, tetapi apabila uji korelasi silang $r_{xy(k)}$, x_t berkorelasi dengan y_t maka x_t merupakan indikator penentu terhadap y_t dengan k > 0.

Pada model fungsi transfer multivariat perhitungan korelasi silang pada masing-masing input x terhadap output y digunakan untuk mengetahui nilai (r, s, b) yang diidentifikasi dari plot korelasi silang. Setelah diperoleh nilai (r, s, b) pada masing-masing input, lalu dilakukan korelasi silang serentak antara nilai y terhadap seluruh variabel inputnya.

5) Penaksir langsung bobot respon impuls

Setelah menentukan korelasi silang, langkah selanjutnya yaitu melakukan penaksiran langsung bobot respon impuls. Bobot respon impuls ini berguna untuk menghitung deret *noise*. Untuk penaksiran bobot respon impuls secara langsung rumusnya adalah sebagai berikut:

$$v_k = \frac{r_{\alpha\beta}(k) S_\beta}{S_\alpha} \tag{3.18}$$

dengan

$r_{\alpha\beta}(k)$ menyatakan nilai dari korelasi silang antara α_t dan β_t pada lag ke-k,

S_β menyatakan standar deviasi dari deret output yang telah diputihkan,

S_α menyatakan standar deviasi dari deret input yang telah diputihkan.

6) Penetapan (r, s, b) untuk model fungsi

Tiga parameter kunci dalam model fungsi transfer adalah (r, s, b), r menunjukkan derajat fungsi $\delta(B)$, s menunjukkan derajat fungsi $\omega(B)$ dan b menunjukkan keterlambatan yang dicatat pada subskrip dari x_{t-b} pada persamaan

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \alpha_t \tag{3.19}$$

Berikut ini beberapa aturan yang dapat digunakan untuk menduga nilai r, s, b dari suatu fungsi transfer:

a. Nilai b menyatakan bahwa y_t tidak dipengaruhi oleh x_t sampai periode $t + b$. Besarnya b dapat ditentukan dari lag yang pertama kali signifikan pada plot korelasi silang. Nilai ini merupakan nilai yang paling mudah ditentukan apabila korelasi silang diperoleh dari $r_{\alpha\beta}(0) = r_{\alpha\beta}(1) = r_{\alpha\beta}(2) = 0$ tetapi $r_{\alpha\beta}(3) = 0{,}5$ maka dapat ditentukan $b = 3$, dengan kata lain terdapat tiga periode sebelum runtun waktu input α mulai mempengaruhi runtun waktu output β.

b. Nilai s menyatakan seberapa lama deret output (y_t) terus menerus dipengaruhi oleh $x_{t-b-1}, x_{t-b-2}, \dots, x_{t-b-s}$ sehingga dapat dikatakan bahwa nilai s adalah bilangan pada lag plot korelasi silang sebelum terjadinya pola menurun.

c. Nilai r menunjukkan bahwa y_t dipengaruhi oleh nilai masa lalunya yaitu $y_{t-1}, \dots, y_{t-r}$.

   $r = 0$, bila ada beberapa lag plot pada korelasi silang yang terpotong.

   $r = 1$, bila plot pada korelasi silang menunjukan suatu pola eksponensial menurun.

   $r = 2$, bila plot pada korelasi silang menunjukan suatu pola eksponensial menurun dan pola sinus.

Berikut beberapa bentuk fungsi transfer yang umum digunakan dalam peramalan: (Wei, 2006, hlm.325)

Tabel 3.1 Model Fungsi Transfer dengan $r = 0$

(r, s, b)	Fungsi Transfer
(0,0,2)	$v(B)x_t = \omega_0 x_{t-2}$
(0,1,2)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1)x_{t-2}$
(0,2,2)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)x_{t-2}$

Tabel 3.2 Model Fungsi Transfer dengan $r = 1$

(r, s, b)	Fungsi Transfer
(1,0,2)	$v(B)x_t = \dfrac{\omega_0}{(1-\delta_1 B)} x_{t-2}$
(1,1,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1-\delta_1 B)} x_{t-2}$
(1,2,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1-\delta_1 B)} x_{t-2}$

Tabel 3.3 Model Fungsi Transfer dengan $r = 2$

(r, s, b)	Fungsi Transfer
(2,0,2)	$v(B)x_t = \dfrac{\omega_0}{(1-\delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$
(2,1,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1-\delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$
(2,2,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1-\delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$

7) Penaksir awal deret gangguan (n_t)

Bobot respon impuls diukur secara langsung dan ini memungkinkan dilakukannya perhitungan nilai taksiran dari deret gangguan n_t,

$$\begin{aligned} n_t &= y_t - \hat{y}_t \\ &= y_t - \frac{\hat{\omega}(B)}{\hat{\delta}(B)} B^k x_t \\ &= y_t - \hat{v}(B) x_t \end{aligned}$$

$$= y_t - v_0 x_t - v_1 x_{t-1} - v_2 x_{t-2} - \cdots - v_k x_{t-k} \qquad (3.20)$$

8) Penetapan (p_n, q_n) untuk model *ARIMA* dari deret gangguan n_t

Setelah menggunakan persamaan (3.21), lalu nilai-nilai n_t dianalisis dengan cara *ARIMA* untuk menemukan model *ARIMA* yang tepat sehingga diperoleh nilai p_n dan q_n. Dengan cara ini fungsi $\phi_n(B)$ dan $\theta_n(B)$ untuk deret gangguan n_t dapat diperoleh untuk mendapatkan persamaan:

$$\phi_n(B) n_t = \theta_n(B) a_t \qquad (3.21)$$

3.3.2 Tahap Kedua : Penaksiran Parameter Pada Model Fungsi Transfer

Setelah model ARIMA diperoleh dari deret noise, maka akan diperoleh hasil dari suatu model fungsi transfer.

Model fungsi transfer yang telah ditentukan secara tentatif adalah :

$$Y_t = v(B) X_t + N_t$$

Terdapat sebuah contoh untuk mengaplikasikan model fungsi transfer dan ARIMA. Misal digunakan model fungsi transfer (r,s,b) = (2,2,2) dan ARIMA (p,d,q) = (2,0,1), maka bentuk model fungsi transfernya adalah :

$$y_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2} + \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)} a_t \qquad (3.22)$$

Pada tahap ini akan menaksir nilai-nilai ω_n, δ_n, ϕ_n, dan θ_n, yang didapat dengan cara mensubstitusikan persamaan khusus seperti berikut:

$$v_j = 0 \text{ untuk } j < b$$

$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} + \omega_0 \text{ untuk } j = b \qquad (3.23)$$

$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} + \omega_{j-b} \text{ untuk } j = b+1, \ldots, b+s$$

$$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} \text{ untuk } j > b+s$$

Jika rumus ini digunakan dengan menggunakan contoh dari model fungsi transfer pada persamaan (3.23) dengan nilai (r, s, b) = (2,2,2), maka akan menghasilkan rumus:

$$v_0 = 0 \qquad (1)$$

$$v_1 = 0 \qquad (2)$$

$$v_2 = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_0 + \omega_0 \qquad (3)$$

$$v_3 = \delta_1 v_2 + \delta_2 v_1 - \omega_1 \quad (4)$$
$$v_4 = \delta_1 v_3 + \delta_2 v_2 - \omega_2 \quad (5)$$
$$v_5 = \delta_1 v_4 + \delta_2 v_3 \quad (6)$$
$$v_6 = \delta_1 v_5 + \delta_2 v_4 \quad (7)$$
$$v_7 = \delta_1 v_6 + \delta_2 v_5 \quad (8)$$

dengan menggunakan pembobotan impuls, maka akan didapat nilai-nilai parameter yang diperlukan dengan cara mensubstitusikannya.

3.3.3 Tahap Ketiga : Pemeriksaan Diagnosis Model Fungsi Transfer Tunggal

Pada tahap ini diperlukan pengecekan deret gangguan n_t dan hubungan deret n_t dengan α_t. Deret n_t yang sudah didapat melalui tahap 1 dan 2, secara umum bentuk model fungsi transfer adalah:

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \tag{3.24}$$

Bila persamaan (3.25) dikalikan dengan $\delta(B)\phi(B)$ diperoleh :

$$\delta(B)\phi(B)y_t = \omega(B)\phi(B)x_{t-b} + \delta(B)\theta(B)a_t \tag{3.25}$$

a_t dapat diekspresikan sebagai fungsi dari berbagai macam nilai y, nilai x dan nilai a sebelumnya.

Berikut adalah contoh tahap penguraian bentuk a_t, misal model fungsi transfer yang digunakan adalah model fungsi transfer (r,s,b) = (1,1,1) dan model ARIMA (p,d,q) = (1,0,1), maka bentuk model fungsi transfernya adalah :

$$y_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1 - \delta_1 B)} x_{t-1} + \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)} a_t$$

Lalu kalikan setiap parameter dengan $(1 - \delta_1 B)(1 - \phi_1 B)$ diperoleh:

$$(1 - \delta_1 B)(1 - \phi_1 B)y_t = (\omega_0 - \omega_1 B)(1 - \phi_1 B)x_{t-1} + (1 - \theta_1 B)(1 - \delta_1 B)a_t$$

Dengan melakukan penguraian perkalian diatas, maka y_t menjadi :

$$(1 - \phi_1 B - \delta_1 B + \delta_1 \phi_1 B^2)y_t = (\omega_0 - \omega_0 \phi_1 B - \omega_1 B + \omega_1 \phi_1 B^2)x_{t-1} + (1 - \delta_1 B - \theta_1 B + \theta_1 \delta_1 B^2)\, a_t$$

$$y_t - (\phi_1 + \delta_1)y_{t-1} + (\delta_1 \phi_1)y_{t-2} = (\omega_0)x_{t-1} - (\omega_0 \phi_1 + \omega_1)x_{t-2} + (\omega_1 \phi_1)x_{t-3} + a_t - (\delta_1 + \theta_1)a_{t-1} + (\theta_1 \delta_1)a_{t-2}$$

$$y_t = (\phi_1 + \delta_1)y_{t-1} - (\delta_1\phi_1)y_{t-2} + (\omega_0)x_{t-1} - (\omega_0\phi_1 + \omega_1)x_{t-2} + (\omega_1\phi_1)x_{t-3} + a_t - (\delta_1 + \theta_1)a_{t-1} + (\theta_1\delta_1)a_{t-2} \quad (3.26)$$

Persamaan (3.27) dapat digunakan untuk peramalan, tetapi terdapat parameter yang harus dicari yaitu a_t, sehingga diperoleh nilai a_t dari persamaan (3.27) yaitu:

$$a_t = y_t - (\phi_1 + \delta_1)y_{t-1} + (\delta_1\phi_1)y_{t-2} - (\omega_0)x_{t-1} + (\omega_0\phi_1 + \omega_1)x_{t-2} - (\omega_1\phi_1)x_{t-3} + (\delta_1 + \theta_1)a_{t-1} - (\theta_1\delta_1)a_{t-2} \quad (3.27)$$

3.3.4 Tahap Keempat : Peramalan Model Fungsi Transfer Multivariat

Peramalan fungsi transfer multivariat dilakukan dengan cara memodelkan seluruh variabel yang sudah diidentifikasi sebelumnya secara serentak. Identifikasi nilai-nilai bobot respon impuls dan korelasi silang dijadikan dasar dalam pemodelan yang menghasilkan fungsi transfer multivariat. Cara yang dilakukan dalam model fungsi transfer multivariat sama halnya yang dilakukan pada model input tunggal. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut :

1) Mengidentifikasi deret input dan output untuk mengetahui kestasioneran dan menentukan orde model *ARIMA*.

2) Menghitung estimasi parameter model *ARIMA* yang sesuai untuk masing-masing deret input. Lalu dilakukan uji untuk mengetahui model memenuhi proses *white noise* atau belum.

3) Dilakukan korelasi silang untuk masing-masing deret input terhadap deret output. Korelasi silang berguna untuk menghitung deret *noise* dan juga menentukan orde model fungsi transfer yakni dengan mengidentifikasi plot korelasi silang.

4) Menentukan nilai r, s, b pada masing-masing deret dan menghitung nilai gangguan (n_t) sehingga model fungsi transfer input tunggal selesai terbentuk. Tahapan tersebut merupakan pembentukan model fungsi transfer input tunggal.

Sedangkan untuk model fungsi transfer multivariat dilakukan dengan cara :

5) Nilai r, s, b masing-masing deret input yang telah didapat lalu dilakukan estimasi secara serentak.

6) nilai gangguan gabungannya didapat dari rumus

$$n_t = y_t - \hat{y}_t$$

$$= y_t - \sum_{k=0}^{m} v_k(B)x_{t-k} \tag{3.28}$$

Nilai-nilai (r, s, b) yang telah diidentifikasi dalam model fungsi transfer input tunggal dijumlahkan sehingga model multivariat menjadi

$$y_t = \sum_{j=1}^{m} \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} B^{bj} x_{jt} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \tag{3.29}$$

atau

$$y_t = \sum_{i=1}^{k} v_i(B)x_{it} + n_t$$

3.4 Model Fungsi Transfer Pola Musiman

Pada subbab sebelumnya tidak disebutkan bahwa model fungsi transfer mengandung pola tertentu sehingga membuat deret berkala menjadi tidak stasioner, dimana ini merupakan perluasan dari model fungsi transfer yaitu model fungsi transfer dengan deret berkala pola musiman, deret berkala pada subbab (3.1.1) memiliki bentuk ARIMA (p, d, q) menjadi SARIMA $(p, d, q)(P, D, Q)^g$, sehingga perluasan dari model fungsi transfer (3.5) untuk model fungsi transfer bivariat dengan pola musiman menjadi : (Chiogna, M, 2011, hlm.3)

$$Y_t = \frac{\omega(B)\Omega(B^g)}{\delta(B)\Delta(B^g)} X_{t-b} + \frac{\theta(B)\vartheta(B^g)}{(1-B)^d(1-B^g)^D\phi(B)\varphi(B^g)} a_t \tag{3.30}$$

dimana

$$\Omega(B^g) = \Omega_0 - \Omega_1 B^g - \Omega_2 B^{2g} - \cdots - \Omega_S B^{Sg},$$

$$\Delta(B^g) = 1 - \Delta_1 B^g - \Delta_2 B^{2g} - \cdots - \Delta_R B^{Rg},$$

$$\vartheta(B^g) = 1 - \vartheta_1 B^g - \vartheta_2 B^{2g} - \cdots - \vartheta_Q B^{Qg},$$

$$\varphi(B^g) = 1 - \varphi_1 B^g - \varphi_2 B^{2g} - \cdots - \varphi_P B^{Pg}.$$

Sehingga untuk model fungsi transfer multivariat (3.7) dengan pola musiman, berbentuk:

$$Y_t = \sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j(B)\Omega_j(B^g)B^{bj}}{\delta_j(B)\Delta_j(B^g)} X_j(t) + \frac{\theta(B)\vartheta(B^g)}{(1-B)^d(1-B^g)^D\phi(B)\varphi(B^g)} a_t \tag{3.31}$$

Dengan :

$\Omega_j(B^g)$ merupakan operator *moving average* orde S_j untuk variabel ke-j,

$\Delta_j(B^g)$ merupakan operator *autoregressive* orde R_j untuk variabel ke-j,

$\vartheta_Q(B^g)$ merupakan operator *moving average* orde Q,

$\varphi_P(B^g)$ merupakan operator *autoregressive* orde P,

P,Q,R,S adalah konstanta,

g adalah banyak periode per musim.