BAB III

METODE FULL *INFORMATION MAXIMUM LIKELIHOOD* (FIML)

3.1 Model Persamaan Simultan

Model persamaan simultan adalah suatu model yang memiliki lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Dalam model persamaan simultan, variabel dependen pada suatu persamaan dapat juga bertindak sebagai variabel independen (penjelas) dalam persamaan lain, yang menyebabkan perbedaan antara variabel dependen dan variabel independen (penjelas) menjadi meragukan. Sehingga suatu variabel dapat memiliki dua peran sebagai variabel independen (penjelas) dan variabel dependen.

Model persamaan simultan mempunyai hubungan dua arah, hal itu dinyatakan oleh Gujarati (2012: 339) bahwa jika terjadi variabel Y ditentukan oleh variabel X, dan sebaliknya variabel X serta ditentukan oleh variabel Y, atau Y merupakan fungsi dari variabel X $\{Y = f(X)\}$ tetapi variabel X merupakan fungsi dari variabel Y $\{X = f(Y)\}$, akan terdapat hubungan dua arah atau hubungan simultan antara Y dan beberapa X yang membuat perbedaan antara variabel dependen dan independen (penjelas) menjadi meragukan.

Koutsoyiannis (1977: 331) juga menyatakan, jika mempunyai hubungan dua arah dalam fungsi yang menyatakan bahwa fungsi tidak dapat diperlakukan secara terpisah sebagai model persamaan tunggal sehingga perlu adanya suatu model yang mencakup permasalahan variabel tersebut.

Sebagaimana dijelaskan kembali oleh Koutsoyianis (1977: 331), bahwa model persamaan simultan adalah sebuah model yang menjelaskan variabel dependen secara bersama-sama. Dalam persamaan simultan

Siti Nurhayati Basuki, 2013
Penaksiran Parameter Pada Persamaan Simultan Menggunakan Metode Full Information Maximum Likelihood (FIML)
Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

terdapat lebih dari satu persamaan, dan tidak dapat menaksir parameter tanpa mempertimbangkan persamaan lainnya yang yang berada pada model.

3.2 Variabel Pada Model Persamaan Simultan

Penyebutan variabel independen (penjelas) dan variabel dependen tidak tepat lagi jika digunakan pada model persamaan simultan, karena variabel dependen bisa juga menjadi variabel independen. Menurut Gujarati (2012: 360), dalam konteks model persamaan simultan, terdapat 2 jenis variabel yaitu:

1. Varibel Endogen

   Variabel-variabel yang nilainya telah ditentukan dalam model, karena nilai-nilai ini diperoleh dengan memasukan nilai variabel lain dalam model sebagai akibat adanya hubungan antarvariabel. Serta variabel endogen dianggap sebagai stokastik. Jumlah variabel endogen sama dengan banyaknya persamaan dalam model.

2. Varibel Predetermine

   Variabel-variabel yang nilainya telah ditentukan diluar model. Variabel predetermine dianggap sebagai nonstokastik. Dalam variabel predetermine ada dua jenis kategori yaitu variabel eksogen baik eksogen sekarang maupun waktu lampau (*lagged exogeneous*), dan variabel endogen waktu lampau (*lagged endogeneous*).

3.3 Bias Persamaan Simultan

Dalam pengaplikasian Metode Kuadrat Terkecil (*Ordinary Least* Square - OLS) untuk persamaan tunggal, yaitu bahwa variabel independen (penjelas) mempunyai hubungan satu arah terhadap variabel dependen dan dalam metode OLS ada salah satu asumsi dari variabelnya yaitu tidak ada korelasi antara variabel independen (penjelas) dengan galat atau

$cov(X, u_i) = 0$. Namun dalam persamaan simultan yang mempunyai hubungan dua arah, maka mengakibatkan adanya korelasi antara variabel independen (penjelas) dengan galat, sehingga penggunaan metode OLS untuk persamaan simultan tidak sesuai.

Jika metode OLS tetap dipaksakan untuk menaksir persamaan simultan, maka hasil dari penaksiran akan bersifat bias dan tak konsisten, yaitu seiring dengan peningkatan ukuran sampel penaksir tidak mendekati nilai taksiran dari nilai sebenarnya. Misalkan diberikan model persamaan simultan, yaitu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{11}\boldsymbol{Y}_2 + \beta_{11}\boldsymbol{X}_1 + \beta_{12}\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{Y}_2 &= \alpha_{20} + \alpha_{21}\boldsymbol{Y}_1 + \beta_{21}\boldsymbol{X}_2 + \beta_{22}\boldsymbol{X}_3 + \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{Y}_3 &= \alpha_{30} + \beta_{31}\boldsymbol{X}_4 + \boldsymbol{u}_3 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$\boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{Y}_2$, dan $\boldsymbol{Y}_3$ merupakan variabel endogen yang bersifat stokastik; $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$, dan $\boldsymbol{X}_4$ merupakan variabel eksogen; serta $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, dan $\boldsymbol{u}_3$ merupakan galat stokastik. Dalam metode OLS terdapat asumsi bahwa variabel indepeden (penjelas) bersifat nonstokastik atau jika stokastik dapat ditunjukan terdistribusi secara independen dari galat. Jika tidak dapat ditunjukan bahwa variabel $\boldsymbol{Y}_2$ adalah stokastik yang terdistribusi secara independen dari $\boldsymbol{u}_1$ dan variabel $\boldsymbol{Y}_1$ adalah stokastik yang terdistribusi secara independen dari $\boldsymbol{u}_2$, maka penggunaan metode OLS akan menghasilkan penaksir yang bias dan tak konsisten.

Untuk memperlihatkan ketidakbiasan penggunaan OLS pada persamaan simultan, misalkan diambil contoh model Keynesian yaitu:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_t \qquad 0 < \alpha_1 < 1 \tag{3.3.2}$$

$$Y_t = C_t + I_t \tag{3.3.3}$$

dimana

C_t = Pengeluaran konsumsi (variabel endogen)
Y_t = Pendapatan (variabel endogen)
I_t = Investasi (variabel eksogen)
u_t = Galat stokastik

$\alpha_0, \alpha_1 =$ Parameter

Diasumsikan bahwa $E(u_t) = 0$, $E(u_t^2) = \sigma^2$, $E(u_t, u_{t+j}) = 0$ (untuk $j \neq 0$), dan $cov(I_t, u_t) = 0$. Akan ditunjukan bahwa antara Y_t dan u_t berkorelasi serta $\hat{\alpha}$ merupakan penaksir yang tak konsisten dari α.

Pertama, akan dibuktikan antara Y_t dan u_t berkorelasi atau $cov(Y_t, \mathrm{u_t}) \neq 0$. Dan Y_t bukan benar-benar variabel eksogen dalam persamaan pertama.

Substitusikan persamaan pertama kedalam persamaan kedua, maka diperoleh

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_t + I_t$$

$$Y_t(1 - \alpha_1) = \alpha_0 + u_t + I_t$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{u_t}{1-\alpha_1} + \frac{I_t}{1-\alpha_1} \tag{3.3.4}$$

I_t merupakan variabel eksogen dan $E(u_t) = 0$, maka

$$E(Y_t) = E\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}\right) + E\left(\frac{u_t}{1-\alpha_1}\right) + E\left(\frac{I_t}{1-\alpha_1}\right)$$

$$E(Y_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{I_t}{1-\alpha_1} \tag{3.3.5}$$

Selanjutnya,

$$Y_t - E(Y_t) = \left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{u_t}{1-\alpha_1} + \frac{I_t}{1-\alpha_1}\right) - \left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + \frac{I_t}{1-\alpha_1}\right)$$

$$Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1-\alpha_1} \tag{3.3.6}$$

dan

$$u_t - E(u_t) = u_t - 0 = u_t \tag{3.3.7}$$

maka,

$$cov(Y_t, \mathrm{u_t}) = E[Y_t - E(Y_t)][u_t - E(u_t)]$$

$$cov(Y_t, \mathrm{u_t}) = E\left[\frac{u_t}{1-\alpha_1}(u_t)\right]$$

$$cov(Y_t, \mathrm{u_t}) = \frac{E[u_t^2]}{1-\alpha_1}$$

$$cov(Y_t, \mathrm{u_t}) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha_1} \neq 0 \tag{3.3.8}$$

Karena σ^2 mempunyai nilai positif, dan dengan syarat $0 < \alpha_1 < 1$, maka $cov(Y_t, \mathrm{u_t}) \neq 0$, sehingga ini berarti ada korelasi antara Y_t dan u_t. Hal ini merupakan pelanggaran asumsi dari OLS.

Kedua, akan dibuktikan $\hat{\alpha}$ merupakan penaksir yang tak konsisten dari α sebagai akibat adanya korelasi Y_t dan u_t.

Penaksir OLS ($\hat{\alpha}$) yaitu

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{n\sum C_t Y_t - \sum C_t \sum Y_t}{n\sum Y_t^2 - \sum (Y_t)^2} \tag{3.3.9}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum (C_t - \overline{C})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (Y_t - \overline{Y})^2}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum c_t y_t}{\sum (y_t)^2} \tag{3.3.10}$$

dengan $c_t = (C_t - \overline{C})$, $y_t = (Y_t - \overline{Y})$ dan $\sum y_t = 0$, sehingga $\overline{C} \sum y_t = 0$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum (C_t - \overline{C}) y_t}{\sum (y_t)^2}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum C_t y_t - (\overline{C}) \sum y_t}{\sum (y_t)^2}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum C_t y_t}{\sum (y_t)^2} \tag{3.3.11}$$

Substitusikan persamaan (3.3.2) kedalam persamaan (3.3.11)

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum (\alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_t) y_t}{\sum (y_t)^2}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\alpha_0 \sum y_t + \alpha_1 \sum y_t Y_t + u_t \sum y_t}{\sum (y_t)^2}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\alpha_0 \sum y_t}{\sum (y_t)^2} + \frac{\alpha_1 \sum y_t Y_t}{\sum (y_t)^2} + \frac{u_t \sum y_t}{\sum (y_t)^2} \tag{3.3.12}$$

karena $\sum y_t = 0$, maka $\frac{\sum y_t}{\sum (y_t)^2} = 0$

karena $\frac{\sum y_t Y_t}{\sum (y_t)^2} = \frac{\sum y_t (y_t + \bar{Y})}{\sum {y_t}^2} = \frac{\sum y_t^2 + \bar{Y} \sum y_t}{\sum {y_t}^2} = \frac{0 + \sum {y_t}^2}{\sum {y_t}^2} = 1$

maka

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 + \frac{u_t \sum y_t}{\sum (y_t)^2}$$

$$E(\hat{\alpha}_1) = E(\alpha_1) + E\left(\frac{u_t \sum y_t}{\sum (y_t)^2}\right)$$

$$E(\hat{\alpha}_1) = \alpha_1 + \frac{u_t\, E(\sum y_t)}{\sum (y_t)^2} \tag{3.3.13}$$

Suatu penaksir $\hat{\theta}$ dikatakan sebuah penaksir yang konsisten, jika mendekati nilai dari θ seiring dengan ukuran sampel yang membesar. Atau plim dari penaksir sama dengan nilai parameternya.

$$p \lim_{n \to \infty} \hat{\alpha} = \alpha \tag{3.3.14}$$

$$p \lim_{n \to \infty} (\hat{\alpha}_1) = p \lim_{n \to \infty} (\alpha_1) + p \lim_{n \to \infty} \left(\frac{u_t \sum y_t}{\sum (y_t)^2}\right) \tag{3.3.15}$$

$$p \lim_{n \to \infty} (\hat{\alpha}_1) = p \lim_{n \to \infty} (\alpha_1) + p \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\frac{\sum y_t u_t}{N}}{\frac{\sum (y_t)^2}{N}}\right) \tag{3.3.16}$$

dimana $\frac{\sum y_t u_t}{N}$ merupakan kovarian antara Y_t dan u_t dan $\frac{\sum y_t^2}{N}$ varian dari Y, serta N merupakan banyaknya observasi.

$$p \lim_{n \to \infty} (\hat{\alpha}_1) = \alpha_1 + \left(\frac{\sigma^2 / (1 - \alpha_1)}{\sigma_Y^2}\right) \tag{3.3.17}$$

Karena σ^2 dan σ_Y^2 mempunyai nilai positif, dan dengan syarat $0 < \alpha_1 < 1$, maka $p \lim_{n \to \infty} (\hat{\alpha}_1)$ lebih besar dari α_1, karena $p \lim_{n \to \infty} (\hat{\alpha}_1)$ adalah parameter α_1 ditambah kovarian antara Y_t dan u_t dan varian dari Y. Maka $\hat{\alpha}_1$ merupakan penaksir yang tak konsisten dari α_1.

3.4 Notasi Persamaan Simultan

Menurut Judge (1980: 567), model persamaan simultan dapat direpresentasikan dengan T observasi dalam M variabel endogen dinotasikan dengan $\boldsymbol{y}_{t1}, \boldsymbol{y}_{t2}, \boldsymbol{y}_{t3}, \dots, \boldsymbol{y}_{tM}$ dan K variabel predetermine dinotasikan dengan $\boldsymbol{x}_{t1}, \boldsymbol{x}_{t2}, \boldsymbol{x}_{3t}, \dots, \boldsymbol{x}_{tK}$ serta M variabel galat acak dinotasikan dengan $\boldsymbol{u}_{t1}, \boldsymbol{u}_{t2}, \boldsymbol{u}_{t3}, \dots, \boldsymbol{u}_{tM}$. Sedangkan indeks t berasal dari T observasi digunakan untuk indeks obsevasi.

Notasi umum dalam M persamaan untuk merepresentasikan persamaan simultan di atas dapat dituliskan:

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_{t1}\gamma_{11} + \dots + \boldsymbol{y}_{tM}\gamma_{1M} + \boldsymbol{x}_{t1}\beta_{11} + \boldsymbol{x}_{t2}\beta_{12} + \dots + \boldsymbol{x}_{tK}\beta_{1M} + \boldsymbol{u}_{t1} = 0 \\ \boldsymbol{y}_{t1}\gamma_{21} + \dots + \boldsymbol{y}_{tM}\gamma_{2M} + \boldsymbol{x}_{t1}\beta_{21} + \boldsymbol{x}_{t2}\beta_{22} + \dots + \boldsymbol{x}_{tK}\beta_{2M} + \boldsymbol{u}_{t2} = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \boldsymbol{y}_{t1}\gamma_{M1} + \dots + \boldsymbol{y}_{tM}\gamma_{MM} + \boldsymbol{x}_{t1}\beta_{K1} + \boldsymbol{x}_{t2}\beta_{K2} + \dots + \boldsymbol{x}_{tK}\beta_{KM} + \boldsymbol{u}_{tM} = 0 \end{array} \qquad (3.4.1)$$

dimana γ dan β adalah parameter struktural dari sistem persamaan yang tidak diketahui dan akan ditaksir dari data. Dalam notasi matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t1} \\ \mathbf{y}_{t2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{tM} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Y}} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1} & \gamma_{M2} & \cdots & \gamma_{MM} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{t1} \\ \mathbf{x}_{t2} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{tK} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1M} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{1M} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta_{K1} & \beta_{K2} & \cdots & \beta_{KM} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{t1} \\ \mathbf{u}_{t2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{tM} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} = 0$$

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \qquad (3.4.2)$$

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U} \qquad (3.4.3)$$

dimana:

$\boldsymbol{Y}$ = Vektor variabel endogen yang berukuran $Mx1$

$\boldsymbol{X}$ = Vektor variabel predetermine yang berukuran $Kx1$

$\boldsymbol{U}$ = Vektor variabel galat acak yang berukuran $Mx1$

$\boldsymbol{\Gamma}$ = Matriks koefisien variabel endogen yang tidak diketahui berukuran MxM

$\boldsymbol{B}$ = Matriks koefisien variabel predetermine yang tidak diketahui berukuran MxM

Penting untuk dicatat bahwa ukuran $\boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{U}$ adalah sama.

Untuk memperjelas bentuk dari model persamaan simultan, berikut ini adalah contoh persamaan simultan yaitu model dari John U. Farley dan Harold J. Levitt dalam *A Model of the Distributionof Branded Personal in Jamaica* dalam Gujarati (2012: 354).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}_{1t} &= \beta_{10} + \beta_{11}\boldsymbol{Y}_{2t} + \beta_{12}\boldsymbol{Y}_{3t} + \beta_{13}\boldsymbol{Y}_{4t} + \boldsymbol{u}_{1t} \\ \boldsymbol{Y}_{2t} &= \beta_{20} + \beta_{21}\boldsymbol{Y}_{1t} + \beta_{22}\boldsymbol{Y}_{5i} + \gamma_{21}\boldsymbol{X}_{1t} + \gamma_{22}\boldsymbol{X}_{2t} + \boldsymbol{u}_{2t} \\ \boldsymbol{Y}_{3t} &= \beta_{30} + \beta_{31}\boldsymbol{Y}_{2t} + \gamma_{31}\boldsymbol{X}_{3t} + \boldsymbol{u}_{3t} \\ \boldsymbol{Y}_{4t} &= \beta_{40} + \beta_{41}\boldsymbol{Y}_{2t} + \gamma_{41}\boldsymbol{X}_{4t} + \boldsymbol{u}_{4t} \\ \boldsymbol{Y}_{5t} &= \beta_{50} + \beta_{51}\boldsymbol{Y}_{2t} + \beta_{52}\boldsymbol{Y}_{3t} + \beta_{53}\boldsymbol{Y}_{4t} + \boldsymbol{u}_{5t} \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Variabel-variabel dalam model di atas adalah

a. Variabel endogen = $\boldsymbol{Y}_{1t}$, $\boldsymbol{Y}_{2t}$, $\boldsymbol{Y}_{3t}$, $\boldsymbol{Y}_{4t}$, dan $\boldsymbol{Y}_{5t}$

b. Variabel predetermine

   Variabel eksogen = $\boldsymbol{X}_{1t}$, $\boldsymbol{X}_{2t}$, $\boldsymbol{X}_{3t}$, dan $\boldsymbol{X}_{4t}$

Pada persamaan (3.4.4) di atas terlihat adanya hubungan dua arah serta variabel yang memiliki dua peran yaitu sebagai variabel endogen dan variabel eksogen. Misal hubungan dua arah antara variabel $\boldsymbol{Y}_{1t}$ dan $\boldsymbol{Y}_{2t}$. $\boldsymbol{Y}_{1t}$ pada persamaan pertama menjadi variabel endogen, namun pada persamaan kedua $\boldsymbol{Y}_{1t}$ menjadi variabel eksogen. $\boldsymbol{Y}_{2t}$ pada persamaan kedua menjadi variabel endogen, namun pada persamaan pertama, ketiga, keempat, dan kelima $\boldsymbol{Y}_{2t}$ menjadi variabel eksogen. Hubungan dua arah antara variabel $\boldsymbol{Y}_{1t}$ dan $\boldsymbol{Y}_{2t}$ menegaskan model persamaan di atas merupakan model persamaan simultan.

Menurut Jugde (1980: 568), ada beberapa asumsi untuk variabel yang didefinisikan model statistik di atas sebagai berikut:

1. Asumsi Gangguan Acak

Asumsi stokastik untuk galat dari vektor $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots,\ \boldsymbol{u}_M$ diasumsikan bahwa gangguan struktural yang dihasilkan sebagai berikut:

$$E[\boldsymbol{u}_i] = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, M \tag{3.4.5}$$

$$E\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\boldsymbol{u}_1) \\ E(\boldsymbol{u}_2) \\ \vdots \\ E(\boldsymbol{u}_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

$E[\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'] = \sigma^2 \boldsymbol{I}$ untuk $\boldsymbol{u}$ adalah vektor dari $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots,\ \boldsymbol{u}_M$

$$E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = E\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M \end{bmatrix} [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_M]$$

$$E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = \begin{bmatrix} E(\boldsymbol{u}_1^2) & E(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2) & \ldots & E(\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_M) \\ E(\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_1) & E(\boldsymbol{u}_2^2) & \ldots & E(\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\boldsymbol{u}_M\boldsymbol{u}_1) & E(\boldsymbol{u}_M\boldsymbol{u}_2) & \ldots & E(\boldsymbol{u}_M^2) \end{bmatrix} \tag{3.4.7}$$

Karena adanya asumsi homokesdastisitas dan tidak adanya otokorelasi, maka dapat dituliskan menjadi:

$$E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \boldsymbol{I} \tag{3.4.8}$$

atau untuk penulisan lebih umum dapat ditulisankan dengan:

$$E\left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M \end{bmatrix}'\right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\boldsymbol{I} & \sigma_{12}\boldsymbol{I} & \ldots & \sigma_{1M}\boldsymbol{I} \\ \sigma_{21}\boldsymbol{I} & \sigma_{22}\boldsymbol{I} & \ldots & \sigma_{2M}\boldsymbol{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M1}\boldsymbol{I} & \sigma_{M2}\boldsymbol{I} & \ldots & \sigma_{MM}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \Sigma \otimes \boldsymbol{I} \tag{3.4.9}$$

Barisan dari vektor $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots,\ \boldsymbol{u}_M$ adalah i.i.d dengan mean nol dan matriks *var-cov* $\sum$, dimana elemen dari diagonal utama matriks akan menjadi varians dan elemen yang jauh dari diagonal matriks disebut kovarians.

2. Jika variabel predetermine benar-benar variabel eksogen {eksogen sekarang maupun eksogen lampau} diasumsikan bahwa

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} X^{'}X \qquad (3.4.10)$$

ada dan terbatas serta nonsingular.

Jika variabel predetermine berisi variabel *lagged endogenous* diasumsikan bahwa $plim\, N^{-1} X'X$ ada dan terbatas serta nonsingular.

3. Matriks $\mathbf{\Gamma}$ adalah nonsingular

Dalam model persamaan simultan ada yang dikenal sebagai persamaan struktural dan persamaan identitas. Persamaan struktural adalah persamaan yang berisi tingkah laku (perilaku). Dalam persamaan struktural terdapat perubahan variabel, sebagai akibat dari perubahan variabel-variabel lain. Hal ini juga dijelaskan oleh Koutsoyiannis (1977:336) bahwa persamaan struktural merupakan sistem lengkap dari persamaan yang menggambarkan struktur dari hubungan variabel ekonomi serta mengekspresikan variabel endogen sebagai fungsi dari variabel endogen yang lainnya, variabel predetermine, dan galat stokastik. Koefisien $\boldsymbol{\gamma}$ dan $\boldsymbol{\beta}$ dalam persamaan struktural disebut parameter struktural yang tidak diketahui dari model dan akan ditaksir dari data (Jugde, 1980: 567). Sedangkan persamaan identitas adalah persamaan yang menyatakan kesamaan antara variabel.

3.5 Bentuk Persamaan yang Direduksi

Menurut Gujarati (2012: 361), dari persamaan struktural dapat diperoleh bentuk persamaan reduksi (*reduced-form equation*) dan koefisien bentuk reduksi yang berhubungan. Persamaan bentuk reduksi (*reduced-form equation*) merupakan suatu persamaan yang menjelaskan variabel endogen sebagai fungsi dari variabel predetermine dan galat stokastik. Ini juga dijelaskan oleh Jugde (1980: 571) bahwa bentuk persamaan reduksi adalah jika model dari persamaan struktural −jika $\boldsymbol{\Gamma}$ adalah nonsingular− dapat mengekspresikan variabel endogen sebagai fungsi dari variabel predetermine dan galat stokastik. Persamaan ini didapat dengan memecahkan bentuk persamaan struktural sehingga variabel endogen pada setiap persamaan sebagai fungsi dari variabel predetermine dan galat stokastik.

Persamaan ini bisa diselesaikan jika $\boldsymbol{\Gamma}$ adalah nonsingular. Dan dari persamaan sebelumnya dikalikan dengan $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ dan menyusun kembali persamaan tersebut, dapat diperoleh bentuk reduksi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U} \tag{3.5.1}$$

$$\boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{Y} = -\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\,\mathbf{Z} + \mathbf{V} \tag{3.5.2}$$

dimana:

Matriks dari parameter atau koefisien reduksi berukuran MxK berbentuk:

$$\boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{B} = -\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2M} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1} & \gamma_{M2} & \cdots & \gamma_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2K} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta_{M1} & \beta_{M2} & \cdots & \beta_{MK} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Z} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1K} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{M1} & z_{M2} & \cdots & z_{MK} \end{bmatrix} \tag{3.5.3}$$

Matriks dari gangguan bentuk reduksi berukuran $Mx1$ berbentuk:

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{U} = -\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2M} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M1} & \gamma_{M2} & \cdots & \gamma_{MM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1t} \\ \boldsymbol{u}_{2t} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{Mt} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} v_{1t} \\ \boldsymbol{v}_{2t} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{Mt} \end{bmatrix} \tag{3.5.4}$$

Asumsi stokastik pada $\boldsymbol{V}$ langsung mengikuti bentuk dari $\boldsymbol{U}$. Jika $\boldsymbol{u}_t{}'$ adalah baris ke-t dari $\boldsymbol{U}$ dan $\boldsymbol{v}_t{}'$ baris ke-t dari $\boldsymbol{V}$, maka

$$\boldsymbol{v}_t' = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{u}_t{}' \tag{3.5.5}$$

dan vektor $\boldsymbol{u}_t$ mempunyai mean $E(\boldsymbol{u}_t) = 0$ dan matriks *var-cov* $E(\boldsymbol{u}_t\, \boldsymbol{u}_t{}') = \sum$, maka

$$E[\boldsymbol{v}_t] = E[-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{u}_t{}']' =' - (\boldsymbol{\Gamma}^{-1})'E[\boldsymbol{u}_t] = 0 \tag{3.5.6}$$

dan

$$\begin{aligned} var\text{-}cov(\boldsymbol{v}_t) &= E[\boldsymbol{v}_t\boldsymbol{v}_t{}'] = \left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\right)' E(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t')\left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\right) \\ var\text{-}cov(\boldsymbol{v}_t) &= \left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\right)' \boldsymbol{\Sigma}\, \boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

Selanjutnya, karena $E(\boldsymbol{u}_t\, \boldsymbol{u}_s{}') = 0$, dan $E(\boldsymbol{v}_t\, \boldsymbol{v}_s{}') = 0$, untuk $t \neq s$. maka reduksi individual dari persamaan $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\,\mathbf{Z} + \mathbf{V}$ dapat ditulis

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{X}\, \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{v}_i \tag{3.5.8}$$

dimana $\boldsymbol{v}_i$ adalah kolom ke-i dari $\boldsymbol{V}$.

3.6 Masalah Identifikasi

Dalam model persamaan simultan, identifikasi dilakukan pada awal sebelum melakukan penaksiran untuk menentukan apakah suatu model persamaan simultan dapat dilakukan penaksiran atau tidak, dan mengetahui metode penaksiran apa yang sebaiknya digunakan pada persamaan simultan.

Menurut Koutsoyiannis (1977: 351), identifikasi pada dasarnya menentukan pilihan metode apa yang digunakan secara tepat dari model yang akan ditaksir dan ada dua situasi yang mungkin dari pengidentifikasian, yaitu:

1. Persamaan *Underidentified*

Disebut persamaan *underidentified* (kurang teridentifikasi), jika bentuk statistiknya tidak unik atau kurang. Serta jika persamaan *underidentified*, maka tidak dapat menaksir seluruh parameter dengan teknik ekonometrika manapun, dengan kata lain koefisien persamaan struktural tidak diperoleh.

2. Persamaan *Identitified*

Disebut persamaan *identified* (dapat teridentifikasi), jika bentuk statistiknya unik (tunggal). Serta jika persamaan *identified*, maka koefisien dalam persamaan simultan secara umum dapat ditaksir, dengan kata lain koefisien persamaan struktural memiliki solusi yang unik. Persamaan *identified* dapat menjadi persamaan *exactly identified* (tepat teridentifikasi) dan persamaan *overidentified* (terlalu teridentifikasi).

a. Persamaan *exactly identified* adalah jika diperoleh suatu nilai koefisien yang unik dari parameter strukturalnya dan metode yang sesuai adalah *Indirect Least Square* (ILS).
b. Persamaan *overidentified* adalah jika diperoleh lebih dari satu nilai koefisien untuk parameter-parameter strukturalnya dan metode yang sesuai adalah *Two-Stage Least Square* (2SLS), *Three-Stage Least Square* (3SLS), *Limited Informatuon Maximum Likelihood* (LIML), dan *Full Informatuon Maximum Likelihood* (FIML).

3.7 Aturan Identifikasi

Sebenarnya penetuan identifikasi dapat ditempuh melalui bentuk persamaan reduksi, namun diperlukan proses waktu dan tenaga yang lama dan besar karena masing-masing persamaan diubah dalam bentuk reduksi. Menurut Koutsoyiannis (1977: 350), terdapat dua aturan formal yang digunakan untuk menentukan identifikasi yaitu kondisi orde dan kondisi rank.

3.7.1 Kondisi Orde

Koutsoyiannis (1977: 352) menyatakan bahwa kondisi orde merupakan suatu kondisi yang diperlukan (*necessary*) namun belum menjadi kondisi cukup (*sufficient*) untuk identifikasi. Notasi yang digunakan yaitu:

M = Jumlah variabel endogen dalam model persamaan simultan

m = Jumlah variabel endogen dalam suatu persamaan tertentu

K = Jumlah variabel predetermine dalam model persamaan simultan

m = Jumlah variabel predetermine dalam suatu persamaan tertentu

Ada dua cara untuk mengidentifikasi kondisi orde, yang masing-masing sebenarnya menghasilkan hasil yang setara. Gujarati (2012: 372), menyatakan:

1. Pada model M persamaan simultan agar dapat diidentifikasi, setidaknya harus mengeluarkan $M-1$ variabel (endogen dan predetermine) yang terdapat dalam model. Koutsoyiannis (1977: 352) juga menyatakan untuk persamaan yang teridentifikasi, jumlah variabel yang dikeluarkan (endogen dan predetermine) dari model harus sama dengan atau lebih besar dari jumlah variabel endogen dikurangi satu. Dinotasikan dengan,

$$(M-m)+(K-k) \geq M-1 \quad (3.7.1)$$

   Jika variabel yang dikeluarkan tepat sejumlah $M-1$ variabel, maka persamaan tersebut tepat teridentifikasi (*exactly identified*). Jika variabel yang dikeluarkan lebih dari $M-1$ variabel, maka persamaan tersebut terlalu teridentifikasi (*overidentified*).

2. Dalam model M persamaan simultan agar dapat diidentifikasi, jumlah dari variabel predetermine yang dikeluarkan dari persamaan tidak boleh kurang dari jumlah variabel endogen yang dimasukan dalam persamaan dikurangi dengan satu. Dinotasikan dengan,

$$(K-k) \geq m-1 \quad (3.7.2)$$

Jika $(K-k)=m-1$, maka persamaan tersebut tepat teridentifikasi (*exactly identified*). Jika $(K-k)>m-1$, maka persamaan tersebut terlalu teridentifikasi (*overidentified*).

3.7.2 Kondisi Rank

Seperti yang dikemukakan sebelumnya bahwa kondisi orde merupakan kondisi yang diperlukan namun belum menjadi kondisi cukup untuk identifikasi. Dengan kondisi rank ini, dapat memenuhi dua aturan formal dalam pengidentifikasian. Rank berkenaan dengan konsep matriks dengan orde n yang mempuyai determinan sama dengan nol atau jumlah maksimum baris-baris atau kolom-kolom yang bebas linear (independen).

Kondisi rank diperlukan karena walaupun melalui pengujian kondisi orde suatu persamaan teridentifikasi namun bisa saja melalui pengujian kondisi rank tidak terpenuhi sehingga penaksiran parameter untuk persamaan simultan tidak dapat dilakukan. Hal ini mungkin terjadi jika kolom-kolom atau baris-baris matriks dari suatu persamaan tidak bebas linear atau terdapat hubungan antar variabelnya.

Gujarati (2012: 375), menyatakan bahwa dalam model M persamaan simultan dapat diidentifikasi, jika dan hanya jika setidaknya terdapat satu determinan yang tidak nol dari matrik yang orde $(M-1)x(M-1)$. Matriks itu dapat dibentuk dari koefisien variabel (endogen dan predetermine) yang dikeluarkan dari persamaan tetapi ada dalam persamaan lainnya dari model.

Untuk melakukan pengujian dalam kondisi rank, langkah-langkah yang dapat dilakukan adalah:

1. Manipulasi persamaan dengan memindahkan semua variabel sisi kanan ke sebelah kiri kecuali variabel galat stokastik.
2. Tuliskan hasil manipulasi tersebut dalam bentuk tabel.

3. Mencoret koefisien-koefisien dari baris yang didalamnya ada persamaan yang sedang diperhatikan untuk pengidentifikasian.
4. Mencoret koefisien-koefisien dari kolom yang berhubungan dengan langkah 2 yaitu yang tidak sama dengan nol.
5. Data yang tersisa dalam tabel yaitu data dari koefisien-koefisien yang tidak berhubungan dengan langkah 2 dan 3 (data dari seluruh variabel dalam model tapi tidak termasuk persamaan yang sedang diperhatikan untuk pengidentifikasian). Hitung determinan berorde $(M-1)$ dari data yang tersisa, misal matriks $\boldsymbol{R}$. Jika terdapat suatu persamaan yang mempunyai satu determinan yang berorde $(M-1)$ yang tidak sama dengan nol, maka persamaan yang sedang diperhatikan dapat diidentifikasi. Jika seluruh kemungkinan dari determinan yang berorde $(M-1)$ adalah nol, maka persamaan yang sedang diperhatikan tidak dapat diidentifikasi.

Kondisi rank menyatakan apakah persamaan dapat diidentifikasi atau tidak, sedangkan kondisi orde menyatakan jika hal itu dapat secara tepat teridentifikasi atau terlalu terindentifikasi (Gujarati, 2012:377). Prinsip umum dari identifikasi persamaan struktural pada model persamaan simultan, yaitu:

1. Jika $(K-k) > M-1$ dan rank dari matriks $\boldsymbol{R}$ adalah $M-1$, maka persamaan tersebut terlalu teridentifikasi (*overidentified*).
2. Jika $(K-k) = M-1$ dan rank dari matriks $\boldsymbol{R}$ adalah $M-1$, maka persamaan tersebut tepat teridentifikasi (*exactly identified*).
3. Jika $(K-k) \geq M-1$ dan rank dari matriks $\boldsymbol{R}$ adalah kurang dari $M-1$,maka persamaan tersebut kurang teridentifikasi (*underidentified*).
4. Jika $(K-k) < M-1$ dan rank dari matriks $\boldsymbol{R}$ adalah kurang dari $M-1$, maka persamaan tersebut tidak teridentifikasi.

Akan disajikan contoh penggunaan aturan identifikasi menggunakan contoh sebelumnya yaitu yaitu model dari John U. Farley dan Harold J. Levitt dalam *A Model of the Distributionof Branded Personal in Jamaica* dalam Gujarati (2012: 354).

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_{1t} &= \beta_{10} + \beta_{11}\boldsymbol{Y}_{2t} + \beta_{12}\boldsymbol{Y}_{3t} + \beta_{13}\boldsymbol{Y}_{4t} + \boldsymbol{u}_{1t} \\
\boldsymbol{Y}_{2t} &= \beta_{20} + \beta_{21}\boldsymbol{Y}_{1t} + \beta_{22}\boldsymbol{Y}_{5i} + \gamma_{21}\boldsymbol{X}_{1t} + \gamma_{22}\boldsymbol{X}_{2t} + \boldsymbol{u}_{2t} \\
\boldsymbol{Y}_{3t} &= \beta_{30} + \beta_{31}\boldsymbol{Y}_{2t} + \gamma_{31}\boldsymbol{X}_{3t} + \boldsymbol{u}_{3t} \\
\boldsymbol{Y}_{4t} &= \beta_{40} + \beta_{41}\boldsymbol{Y}_{2t} + \gamma_{41}\boldsymbol{X}_{4t} + \boldsymbol{u}_{4t} \\
\boldsymbol{Y}_{5t} &= \beta_{50} + \beta_{51}\boldsymbol{Y}_{2t} + \beta_{52}\boldsymbol{Y}_{3t} + \beta_{53}\boldsymbol{Y}_{4t} + \boldsymbol{u}_{5t}
\end{aligned} \tag{3.7.3}$$

dimana $\boldsymbol{Y}$ merupakan variabel endogen dan $\boldsymbol{X}$ merupakan variabel predetermine yang memiliki 5 variabel endogen dan 4 variabel predetermine.

Pertama akan di identifikasi melalui kondisi orde

Tabel 3.1
Identifikasi enggunakan Kondisi Orde

Persamaan	$(K-k)$	$(m-1)$	Hasil
1 (satu)	4-0=4	3-1=2	*overidentified*
2 (dua)	4-2=2	2-1=1	*overidentified*
3 (tiga)	4-1=3	1-1=0	*overidentified*
4 (empat)	4-1=3	1-1=0	*overidentified*
5 (lima)	4-0=4	3-1=2	*overidentified*

Dari hasil pengidentifikasian yang menggunakan kondisi orde diperoleh bahwa semua persamaan terlalu teridentifikasi (*overidentified*). Kemudian dilanjutkan dengan pengidentifikasian menggunakan kondisi rank.

Hasil manipulasi persamaan (3.7.3) dengan memindahkan semua variabel sisi kanan ke sebelah kiri kecuali variabel galat stokastik dari persamaan simultan di atas, yakni

$$\boldsymbol{Y}_{1t} - \beta_{10} - \beta_{11}\boldsymbol{Y}_{2t} - \beta_{12}\boldsymbol{Y}_{3t} - \beta_{13}\boldsymbol{Y}_{4t} = \boldsymbol{u}_{1t}$$
$$\boldsymbol{Y}_{2t} - \beta_{20} - \beta_{21}\boldsymbol{Y}_{1t} - \beta_{22}\boldsymbol{Y}_{5i} - \gamma_{21}\boldsymbol{X}_{1t} - \gamma_{22}\boldsymbol{X}_{2t} = \boldsymbol{u}_{2t}$$

$$\boldsymbol{Y}_{3t} - \beta_{30} - \beta_{31}\boldsymbol{Y}_{2t} - \gamma_{31}\boldsymbol{X}_{3t} = \boldsymbol{u}_{3t} \quad (3.7.4)$$
$$\boldsymbol{Y}_{4t} - \beta_{40} - \beta_{41}\boldsymbol{Y}_{2t} - \gamma_{41}\boldsymbol{X}_{4t} = \boldsymbol{u}_{4t}$$
$$\boldsymbol{Y}_{5t} - \beta_{50} - \beta_{51}\boldsymbol{Y}_{2t} - \beta_{52}\boldsymbol{Y}_{3t} - \beta_{53}\boldsymbol{Y}_{4t} = \boldsymbol{u}_{5t}$$

Tulis kembali persamaan (3.7.4) dalam bentuk tabel dengan mencocokkan koefisien-koefisien, yakni

Persamaan	1	$\boldsymbol{Y}_1$	$\boldsymbol{Y}_2$	$\boldsymbol{Y}_3$	$\boldsymbol{Y}_4$	$\boldsymbol{Y}_5$	$\boldsymbol{X}_1$	$\boldsymbol{X}_2$	$\boldsymbol{X}_3$	$\boldsymbol{X}_4$
1 (satu)	$\cancel{-\beta_{10}}$	$\cancel{1}$	$\cancel{-\beta_{11}}$	$\cancel{-\beta_{12}}$	$\cancel{-\beta_{13}}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$
2 (dua)	$-\beta_{20}$	$-\beta_{21}$	1	0	0	$-\beta_{22}$	$-\gamma_{21}$	$-\gamma_{22}$	0	0
3 (tiga)	$-\beta_{30}$	0	$-\beta_{31}$	1	0	0	0	0	$-\gamma_{31}$	0
4 (empat)	$-\beta_{40}$	0	$-\beta_{41}$	0	1	0	0	0	0	$-\gamma_{41}$
5 (lima)	$-\beta_{50}$	0	$-\beta_{51}$	$-\beta_{52}$	$-\beta_{53}$	0	0	0	0	0

Pada persamaan pertama (satu) dapat diidentifikasi, jika setidaknya terdapat satu determinan yang tidak nol dari matrik yang orde $4x4$. Setelah melakukan langkah 3 dan 4, yaitu mencoret koefisien-koefisien dari baris persamaan satu dan mencoret koefisien-koefisien dari kolom yang berhubungan dengan koefisien persamaan satu yang tidak sama dengan nol. Data yang tersisa dari dalam tabel yaitu data dari koefisien-koefisien yang tidak berhubungan dengan persamaan satu akan membentuk matriks, dan dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -\beta_{22} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dari matriks $\boldsymbol{R}$ yang berordo $4x5$ dapat dibentuk $\boldsymbol{C}_4^5 = 5$ submatriks $\boldsymbol{R}$ yang berordo $4x4$, diantaranya:

$$\boldsymbol{R_1} = \begin{bmatrix} -\beta_{22} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_3 = \begin{bmatrix} -\beta_{22} & -\gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_4 = \begin{bmatrix} -\beta_{22} & -\gamma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_5 = \begin{bmatrix} -\beta_{22} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinan matriks $\boldsymbol{R}$ adalah

$$|\boldsymbol{R_1}| = \begin{vmatrix} -\beta_{22} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|\boldsymbol{R_5}| = \begin{vmatrix} -\beta_{22} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|\boldsymbol{R}_1| = |\boldsymbol{R}_2| = |\boldsymbol{R}_3| = |\boldsymbol{R}_4| = |\boldsymbol{R}_5| = 0$$

Karena determinan dari matriks $\boldsymbol{R}$ adalah nol, maka rank dari matriks pada persamaan satu kurang dari $(M-1) = (5-1) = 4$. Karenanya persamaan satu tidak dapat diidentifikasi. Lebih lanjut dengan cara yang sama dilakukan pengidentifikasian terhadap persamaan lainnya dengan kondisi rank.

Seperti yang diketahui bahwa kondisi rank merupakan syarat yang perlu dan cukup untuk identifikasi. Melihat dari pemaparan contoh pengidentifikasian di atas, walaupun dengan kondisi orde pada persamaan satu hasilnya teridentifikasi, namun dengan kondisi rank ternyata menunjukkan persamaan tersebut tidak teridentifikasi. Hal ini mungkin terjadi karena kolom atau baris matriks $\boldsymbol{R}$ tidak bebas linear atau terdapat

Siti Nurhayati Basuki, 2013
Penaksiran Parameter Pada Persamaan Simultan Menggunakan Metode Full Information Maximum Likelihood (FIML)
Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

hubungan antar variabel $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \boldsymbol{X}_4$ dan $\boldsymbol{Y}_5$. Oleh karena itu, tidak ada informasi yang cukup untuk menaksir parameter dari persamaan satu.

3.8 Metode Penaksiran pada Model Persamaan Simultan

Pada model persamaan simultan terjadi hubungan dua arah antara variabel dependen dan independen. Selain itu, dalam model persamaan simultan variabel dependen pada suatu persamaan dapat juga bertindak sebagai variabel independen (penjelas) dalam persamaan lain, sehingga terjadi keraguan mana yang benar-benar merupakan variabel dependen atau variabel independen. Ini menjadi ciri dari persamaan simultan.

Penggunaan metode OLS bila digunakan dalam penaksiran parameter dalam konteks persamaan simultan menjadi tidak tepat. Karena terdapat asumsi yang dilanggar yaitu tak ada korelasi antara variabel penjelas (X) dengan galat stokastiknya atau sering dituliskan sebagai $cov(X, u_i) = 0$. Hal ini tidak dapat dipenuhi oleh model persamaan simultan, karena ada hubungan dua arah antara variabel dependen dan independen. Jika dipaksakan terus menggunakan metode OLS, maka hasil penaksiran akan memberikan penaksir yang bias dan tak konsisten.

Oleh karena itu, model persamaan simultan mempunyai metode tersendiri yang lebih baik dan spesifik, agar memperoleh penaksir dari parameter-parameternya yang konsisten.

Koutsoyiannis (1977: 335), menjelaskan ada beberapa metode yang sesuai dengan persamaan simultan yaitu:

1. Metode persamaan tunggal (*single-equation methods*)

   Metode ini juga sering disebut sebagai (*limited information method*). Metode ini menaksir parameter untuk setiap persamaan struktural dalam model persamaan simultan, hanya menggunakan atau mempertimbangkan informasi dari persamaan bersangkutan saja tanpa memperhatikan informasi dari persamaan lainnya. Dengan kata lain, metode ini menaksir parameter secara terpisah tiap persamaan saja.

Beberapa metode yang merupakan metode persamaan tunggal yaitu: Kuadrat Terkecil tak Langsung (*Indirect Least Square*-ILS), Kuadrat Terkecil Dua Tahap (*Two-Stage Least Square*-2SLS), dan Informasi Terbatas Kemungkinan Maksimum (*Limited Information Maximum Likelihood*-LIML).

2. Metode sistem (*system methods*)

   Metode ini juga sering disebut sebagai *full information method*. Metode ini menaksir parameter untuk seluruh persamaan struktural dalam model persamaan simultan, mempertimbangkan dan menggunakan seluruh informasi serta pembatasan dari semua persamaan dalam model simultan. Dengan kata lain, metode ini menaksir parameter secara bersama-sama dengan memperhatikan seluruh informasi yang ada pada seluruh persamaan simultan.

   Beberapa metode yang merupakan metode sistem yaitu: Kuadrat Terkecil Tiga Tahap (*Three-Stage Least Square*-3SLS) dan Informasi Penuh Kemungkinan Maksimum (*Full Information Maximum Likelihood*-FIML).

Klein dalam Gujarati (2012: 391), menjelaskan bahwa metode persamaan tunggal –dalam pembahasan model persamaan simultan– dapat menjadi kurang sensitif terhadap kesalahan spesifikasi dalam arti bagian-bagian dari sistem tersebut yang secara tepat dispesifikasi dapat tidak secara benar dipengaruhi oleh error pada proses spesifikasi pada bagian lainnya. Salah satu metode yang digunakan dalam metode sistem adalah *Full Information Maximum Likelihood*-FIML.

.

3.9 Metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML)

Metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML) adalah metode sistem yang diaplikasikan pada seluruh persamaan dalam model dan menghasilkan penaksir dari seluruh parameter struktural secara bersama-sama (Koutsoyiannis, 1977: 461). Dengan metode ini persamaan struktural pada model persamaan simultan tidak lagi dipandang secara terpisah-pisah seperti model informasi terbatas (*limited information*), namun persamaan dipandang sebagai suatu kesatuan dan berhubungan satu dengan yang lainnya. Penggunaan metode FIML diterapkan, jika pengujian kondisi orde dan kondisi rank merupakan persamaan yang terlalu teridentifikasi (*overidentified*).

Metode FIML menaksir parameter dengan cara memaksimumkan fungsi kemungkinan (*likelihood function*) untuk semua parameter dari variabel endogennya. Greene (2003: 407) menyatakan bahwa galat yang berdistribusi normal maka FIML bersifat efisien untuk seluruh penaksir lainnya. Galat yang berdistribusi normal untuk metode FIML, dijelaskan juga oleh Judge (1980: 601), bahwa galat dari persamaan struktural FIML berdistribusi normal.

Koutsoyiannis (1977: 469) menjelaskan bahwa, metode ini secara umum mengasumsikan 2 hal, yaitu:

1. FIML mengasumsikan *full information* (informasi lengkap), yaitu mengetahui spesifikasi lengkap seluruh persamaan dalam model. Kita tidak hanya perlu mengetahui semua variabel yang muncul dalam model, tetapi juga bentuk matematikanya.
2. Dalam FIML, variabel acak dari galat pada berbagai persamaan struktural dalam model berdistribusi normal dengan mean nol dan matriks *var-cov* Σ.

Langkah-langkah penaksiran menggunakan metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML) sebagai berikut:

1. Formulasikan fungsi kemungkinan (*likelihood function*) untuk variabel acak $\boldsymbol{u}$ dari seluruh persamaan struktural.

2. Mengaplikasikan aturan transformasi untuk mendapatkan fungsi kemungkinan variabel endogen $\boldsymbol{y}$ dari fungsi kemungkinan dari galat acak $\boldsymbol{u}$. Dengan cara menghitung determinan Jacobian untuk $\boldsymbol{u}$ dari seluruh persamaan struktural. (Jacobian adalah determinan dari turunan parsial fungsi transformasi yang diselesaikan untuk $\boldsymbol{u}$ yang berkaitan dengan variabel endogen $\boldsymbol{y}$).
3. Memaksimumkan fungsi kemungkinan (*likelihood function*) dengan cara turunan parsial dari fungsi kemungkinan terhadap parameter struktural .
4. Menyamadengankan nol turunan parsial dari fungsi kemungkinan (*likelihood function*) dan solusikan hasil dari persamaan untuk parameter struktural sehingga diperoleh penaksir yang memasimumkan fungsi kemungkinan.

Notasi umum bentuk persamaan struktural dari M persamaan simultan adalah:

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U} \tag{3.9.1}$$

dimana:

$\boldsymbol{Y}$ = Vektor variabel endogen yang berukuran $Mx1$

$\boldsymbol{X}$ = Vektor variabel predetermine yang berukuran $Kx1$

$\boldsymbol{U}$ = Vektor variabel galat acak yang berukuran $Mx1$

$\boldsymbol{\Gamma}$ = Matriks koefisien variabel endogen yang tidak diketahui berukuran MxM

$\boldsymbol{B}$ = Matriks koefisien variabel predetermine yang tidak diketahui berukuran MxM

Bentuk persamaan persamaan struktural di atas dapat dituliskan sebagai:

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{u}_i \quad \text{dengan } i = 1,2,\dots,M \tag{3.9.2}$$

Persamaan di atas dapat dituliskan kembali kedalam bentuk lain menjadi

$$\boldsymbol{y}_i = (\boldsymbol{Y}_i \quad \boldsymbol{X}_i)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_i \\ \boldsymbol{\beta}_i\end{pmatrix} + \boldsymbol{u}_i$$

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{Z_i}\boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{u}_i \qquad \text{dengan } i = 1,2,\dots,M \tag{3.9.3}$$

dengan $\boldsymbol{Z}_i = (\boldsymbol{Y}_i \quad \boldsymbol{X}_i)$ dan $\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_i \\ \boldsymbol{\beta}_i\end{pmatrix}$

dimana:

$\boldsymbol{y}_i$= Variabel endogen yang terdapat dalam persamaan ke-i

$\boldsymbol{Y}_i$= Variabel endogen lainnya yang menjadi variabel penjelas pada persamaan ke-i

$\boldsymbol{X}_i$= Variabel predetermine yang terdapat dalam persamaan ke-i

$\boldsymbol{\gamma}_i$= Parameter variabel endogen yang terdapat dalam persamaan ke-i

$\boldsymbol{\beta}_i$= Parameter variabel predetermine yang terdapat dalam persamaan ke-i

$\boldsymbol{u}_i$= Galat yang terdapat dalam persamaan ke-i

$\boldsymbol{Z}_i = (\boldsymbol{Y}_i \quad \boldsymbol{X}_i)$ = Variabel-variabel yang terdapat dalam persamaan ke-i

$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\gamma}_i \\ \boldsymbol{\beta}_i\end{pmatrix}$ = Parameter-parameter yang terdapat dalam persamaan ke-i

Persamaan (3.9.3) dapat ditulis untuk keseluruhan model sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{u} \tag{3.9.4}$$

dengan

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_M\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1 & & & \\ & \boldsymbol{Z}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{Z}_M\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_M\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M\end{bmatrix}$$

dan vektor stokastik galat $\boldsymbol{u}$ untuk semua persamaan yaitu:

$$E[\boldsymbol{u}_i] = 0 \qquad \text{untuk } i = 1,2,\dots,M$$

$$E\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_M\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E(\boldsymbol{u}_1) \\ E(\boldsymbol{u}_2) \\ \vdots \\ E(\boldsymbol{u}_M)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\text{maka } E[\boldsymbol{u}] = 0 \tag{3.9.5}$$

matriks *var-cov*:

$$var\text{-}cov(\boldsymbol{u}) = E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = E\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{u}_M\end{bmatrix}'\right\} = \begin{bmatrix}\sigma_{11}\boldsymbol{I} & \sigma_{12}\boldsymbol{I} & \dots & \sigma_{1M}\boldsymbol{I}\\ \sigma_{21}\boldsymbol{I} & \sigma_{22}\boldsymbol{I} & \dots & \sigma_{2M}\boldsymbol{I}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{M1}\boldsymbol{I} & \sigma_{M2}\boldsymbol{I} & \dots & \sigma_{MM}\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

$$var\text{-}cov(\boldsymbol{u}) = E(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = \Sigma \qquad (3.9.6)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, M$

Berdasarkan diatas, metode FIML digunakan untuk menaksir kasus dimana variabel acak dari galat persamaan struktural adalah berdistribusi normal.

$$\boldsymbol{u} \sim N\,(0, \Sigma) \qquad (3.9.7)$$

Langkah-langkah penaksiran menggunakan metode *Full Information Maximum Likelihood* (FIML) sebagai berikut:

1. Formulasikan fungsi kemungkinan (*likelihood*) untuk variabel acak $\boldsymbol{u}$ dari seluruh persamaan struktural.

   Fungsi kepadatan peluang dari $\boldsymbol{u}$ yaitu $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_M$ adalah

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \left(2\pi\,(\Sigma)\right)^{-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{1}{2\,(\Sigma)}\right)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha})^2$$

$$f(\boldsymbol{u}_2) = \left(2\pi\,(\Sigma)\right)^{-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{1}{2\,(\Sigma)}\right)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha})^2$$

$$\vdots \qquad (3.9.8)$$

$$f(\boldsymbol{u}_M) = \left(2\pi\,(\Sigma)\right)^{-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{1}{2\,(\Sigma)}\right)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha})^2$$

$$f(\boldsymbol{u}_M) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\,(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\, exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\right)(\boldsymbol{u}_M)^2$$

   Fungsi kepadatan peluang $\boldsymbol{u}$ yaitu $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_M$ dari M persamaan simultan adalah

$$f(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_M) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}}\,(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\, exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\right)(\boldsymbol{u})^2$$

$$f(\boldsymbol{u}) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} (\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \; exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\right)(\boldsymbol{u})^2 \quad (3.9.9)$$

2. Karena FIML diperoleh dengan memaksimumkan fungsi kemungkinan dari variabel endogen $\boldsymbol{y}$, maka digunakan aturan transformasi untuk memperoleh fungsi kemungkinan (*likelihood function*) $\boldsymbol{y}$ dari fungsi kemungkinan $\boldsymbol{u}$. Dengan cara menghitung determinan Jacobian untuk $\boldsymbol{u}$ dari seluruh persamaan struktural.

   $\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|$ menyatakan nilai absolut dari bentuk deteminan dari matriks turunan parsial yang yang diselesaikan untuk $\boldsymbol{u}$ yang berkaitan dengan variabel endogen $\boldsymbol{y}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \boldsymbol{y}_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial \boldsymbol{y}_n} \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial \boldsymbol{y}_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial \boldsymbol{y}_n} \\ \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial \boldsymbol{y}_1} & \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial \boldsymbol{y}_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{u}_n}{\partial \boldsymbol{y}_n} \end{bmatrix} \quad (3.9.10)$$

$$f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{u}) \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right| \quad (3.9.11)$$

   dimana $\left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right| = |\,\boldsymbol{\Gamma}|$

   Lalu substitusikan persamaan (3.9.9) kedalam persamaan (3.9.11)

$$f(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} (\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \; exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\right)(\boldsymbol{u})^2 \left|\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}}\right|$$

$$f(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} (\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \; |\boldsymbol{\Gamma}| \, exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\right)(\boldsymbol{u})^2 \quad (3.9.12)$$

   Fungsi kemungkinan (*likelihood function*) dari sampel acak berukuran n adalah

$$L(\boldsymbol{y}) = \prod_{1}^{n}\left((2\pi)^{-\frac{M}{2}}(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\,|\,\boldsymbol{\Gamma}|\,exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\right)(\boldsymbol{u})^2\right)$$

$$L(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{Mn}{2}}(\Sigma)^{-\frac{n}{2}}\,|\,\boldsymbol{\Gamma}|^{\mathrm{n}}\ exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{u}\,)^2\right)$$

$$L(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{Mn}{2}}(\Sigma)^{-\frac{n}{2}}\,|\,\boldsymbol{\Gamma}|^{\mathrm{n}}\ exp\left(-\frac{1}{2}(\Sigma)^{-1}\ (\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})\right)$$

$$L(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{Mn}{2}}(\Sigma)^{-\frac{n}{2}}\,|\,\boldsymbol{\Gamma}|^{\mathrm{n}}\ exp\left(-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{u}'(\Sigma)^{-1}\,\boldsymbol{u}\right)$$

$$L(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-\frac{Mn}{2}}(\Sigma)^{-\frac{n}{2}}\,|\,\boldsymbol{\Gamma}|^{\mathrm{n}}\ exp\left(-\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha})'(\Sigma)^{-1}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha})\right) \tag{3.9.13}$$

Fungsi kemungkinan $L(\boldsymbol{y})$ diberi ln, agar memudahkan perhitungan, sehingga logaritma fungsi kemungkinan adalah:

$$\ln L(\boldsymbol{y}) = -\frac{Mn}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\Sigma) + n\,|\boldsymbol{\Gamma}| - \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha})'\,(\Sigma)^{-1}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha}) \tag{3.9.14}$$

3. Memaksimumkan fungsi kemungkinan (*likelihood function*) dengan cara turunan parsial dari fungsi kemungkinan terhadap parameter struktural.

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\,(2\,\mathbf{Z}'\mathbf{y} + 2\,\mathbf{Z}'\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{Z}\,)$$

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -\Sigma^{-1}\,(\,\mathbf{Z}'\mathbf{y} + \mathbf{Z}'\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{Z}\,) \tag{3.9.15}$$

$$\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{n}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha})'\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z\alpha}) \tag{3.9.16}$$

4. Menyamadengankan nol turunan parsial dari fungsi kemungkinan (*likelihood function*) dan selesaikan hasil dari persamaan untuk parameter struktural sehingga diperoleh penaksir yang memaksimumkan fungsi kemungkinan (*likelihood function*).

$$-\Sigma^{-1}\,(\,\mathbf{Z}'\mathbf{y}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\boldsymbol{\alpha}\,)=0 \qquad (3.9.17)$$

$$-\frac{n}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}^{-2}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})=0 \qquad (3.9.18)$$

dengan asumsikan $\boldsymbol{Z}$ matriks nonsingular, maka ada $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}$

$$\left(\mathbf{Z}'\mathbf{y}+\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\boldsymbol{\alpha}\right)=0$$

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{Z}'\mathbf{y}$$

$$(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\,\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\mathbf{Z}'\mathbf{y}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\mathbf{Z}'\mathbf{y} \qquad (3.9.19)$$

$$-\frac{n}{2\boldsymbol{\Sigma}}+\frac{1}{2\boldsymbol{\Sigma}^{2}}\left((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})\right)=0$$

$$-n\,\boldsymbol{\Sigma}\,(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})=-1$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\;=\frac{1}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha}) \qquad (3.9.20)$$

Sehingga diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\;\mathbf{Z}'\,\mathbf{y} \qquad (3.9.19)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}\;=\frac{1}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z\alpha}) \qquad (3.9.20)$$

dengan $\boldsymbol{Z}=[\boldsymbol{Y}\quad \boldsymbol{X}]$ dan $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\;\mathbf{Z}'\,\mathbf{y} \qquad (3.9.21)$$

dan $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ merupakan penaksir dari FIML.

Untuk membuktikan sifat kekonsistenan metode FIML, dapat diperoleh dengan menggunakan variabel instrumen. Menurut Lains (2006: 202), konsep variabel instrumen adalah mencari variabel instrumen untuk setiap variabel penjelas yang masing-masing merupakan wakil dari variabel yang bersangkutan dan variabel instrumen tersebut harus tidak berkorelasi dengan galat tapi berhubungan dengan variabel terikat. Ini dilakukan agar korelasi antara variabel stokastik dengan galat dapat diminimalisir.

Karena dalam persamaan simultan terjadi korelasi antara variabel galat dengan variabel endogen yang muncul sebagai variabel penjelas, untuk menanggulanginya dibuat suatu variabel instrumen. Dalam hal ini, dilakukan penggantian variabel dari variabel endogen $\boldsymbol{Y}$. Sedangkan untuk variabel predetermine $\boldsymbol{X}$ yang bernilai tetap dan tidak berkorelasi dengan galat, maka variabel ini dijadikan sebagai variabel instrumen itu sendiri.

Untuk mengganti variabel endogen $\boldsymbol{Y}$ maka dicari dengan memilih variabel yang tidak berkorelasi dengan galat namun berhubungan dengan variabel endogen $\boldsymbol{Y}$. Misalkan $\boldsymbol{Y}^*$ merupakan variabel instrumen yang diperoleh untuk mengganti variabel endogen $\boldsymbol{Y}$, sehingga diperoleh matriks variabel instrumen $\boldsymbol{W}$, yaitu

$$\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{Y}^*) \tag{3.9.22}$$

Menurut Greene (2003: 397), misalkan $\boldsymbol{W}$ merupakan variabel instrumen dan memilki sifat:

1. $\underset{N\to\infty}{\boldsymbol{p}\,\mathbf{lim}}(\boldsymbol{N}^{-1})\ \boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{wz}}$, ada dan merupakan matriks nonsingular.
2. $\underset{N\to\infty}{\boldsymbol{p}\,\mathbf{lim}}(\boldsymbol{N}^{-1})\ \boldsymbol{W}'\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{ww}}$, ada dan merupakan matriks definit positif.
3. $\underset{N\to\infty}{\boldsymbol{p}\,\mathbf{lim}}(\boldsymbol{N}^{-1})\ \boldsymbol{W}'\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

Perhatikan kembali persamaan (3,9,4) berikut

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{u} \tag{3.9.4}$$

dengan $\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{Y} \quad \boldsymbol{X}]$ dan $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}\\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$

Untuk mendapat variabel instrumen, kalikan model dengan matriks $\boldsymbol{W'}$, dengan $\boldsymbol{W} = [\boldsymbol{X} \quad \boldsymbol{Y}^*]$ sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{yW'} = \boldsymbol{Z\,W'\alpha} + \boldsymbol{W'u} \tag{3.9.23}$$

Jika $\boldsymbol{Z\,W'}$ merupakan matriks nonsingular maka diperoleh penaksir

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\mathbf{y} \tag{3.9.24}$$

Substitusikan persamaan (3.9.4) kedalam (3.9.24) di atas, diperoleh:

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{u})$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u} \tag{3.9.25}$$

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left((\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right)$$

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left((\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{\alpha}\right) + \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left((\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right)$$

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\boldsymbol{\alpha}) + \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left((\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right)$$

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\alpha} + \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left((\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right)$$

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\alpha} \tag{3.9.26}$$

dengan $\operatorname{plim}_{N\to\infty}\left((\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right) = 0$

Bukti:

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left((\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\,\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right) = \operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\right).\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right)$$

dengan,

$$\operatorname*{plim}_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N}(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{Z})^{-\mathbf{1}}\right) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{wz}}^{-\mathbf{1}}$$

$\operatorname{plim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left(\boldsymbol{W}'\boldsymbol{u}\right) = 0$, karena $\boldsymbol{W}$ merupakan variabel instrumen yang terdiri dari $\boldsymbol{Y}^*$ yaitu variabel endogen yang ditransformasi menjadi variabel instrumen sehingga tidak berkorelasi dengan galat dan $\boldsymbol{X}$ variabel predetermine yang tidak berkorelasi dengan galat, maka nilainya nol.

Dengan hasil yang diperoleh bahwa $p\lim_{N\to\infty}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\alpha}$, maka penaksir FIML merupakan penaksir yang konsisten.

Beberapa catatan dari metode FIML sebagai berikut:

1. Meskipun penaksir FIML memiliki sifat konsisten, FIML sebaiknya digunakan untuk sampel berukuran besar.
2. Metode FIML memberikan varians minimum dan efisien dibanding dengan persamaan tunggal lainnya
3. Metode FIML membutuhkan sejumlah data yang besar dan perhitungan yang luas, maka ia adalah metode yang memakan waktu lama dan biaya yang besar. Menurut Gujarati (2012, 390), metode FIML mempunyai hambatan komputasi yang besar dan perhitungannya merupakan pekerjaan yang luar biasa.
4. Gujarati (2012: 390) menjelaskan bahwa metode FIML mempunyai sifat yang sangat sensitif terhadap kesalahan spesifikasi dalam persamaan. Semakin besar ketidaktepatan spesifikasi persamaan, semakin besar kesalahan yang diberikan dalam perkiraan. Jika dalam persamaan terdapat kesalahan spesifikasi misal memilih variabel yang tidak relevan pada suatu persamaan, misalnya variabel independen yang dipilih tidak sesuai dengan kerangka pembentukan variabel terikatnya, maka kesalahannya akan menular ke persamaan lain dalam sistem persamaaan simultan.