BAB III

VALUE AT RISK (*VaR*) DAN PENDEKATAN COPULA

3.1 *Value at Risk* (*VaR*)

Salah satu aspek yang sangat penting dalam analisis resiko adalah penghitungan *Value at Risk* atau yang selanjutnya disingkat dalam *VaR*. *VaR* adalah suatu metode yang cukup tepat dan banyak digunakan untuk mengukur resiko. Berikut merupakan beberapa definisi umum *VaR*.

Menurut Brook (2008: 571) *VaR* didefinisikan sebagai berikut:

“is an estimation of the probability of likely losses which could arise from changes in market prices”

sedangkan menurut Manganeli (2001: 6) *VaR* adalah:

“the maximum potential loss in value of a portfolio of financial instruments with a given probability over a certain horizon”.

Maka dapat disimpulkan *VaR* adalah estimasi kerugian maksimum yang mungkin dialami suatu portofolio dalam interval waktu tertentu dengan tingkat kepercayaan tertentu.

3.2 Konsep Dasar *VaR*

Pada dasarnya konsep dalam *VaR* sudah ada sejak lama, akan tetapi sistematis *VaR* untuk berbagai resiko finansial baru-baru ini dikembangkan. Dalam bahasa yang mudah dipahami *VaR* digunakan oleh investor untuk menghitung kerugian maksimum yang akan diperoleh dalam tingkat kepercayaan sebesar $1 - \alpha$ dalam kurun waktu atau periode tertentu. Roy (2011:7) mengatakan bahwa terdapat tiga cara untuk menghitung *VaR* yaitu, simulasi *historical*, varian-kovarian dan simulasi Monte Carlo. Akan tetapi, yang digunakan pada skripsi ini adalaha simulasi Monte Carlo.

Secara teknis *VaR* dengan tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$dinyatakan sebagai bentuk kuantil ke- α dari distribusi return. *VaR* dapat ditentukan melalui fungsi kepadatan peluang dari nilai return di masa depan, yang dinotasikan dengan $f(R)$ dengan R adalah return. Pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ akan ditentukan nilai kemungkinan terburuk return yaitu R^*, sehingga peluang munculnya return melebihi R^* adalah $1-\alpha$. Dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_{R^*}^{\infty} f(R)\, dR = 1-\alpha \qquad \ldots(3.1)$$

sedangkan peluang terdapatnya return yang kurang dari atau sama dengan R^* atau yang dinotasikan dengan p adalah sebesar α.

$$p = P(R \leq R^*) = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)\, dR = \alpha \qquad \ldots(3.2)$$

Jika investasi awal kurs dinotasikan W_0 maka nilai kurs pada akhir suatu periode waktu dinotasikan $W = W_0(1+R)$ dan jika nilai kurs paling rendah adalah $W^* = W_0(1+R^*)$ pada tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$, maka *VaR* pada tingkat kepercayaann $(1-\alpha)$ dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$VaR_{(1-\alpha)} = -W_0 R^* \qquad \ldots(3.3)$$

Pada umumnya nilai R^* adalah negatif, dan dapat dinotasikan dengan $-|R^*|$, selanjutnya nilai R^* dapat dikaitkan dengan standar normal deviasi z_α dengan formulasi:

$$-z_\alpha = \frac{-|R^*| - \mu}{\sigma} \text{ atau } R^* = \mu - z_\alpha \sigma \qquad \ldots(3.4)$$

3.3 *VaR* dengan Simulasi Monte Carlo

Penggunaan metode simulasi Monte Carlo untuk mengukur risiko telah dikenalkan oleh Boyle pada tahun 1977. Dalam mengestimasi nilai *VaR* baik pada aset tunggal maupun portofolio, simulasi Monte Carlo mempunyai beberapa jenis algoritma. Namun pada intinya adalah melakukan simulasi dengan membangkitkan bilangan random berdasarkan karakteristik dari data yang akan dibangkitkan, yang kemudian digunakan untuk mengestimasi nilai *VaR*-nya.

3.4 Teori Copula

Copula merupakan metode dependensi yang akhir-akhir ini sering digunakan. Diperkenalkan pertama kali pada tahun 1959 oleh Sklar, tapi baru pertama kali digunakan dalam dunia keuangan pada tahun 1999 oleh Embrechts. Pada dasarnya copula merupakan suatu fungsi yang memungkinkan untuk menggabungkan struktur dependensi tertentu. Copula memberikan cara yang tepat untuk membentuk distribusi gabungan dari dua atau lebih variabel acak. (Solikha, 2012:15)

Sebelum membahas mengenai copula lebih lanjut, maka akan dibahas beberapa definisi yang berhubungan dengan copula, yaitu sebagai berikut:

Definisi 3.1 Persegi Panjang (Nelsen, 2006:8)

Suatu persegi panjang atau interval di $\overline{\mathbb{R}}^2$ merupakan perkalian silang dari dua interval di $\overline{\mathbb{R}}$ dalam bentuk

$$B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2], a \leq b \qquad \ldots(3.5)$$

dimana $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Himpunan dari semua persegi panjang di $\overline{\mathbb{R}}^2$ akan didefinisikan sebagai $\mathfrak{R}^2$. Titik ujung dari persegi panjang B adalah $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2)$, dan (x_2, y_2).

Definisi 3.2 Volume-*H* (Nelsen, 2006:8)

Misalkan $S_1, S_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$ dan $H: \overline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ merupakan fungsi dengan $DomH = S_1 \times S_2$. Misal $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ merupakan persegi panjang dimana $B \subset DomH$. Sehingga, volume-*H* diberikan oleh

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad \ldots(3.6)$$

Jika didefinisikan turunan pertama dari H pada persegi panjang B sebagai

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y) \quad \ldots(3.7)$$

$$\Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1) \quad \ldots(3.8)$$

Maka volum-H dari persegi panjang B merupakan turunan kedua dari H pada persegi panjang B, yaitu

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2}(x, y) \quad \ldots(3.9)$$

Definisi 3.3 fungsi 2-*increasing* (Nelsen, 2006:9)

Misalkan H fungs bernilai real. H dikayakan 2-*increasing* jika $V_H(B) \geq 0$ untuk semua persegi panjang B di $\overline{\mathbb{R}}^2$ dimana titik ujung dari B ada di $DomH$.

Definisi 3.4 Fungsi *Grounded* (Nelsen, 2006:9)

Mialkan S_1, S_2 merupakan subset tak kosong dari $\overline{\mathbb{R}}$ dan $H: \overline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fungsi dengan $DomH = S_1 \times S_2$. Kemudian S_1, S_2 memiliki elemen terkecil masing-masing a, b . Maka H dikatakan fungsi *Grounded* jika

$$H(a, y) = 0 = H(x, b), \forall (x, y) \in S_1 \times S_2 \quad \ldots(3.10)$$

Jika H fungsi *grounded*, maka:

$$V_H(B) = H(x, y), \quad \ldots(3.11)$$

$\forall B = [a, x] \times [b, y] \subset DomH$

Berikut akan diberikan definisi mengenai copula 2-dimensi yang kemudian akan diperumum menjadi copula n-dimensi:

Definisi 3.5 Subcopula (Nelsen, 2006:10)

Sebuah subcopula 2-dimensi merupakan fungsi yang memiliki sifat:

1. $Domain\ C' = S_1 \times S_2$ dimana S_1, S_2 merupakan subset dari $I = [0,1]$.
2. C' *grounded* dan *2-increasing*
3. Untuk setiap $u \in S_1, v \in S_2$

$$C'(u,1) = u \text{ dan } C'(1,v) = v \quad \text{...(3.12)}$$

Perhatikan bahwa untu setiap $(u,v) \in Domain\ C'$ maka $0 \leq C'(u,v) \leq 1$.

Definisi 3.6 Copula Bivariat (Nelsen, 2006:10)

Sebuah copula 2-dimensi (atau selanjutnya disebut dengan 2-copula atau hanya copula) merupakan sebuah 2-subcopula yang domainnnya adalah I^2. Ekivalen dengan copula merupakan fungsi $C: I^2 \to I$ yang memenuhi sifat:

1. Untuk setiap $u, v \in I$ maka

$$C(u,0) = 0 = C(0,v) \quad \text{...(3.13)}$$

dan

$$C(u,1) = u \text{ dan } C(1,v) = v \quad \text{...(3.14)}$$

2. Untuk setiap $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ dimana $u_1 \leq u_2$ dan $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0 \quad 3.15$$

Selanjutnya pertidaksamaan 3.15 ini disebut dengan ketidaksamaan copula

Teorema 3.1 Teorema Sklar (1959)

Misalkan H merupakan fungsi distribusi bersama 2-dimensi dengan distribusi marginal F_1 dan F_2, dengan masing-masing merupakan fingsi distribusi marginal dari X_1 dan X_2. Maka akan ada copula C sedemikian sehingga untuk $x \in \mathbb{R}^n$,

$$H(x_1, x_2) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) \qquad \ldots(3.16)$$

Jika F_1, F_2 kontinu maka C unik, jika F_1 dan F_2 tidak kontiny maka copula C unik pada $Range(F_1) \times Range(F_2)$.

Sebaliknya, jika C adalah copula, F_1, F_2 merupakan fungsi distibusi marginal dari X_1, X_2. Maka terdapat fungsi distribusi gabungan H sedemikian sehinga untuk setiap $x_1, x_2 \in \bar{\mathbb{R}}$ berlaku

$$H(x_1, x_2) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big)$$

Bukti:

Terdapat pada Rhomah (2011:140

3.5 Copula Archimedean

Pertama kali diperkenalkan oleh Ling pada tahun 1965 namun ditemukan pertama kali oleh Sklar dan Schweizer pada tahun 1961. Copula Archimedean merupakan salah satu kelas copula yang paling luas digunakan. Nelsen (2006: 109) mengatakan bahwa copula Archimedean sangat luas aplikasinya disebabkan oleh alasan berikut:

1. dapat dikonstruksi dengan mudah,
2. memiliki sub family yang besar dan bervariasi,
3. banyak sifat-sifat copula dipengaruhi oleh anggota-anggota dari kelas copula ini.

Definisi 3.7 Pseudo-invers (Nelsen, 2006:110)

Diberikan φ, dimana φ merupakan fungsi *non-decreasing* yang memetakan $I{:}\,[0,1] \to [0,\infty]$ sehingga $\varphi(0) = \infty, \varphi(1) = 0$. Pseudo-invers dari φ merupakan fungsi $\varphi^{[-1]}$ dengan $dom\varphi^{[-1]} = [0,\infty]$ dan $range\varphi^{[-1]} = [0,1]$, didefinisikan dengan:

$$\varphi^{[-1]} = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \le t \le \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \le t \le \infty \end{cases}. \qquad \ldots(3.17)$$

$\varphi^{[-1]}$ merupakan fungsi kontinu dan tak naik pada $[0,\infty]$ dan fungsi tak turun pada $[0,\varphi(0)]$ maka $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ pada I dan

$$\varphi\left(\varphi^{[-1]}(t)\right) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \le t \le \infty \end{cases}. \qquad \ldots(3.18)$$

Sehingga jika $\varphi(0) = \infty$ maka $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Definisi 3.8 Copula Archimedean

Sebuah copula dinamakan Archimedean jika dapat ditulis kedalam bentuk:

$$C(u_1, \ldots, u_d) = \varphi^{-1}\big(\varphi(u_1) + \cdots + \varphi(u_d)\big), \qquad \ldots(3.19)$$

Dimana $\varphi(u_i), i = 1, \ldots, d$ merupakan fungsi generator. $\varphi(u)$ merupakan fungsi tidak turun yang memetakan $[0,1]$ ke $[0,\infty]$ sehingga $\varphi(0) = \infty$ dan $\varphi(1) = 0$.

Generator yang berbeda-beda selanjutnya akan menghasilkan beberapa copula Archimedean yang berbeda pula, yaitu copula Clayton dan Gumbel.

3.5.1 Copula Clayton

Generator untuk copula Clayton diberikan oleh

$$\varphi(u) = u^{-a} - 1 \qquad \ldots(3.20)$$

dengan $\varphi^{-1}(t) = (t+1)^{-\frac{1}{a}}, a > 0$. Kemudian, fungsi distribusi kumulatif dari copula Clayton 2-dimensi dinotasikan sebagai berikut:

$$C(u_1, u_2) = [u_1^{-a} + u_2^{-a} - 1]^{-\frac{1}{a}}, a > 0 \qquad \ldots(3.21)$$

3.5.2 Copula Gumbel

Generator dari copula Gumbel adalah

$$\varphi(u) = (-\ln u)^{a} \qquad \ldots(3.22)$$

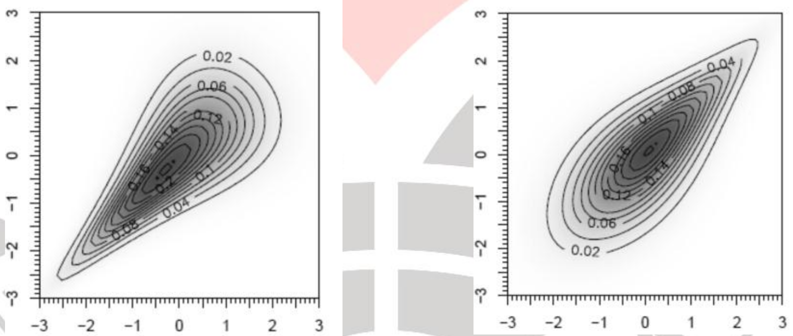
dengan $\varphi^{-1}(t) = \exp\left(-t^{-\frac{1}{a}}\right), a > 1$. Kemudian, fungsi distribusi kumulatif dari copula Gumbel 2-dimensi adalah sebagai berikut:

$$C(u_1, u_2) = \exp\left\{-[(-\ln u_1)^{a} + (-\ln u_2)^{a}]^{\frac{1}{a}}\right\} \qquad \ldots(3.23)$$

$$a > 1$$

3.6 Dependensi

Selanjutnya akan dibahas mengenai dependensi dari copula Archimedean. Gambar 3.1 menunjukkan perilaku tail dependensi yang berbeda dari keluarga copula Archimedean. Dapat dilihat bahwa copula Clayton memiliki tail di bagian bawah dan copula gumbel memiliki tail diatas.(Schölzel, 2008)



(a) (b)

Gambar 3.1
(a) Perilaku tail dependensi dari Copula Clayton dan (b) Perilaku tail dependensi dari Copula Gumbel (Schölzel, 2008)

Kemudian akan dibahas mengenai metode pengukuran dependensi yang tepat untuk copula, yaitu Korelasi *Kendall's Tau*, dimana sebelumnya akan dibahas mengenai konkordan.

3.6.1 Konkordan

Suatu pasangan variable acak adalah konkordan jika besar nilai salah satu cenderung berhubungan dengan besar nilai yang lain dan salah satu nilai yang kecil dengan nilai kecil lainnya.

Definisi 3.9 Konkordan Diskordan (Nelsen, 2006:158)

Misalkan $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ adalah pengamatan dari dua variable acak kontinu (X, Y). $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ konkordan jika $x_i < x_j, y_i < y_j$ atau $x_i > x_j, y_i > y_j$. Untuk (x_i, y_i) dan $x_j, y_j)$ dikatakan diskordan jika $x_i < x_j, y_i > y_j$ atau $x_i > x_j, y_i < y_j$.

Alternative formula: $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ konkordan jika

$$(x_i - x_j)\left(y_i - y_j\right) > 0 \qquad \ldots(3.24)$$

dan sebaliknya, akan diskordan jika $(x_i - x_j)\left(y_i - y_j\right) < 0$.

3.6.2 Korelasi *Kendall's Tau*

Ukuran dependensi Korelasi *Kendall's Tau* untuk populasi dari (X, Y) dengan distribusi H, dapat didefinisikan sebagai perbedaan antara peluang dari konkordan dan peluang dari diskordan untuk dua vector acak yang ndependen $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ dengan masing-masing berdistribusi H, berlaku bahwa

$$\tau_{XY} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$$
$$-P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \qquad \ldots(3.25)$$

Dalam praktiknya, ukuran dependensi Korelasi *Kendall's Tau* dapat dihitung dengan berdasarkan sampel saja. Misalkan terdapat sampel berukuran $n, n \geq 2$, yaitu $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ dari vector acak (X, Y). Setiap pasang sampel, $\{(x_i, y_i), (x_j, y_j)\}, i, j = 2, \ldots, n; i \neq j$ adalah suatu konkordan atau diskordan. Maka akan terdapat $\binom{n}{2}$ pasangan yang berbeda dari sampel yang ada. Misalkan K menyatakan ukuran konkordan dan D menyatakan diskordan, maka nilai Korelasi *Kendall's Tau* berdasarkan sampel dapat didefinisikan sebagai

$$\hat{\tau} = \frac{K - D}{K + D} = \frac{K - D}{\binom{n}{2}} \qquad \ldots(3.26)$$

(Nelsen, 2006:158)

Teorema 3.2 (Nelsen, 2006:159)

Diberikan (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) adalah vector dari variable acak kontinu yang independen dengan fungsi distribusi gabungan H_1, H_2 dengan marginal F untuk X_1, X_2 dan G untuk Y_1, Y_2. C_1, C_2 dinotasikan sebagai copula masing-masing dari $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$. Maka $H_1(x,y) = C_1(F(x), G(y)), H_2(x,y) = C_2(F(x), G(y))$. Diberikan Q yang dinotasikan sebagao selisih dari peluang konkordan dan diskordan dari $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ dimana

$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$.

Maka,

$$Q = Q(C_1.C_2) = 4 \int \int_{I^2}^{\infty} C_2(u,v)dC_1(u,v) - 1 \qquad \ldots(3.27)$$

3.7 Estimasi Parameter

Genest mengatakan bahwa untuk mengkonstruksi parameter dari copula Archimedean untuk kelas Clayton dan Gumbel dapat menggunakan nilai Korelasi *Kendall's Tau*. Khusus pada kasus copula Archimedean nilai Korelasi *Kendall's Tau* dapat dihitung dengan persamaan berikut:

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du \qquad \ldots(3.28)$$

dimana $\varphi(u)$ merupakan generator dari copula keluarga Archimedean.

3.7.1 Estimasi Parameter Copula Clayton

Generator dari copula Clayton adalah $\varphi(u) = u^{-a} - 1$ dengan mensubstistusikannya kedalam persamaan 3.28, maka

$$\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} = \frac{u^{-a} - 1}{-a.u^{-a-1}} = -\frac{1}{a}\frac{(u^{-a} - 1)}{u^{-(a+1)}} \qquad \ldots(3.29)$$

selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\tau_C &= 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}du \\
&= 1 + 4\int_0^1 -\frac{1}{a}\frac{(u^{-a} - 1)}{u^{-(a+1)}}du \\
&= 1 - \frac{4}{a}\int_0^1 \frac{(u^{-a} - 1)}{u^{-(a+1)}}du \\
&= 1 - \frac{4}{a}\int_0^1 (u^{-a} - 1)\,u^{a+1}du \\
&= 1 - \frac{4}{a}\int_0^1 (u - u^{a+1})\,du \\
&= 1 - \frac{4}{a}\left[\int_0^1 u\,du - \int_0^1 u^{a+1}\,du\right] \\
&= 1 - \frac{4}{a}\left\{\left[\frac{1}{2}a^2\right]_0^1 - \left[\frac{1}{a+2}u^{a+2}\right]_0^1\right\} \\
&= 1 - \frac{4}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+2}\right) \\
&= 1 - \frac{4}{a}\left(\frac{a}{2a+4}\right) \\
&= 1 - \frac{2}{a+2}
\end{aligned}$$

$$\tau_C = \frac{a}{a+2} \qquad \ldots(3.30)$$

Sehingga estimasi parameter dari copula Clayton berdasarkan persamaan 3.30 adalah

$$a = \frac{2\tau}{1-\tau} \qquad \ldots(3.31)$$

3.7.2 Estimasi Parameter Copula Gumbel

Generator dari copula Clayton adalah $\varphi(u) = (-\ln u)^a$ dengan mensubstistusikannya kedalam persamaan 3.28, maka

$$\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} = \frac{(-\ln u)^a}{-\frac{a}{t}(\ln u)^{a-1}} = \frac{t}{a}(\ln u)^{a-(a-1)} = \frac{u}{a}\ln u \qquad \ldots(3.31)$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}\tau &= 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}du \\ &= 1 + 4\int_0^1 \frac{u\ln u}{a}du \\ &= 1 + \frac{4}{a}\int_0^1 u\ln u\,du\end{aligned} \qquad \ldots(3.32)$$

Untuk menyelesaikain persamaan 3.32 maka harus menggunakan teknik integral parsial untuk menemukan nilai $\int_0^1 u\ln u\,du$, yaitu:

Misal: $v = \ln u \qquad dw = u$

$$dv = \frac{1}{u}du \qquad \int dw = \int u\,du \Leftrightarrow w = \frac{1}{2}u^2$$

maka

$$\begin{aligned}\int_0^1 vdw &= vw|_0^1 - \int_0^1 w\,dv \\ &= \ln u\left(\frac{1}{2}u^2\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}u^2 . \frac{1}{u}du \\ &= 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 udu \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u^2\Big|_0^1\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\int_0^1 u\ln u\,du = -\frac{1}{4}.$$

Kemudian persamaan ini disubtitusikan ke persamaan 3.32, sehingga akhirnya diperoleh:

$$\tau = 1 + \frac{4}{a}\left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} \qquad \ldots(3.33)$$

Sehingga estimasi parameter dari copula Gumbel berdasarkan persamaan 3.33 adalah

$$a = \frac{1}{1-\tau} \qquad \ldots(3.34)$$