BAB III

PEMODELAN ARIMAX-GARCH

1.1 Model ARIMAX

Pada kajian pustaka telah dijelaskan mengenai identifikasi model yang terdiri dari AR, MA, ARMA dan ARIMA. Pada subbab ini akan membahas mengenai identifikasi model lainnya yaitu ARIMAX. Salah satu model runtun waktu yang dapat dipandang sebagai perluasan dari model runtun waktu ARIMA adalah model ARIMAX. ARIMAX adalah model ARIMA dengan variabel eksogen. Variabel eksogen adalah variabel yang nilainya tidak dipengaruhi atau ditentukan oleh variabel lain didalam model. Dalam model ini faktor-faktor yang mempengaruhi variabel dependen Y pada waktu ke-t tidak hanya dipengaruhi oleh fungsi variabel T dalam waktu , tetapi juga oleh variabel-variabel independen lainnya pada waktu ke-t. Model ARIMAX sering juga disebut sebagai metode fungsi transfer atau model fungsi transfer. Menurut Makridakis dkk. (1999) model fungsi transfer adalah suatu model yang menggambarkan nilai dari prediksi masa depan dari suatu deret berkala (disebut deret output atau Y_t) didasarkan pada nilai-nilai masa lalu dari deret itu sendiri (Y_t) dan didasarkan pula pada satu atau lebih deret berkala yang berhubungan (disebut deret input atau X_t) dengan deret output tersebut. Tujuan pemodelan fungsi transfer adalah untuk menetapkan model sederhana yang menghubungkan Y_t dengan X_t dan N_t (*noise*). Bentuk umum model fungsi transfer untuk input tunggal adalah sebagai berikut: (Makridakis dkk:1999)

$$Y_t = v(B)X_t + N_t \tag{3.1}$$

dimana

$$v(B) = (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \cdots + v_k B^k) \tag{3.2}$$

dengan

Y_t adalah deret output

X_t adalah deret input

N_t adalah pengaruh kombinasi dari seluruh faktor yang mempengaruhi Y_t.

Deret input dan output pada persamaan (3.1) dapat ditransformasikan atau diselisihkan agar menjadi stasioner, untuk membedakan persamaan yang telah ditransformasikan dan diselisihkan maka nilai Y_t, X_t dan N_t pada persamaan (3.1) ditulis dengan huruf kecil. Orde dari fungsi transfer adalah k (menjadi orde tertinggi untuk proses pembedaan) dan terkadang nilai k lebih besar dari banyaknya lag pada korelasi silang oleh karena itu nilai k tidak terlalu dibatasi. Berdasarkan hal tersebut, persamaan model fungsi transfer dapat ditulis sebagi berikut :

$$v(B) = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} \tag{3.3}$$

$$n_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} \tag{3.4}$$

$$y_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} x_{t-b} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t \tag{3.5}$$

dengan :

y_t adalah nilai Y_t yang telah ditransformasikan dan didifferensing atau nilai Y_t yang sudah stasioner.

x_t adalah nilai X_t yang telah ditransformasikan dan didifferensing atau nilai X_t yang sudah stasioner.

$\omega_s(B)$ adalah operator *moving average* dengan order s, yang mempresentasikan banyaknya pengamatan masa lalu x_t yang berpengaruh terhadap y_t

$\delta_r(B)$ adalah operator *autoregressive* dari order r, yang mempresentasikan banyaknya pengamatan masa lalu dari deret ouput itu sendiri yang berpengaruh terhadap y_t

$\theta_q(B)$ adalah operator *moving average* dengan orde q

$\phi_p(B)$ adalah operator *autoregressive* denan orde p

a_t adalah nilai residual random.

Model ARIMAX mensyaratkan beberapa kondisi yang harus dipenuhi, antara lain data harus stasioner, baik stasioner dalam rata-rata ataupun stasioner dalam varians. Selain itu, residual dari model tersebut harus bersifat *white noise*.

1.1.1 Identifikasi Model ARIMAX

Tahap identifikasi dilakukan untuk memperoleh model ARIMAX yang tepat untuk menjelaskan atau memodelkan hubungan antara deret input dan deret output. Tahap-tahap yang di lakukan adalah :

a. Tahap pertama

   Mempersiapkan deret input dan deret output yang stasioner. Apabila deret input dan deret output tidak stasioner maka perlu dilakukan transformasi atau melakukan differensi deret tersebut hingga menjadi stasioner. Setelah deret input dan deret output stasioner selanjutnya menentukan model ARIMA untuk deret input tersebut.

b. Tahap kedua

   Menentukan model ARIMA untuk deret input.

c. Tahap ketiga

   Pemutihan deret input (X_t) untuk mendapatkan deret input yang memenuhi asumsi *white noise* (α_t) dan menjadikan deret input menjadi lebih dapat diatur.

$$\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)\alpha_t \qquad (3.6)$$

   dimana α_t adalah deret input yang telah *white noise* dengan mean 0 dan varians σ_α^2. Deret α_t dapat dinyataka sebagai berikut :

$$\alpha_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} x_t \qquad (3.7)$$

   Pemutihan yang dimaksud adalah menghilangkan seluruh pola yang diketahui supaya yang tertinggal hanya *white noise*.

d. Tahap keempat

   Apabila suatu transformasi pemutihan dilakukan untuk x_t maka transformasi yang sama juga harus diterapkan terhadap y_t supaya fungsi transfer dapat memetakan x_t kedalam y_t. Pemutihan deret output (Y_t) untuk mendapatkan deret input yang sudah white noise (β_t).

$$\beta_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} y_t \tag{3.8}$$

e. Tahap kelima

Melakukan perhitungan *Cros-Correlation Function* (CCF) atau korelasi silang dan autokorelasi deret input dan deret output yang telah diputihkan. Korelasi silang antara X dan Y menentukan tingkat hubungan antar nilai X pada waktu t dengan nilai Y pada waktu $t + k$ (Makridakis,1999:456). Koefisien korelasi silang deret input dan deret output untuk lag ke- k didefinisikan sebagai berikut :

$$r_{xy} = \hat{\rho}_{xy}(k) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2 \sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}} \tag{3.9}$$

f. Tahap keenam

Langkah setelah perhitungan korelasi silang adalah penaksiran langsung bobot respon impuls. Bobot respon impuls ini berguna untuk menghitung deret *noise*. Untuk penaksiran bobot impuls secara langsung rumusnya adalah sebagai berikut :

$$v_k = r_{\alpha\beta}(k)\frac{S_\beta}{S_\alpha} \tag{3.10}$$

dimana

$r_{\alpha\beta}(k)$ adalah nilai korelasi silang lag ke-k

S_β adalah standard deviasi dari deret output yang telah diputihkan

S_α adalah standard deviasi dari deret input yang telah diputihkan

g. Tahap ketujuh

Menentukan nilai orde (r,s,b) untuk model ARIMAX berdasarkan plot CCF. Berikut ini beberapa aturan yang dapat digunakan untuk menentukan nilai orde (r,s,b) dari suatu fungsi transfer. (Wei,1994;324)

1) Nilai b menyatakan bahwa y_t tidak dipengaruhi oleh x_t sampai periode $t + b$. Besarnya b dapat ditentukan dari lag yang pertama kali signifikan pada plot korelasi silang.
2) Nilai s menyatakan seberapa lama deret y_t terus dipengaruhi $x_{t-b-1}, x_{t-b-2,} \dots, x_{t-b-s}$ sehingga dapat dikatakan bahwa nilai s adalah bilangan pada lag plot korelasi silang sebelum terjadinya pola menurun.
3) Nilai r menyatakan bahwa y_t dipengaruhi oleh nilai masa lalu dari $y_{t-1}, \dots, y_{t-r}$.
   r = 0 apabila terdapat beberapa lag plot pada korelasi silang yang terpotong.
   r = 1 apabila plot pada korelasi silang menunjukkan suatu pola eksponensial menurun.
   r = 2 apabila plot pada korelasi silang menunjukkan suatu pola ekponensian menurun dan pola sinus.

h. Tahap kedelapan

Penaksiran awal deret gangguan *noise series* (n_t) :

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{v}(B)x_t \qquad (3.11)$$

i. Tahap kesembilan

Setelah menggunakan persamaan deret gangguan n_t, nilai-nilai n_t dianalisis untuk mendapatkan p_n dan q_n yang tepat sehingga diperoleh model ARIMA$(p_n, 0, q_n)$ terbaik.

1.1.2 Estimasi Model ARIMAX

Setelah model ARIMAX teridentifikasi, maka langkah selanjutnya dilakukan estimasi parameter :

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r), \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s), \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p),$$

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q), dan\ \sigma_\alpha^2$$

Berikut ini adalah langkah-langkah untuk menguji signifikansi parameter terhadap model:

a. Perumusan Hipotesis :

H_0 : Estimasi parameter tidak signifikan dalam model

H_1 : Estimasi parameter signifikan dalam model

b. Statistik Uji :

$$t_{hitung} = \frac{estimator}{SE(estimator)} \quad (3.12)$$

c. Kriteria Uji :

Dengan taraf signifikansi α, Tolak H_0 apabila $|t_{hitung}| > t_{\frac{\alpha}{2},df}$ atau apabila menggunakan output E-View tolak H_0 apabila nilai $Probab. < \alpha$.

d. Kesimpulan

Penafsiran H_0 diterima atau ditolak.

1.1.3 Pengujian Diagnostik ARIMAX

Pengujian kelayakan suatu model perlu dilakukan untuk mengetahui kesesuain model yaitu dengan memeriksa residualnya apakah sudah memenuhi syarat *white noise* atau belum. Terdapat dua jenis uji diagnostik terhadap model ARIMAX, yaitu :

a. Pengujian autokorelasi untuk residual, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- Perumusan Hipotesis :

  H_0 : Autokorelasi pada deret sisa tidak signifikan

  H_1 : Autokorelasi pada deret sisa signifikan

- Statistik Uji :

$$Q = (n - r - s - b) \sum_{k=1}^{m} r_{\alpha\alpha}^2(k) \quad (3.13)$$

  dimana n adalah banyaknya pengamatan, m adalah lag terbesar yang diperhatikan, (r,s,b) adalah parameter model fungsi transfer, dan $r_{\alpha\alpha}^2(k)$ adalah autokorelasi residual untuk lag k.

- Kriteria Uji :

Dengan taraf signifikansi α, tolak H_0 apabila $Q \geq \chi^2_{\alpha,df}$, apabila menggunakan output *E-Views* , tolak H_0 apabila apabila nilai $Probab. < \alpha$.

- Kesimpulan
  Penafsiran H_0 diterima atau ditolak.

b. Perhitungan korelasi silang antara nilai sisa dengan deret input yang telah diputihkan, dengan langkah-langkah sebgai berikut :

- Perumusan Hipotesis :
  H_0 : Korelasi silang antara deret a_t dan α_t tidak signifikan
  H_1 : Korelasi silang antara deret a_t dan α_t signifikan
- Statistik Uji :

$$Q = (n - n^*) \sum_{k=1}^{m} r_a^2(k) \qquad (3.14)$$

dimana m adalah lag maksimum , dan n^* adalah nilai $(s + b + p_x)$ dimana p_x adalah banyak parameter AR pada model ARIMA pada deret input.

- Kriteria Uji :
  Dengan taraf signifikansi α, tolak H_0 apabila $Q \geq \chi^2_{\alpha,df}$, apabila menggunakan output *E-Views* , tolak H_0 apabila apabila nilai $Probab. < \alpha$.
- Kesimpulan
  Penafsiran H_0 diterima atau ditolak.

3.2 Model GARCH (*Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*)

Model GARCH merupakan model ARCH dari Robert Engle yang kemudian disempurnakan oleh Tim Bollerslev. Bollerslev mengatakan bahwa varian variabel gangguan tidak hanya tergantung dari residual periode lalu tetapi juga varian variabel gangguan periode lalu. Model GARCH adalah salah satu model runtun waktu yang dapat digunakan untuk menggambarkan sifat dinamik fungsi volatilitas (standar deviasi) dari data. Secara umum model GARCH yakni GARCH (p,q) dapat dinyatakan melalui persamaan sebagai berikut :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \sigma_{t-i}^2 \qquad (3.15)$$

dimana p menunjukan unsur ARCH dan q unsur GARCH. α adalah *error* varians. Sebagaimana model ARCH, model GARCH tidak dapat diestimasi dengan menggunakan metode OLS, sehingga estimasi parameternya dilakukan dengan menggunakan metode *maximum likelihood*.

Hal pertama yang perlu dilakukan pada saat membangun model ARCH-GARCH adalah melakukan uji *Langrange Multiplier* (LM) yang merupakan suatu uji terhadap adanya unsur heterokedastisitas (Nastiti, dkk, 2012). Hal selanjutnya yang dilakukan setelah melakukan uji *Langrange Multiplier* adalah meregresikan residual kuadrat dengan menggunakan konstanta dan nilai residual sampai lag ke m.

$$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p e_{t-p}^2 \qquad (3.16)$$

Apabila terditeksi adanya heteroskedastisitas pada model tersebut, maka hal selanjutnya yang dilakukan adalah penentuan orde GARCH berdasarkan plot PACF dari residual e_t^2.

3.2.1 Estimasi Parameter Model GARCH

Setelah memperoleh beberapa model GARCH, langkah selanjutnya adalah memilih model GARCH terbaik yang dapat digunakan untuk melakukan peramalan. Uji hipotesis untuk estimasi parameter model GARCHadalah sebagai berikut :

a. Perumusan Hipotesis :

   H_0 : Estimasi parameter tidak signifikansi didalam model.

   H_1 : Estimasi parameter signifikansi didalam model.

b. Statistik Uji :

$$t_{hitung} = \frac{estimator}{SE(estimator)} \qquad (3.17)$$

c. Kriteria Uji :

Dengan taraf signifikansi α Tolak H_0 apabila nilai $|t_{hitung}| > t_{\frac{\alpha}{2},df}$.

Namun apabila menggunakan bantuan program *E-Views* , kriteria pengujiannya yaitu tolak H_0 apabila nilai $-value < \alpha$.

d. Kesimpulan

Penafsiran H_0 diterima atau ditolak.

3.2.2 Uji Diagnosis Model GARCH

Setelah mendapatkan model terbaik dari estimasi parameter model GARCH langkah selanjutnya adalah mengevaluasi model GARCH tersebut apakah masih terdapat unsur heteroskedastisitas atau tidak. Evaluasi model GARCH dengan uji ARCH-LM (ARCH *Lagrange Multiplier*) atau uji Ljung-Box. Apabila, model sudah tidak mengnadung unsur heteroskedastisitas maka model tersebut merupakan model terbaik yang akan dipilih untuk melakukan peramalan.

3.3 PEMODELAN ARIMAX-GARCH

Model ARIMAX-GARCH merupakan model ARIMAX yang terditeksi atau terdapat unsur heteroskedastisitas. Langkah-langkah dalam memodelkan ARIMAX-GARCH adalah sebagai berikut :

1. Uji kestasioneran data karena syarat utama pada pemodelan ini adalah data yang diteliti harus merupakan data yang stasioner baik dalam mean ataupun dalam varians.
2. Mengidentifikasi model ARIMAX.
3. Melakukan estimasi parameter model ARIMAX, sehingga diperoleh model yang terbaik dari model-model ARIMAX lainnya.
4. Pengujian diagnostik model ARIMAX.
5. Setelah memperoleh model ARIMAX terbaik, model ARIMAX tersebut harus diperksi apakah mengandung heteroskedastisitas atau tidak. Diharapkan model ARIMAX mengandung heteroskedastisitas, sehingga mendapatkan model ARIMAX-GARCH.

6. Setelah model ARIMAX terditeksi mengandung heteroskedastisitas, selanjutnya melakukan identifikasi model GARCH atau identifikasi model ARIMAX-GARCH.
7. Estimasi parameter model ARIMAX-GARCH serta uji diagnosis model ARIMAX-GARCH apakah masih terdapat unsur heteroskedastisitas atau tidak.

Pemilihan model yang terbaik yaitu model ARIMAX-GARCH yang sudah tidak mengandung unsur heteroskedastisitas. Setelah didapatkan model ARIMAX-GARCH yang sudah tidak mengandung unsur heteroskedastisitas, maka model ARIMAX-GARCH tersebut dapat dipergunakan untuk peramalan.