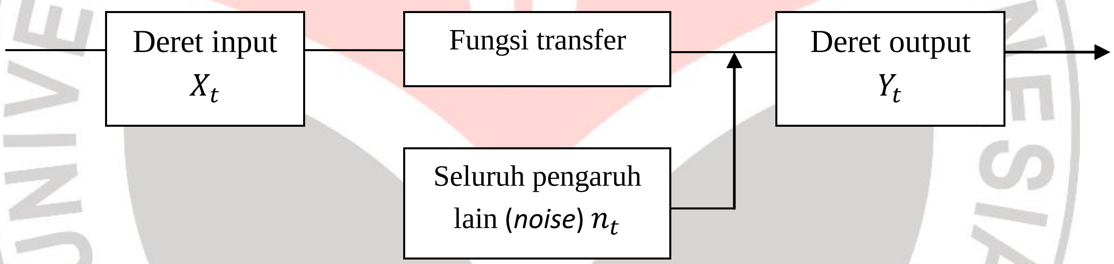
BAB 3

MODEL FUNGSI TRANSFER MULTIVARIAT

Model fungsi transfer multivariat merupakan gabungan dari model *ARIMA* univariat dan analisis regresi berganda, sehingga menjadi suatu model yang mencampurkan pendekatan runtun waktu dengan pendekatan kausal. Beberapa hal yang berkaitan dengan model fungsi transfer antara lain runtun waktu output, dinamakan Y_t dan yang diperkirakan akan dipengaruhi oleh runtun waktu input, dinamakan X_t, serta input-input lain yang digabungkan dalam satu kelompok yang dinamakan gangguan (*noise*) n_t. Seluruh sistem tersebut merupakan sistem yang dinamis, dengan kata lain deret input memberikan pengaruhnya kepada deret output melalui transfer. Konsep fungsi transfer ditunjukan pada gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1

Skema Fungsi Transfer

3.1 Model Fungsi Transfer

Bentuk umum model fungsi transfer tunggal adalah sebagai berikut: (Makridakis, dkk:1999:448)

$$Y_t = v(B)X_t + n_t \tag{3.1}$$

dengan

Y_t menyatakan deret output

X_t menyatakan deret input

n_t menyatakan pengaruh kombinasi dari seluruh faktor yang mempengaruhi Y_t

$v(B) = (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \cdots + v_k B^k)$ adalah orde fungsi transfer

Deret input dan output pada persamaan (3.1) dapat ditransformasikan atau diselisihkan agar menjadi stasioner, untuk membedakan persamaan yang telah ditransformasi dan diselisihkan maka nilai X_t, Y_t, dan N_t pada persamaan (3.1) ditulis dengan huruf kecil.

Orde dari fungsi transfer adalah k (menjadi orde tertinggi untuk proses pembedaan) dan terkadang nilai k lebih besar dari banyaknya lag pada korelasi silang oleh karena itu nilai k tidak terlalu dibatasi. Berdasarkan informasi tersebut maka persamaan fungsi transfer dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \tag{3.2}$$

$$n_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \tag{3.3}$$

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \tag{3.4}$$

Dengan

$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \cdots - \omega_s B^s$,

$\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \cdots - \delta_r B^r$,

$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$,

$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$,

y_t menyatakan nilai Y_t yang telah ditransformasi dan diselisihkan

x_t menyatakan nilai X_t yang telah ditransformasi dan diselisihkan

a_t menyatakan nilai gangguan random

r,*s*,*p*,*q*,*b* menyatakan konstanta

Pada fungsi transfer multivariat atau multi input ada beberapa variabel input X yang dimasukkan pada suatu pemodelan. Bentuk umum persamaan fungsi transfer multivariat adalah sebagai berikut:(Wei, 1990:362)

$$y_t = \sum_{j=1}^{k} v_j(B)x_{jt} + n_t \qquad (3.5)$$

$v_j(B) = \frac{\omega_j(B)B^{bj}}{\delta_j(B)}$ fungsi transfer ke-j untuk deret input x_{jt}, j = 1,2,…,k.

Persamaan (3.5) dapat pula dinyatakan sebagai berikut:

$$y_t = \sum_{j=1}^{m} \left[\delta_j(B)\right]^{-1} \omega_j(B)B^{jt}x_{jt} + [\phi(B)]^{-1}\theta(B)a_t \qquad (3.6)$$

y_t menyatakan variabel dependen,

x_{jt} menyatakan variabel independen ke-j

$\omega_j(B)$ menyatakan operator *moving average* orde s_j untuk variabel ke-j

$\delta_j(B)$ menyatakan operator *autoregressive* orde r_j untuk variabel ke-j

$\theta(B)$ menyatakan operator *moving average* orde q

$\phi(B)$ menyatakan operator *autoregressive* orde p

a_t menyatakan nilai gangguan acak

Jika deret input x_{it} dan x_{jt} tidak berkorelasi untuk i ≠ j, maka analisis dan perhitungan sama seperti model fungsi transfer input tunggal sedangkan untuk deret multivariat x_{jt} dengan i ≠ j yang saling berkorelasi maka dilakukan analisis korelasi silang (*cross correlation*) antar runtun waktu untuk mengetahui deret mana yang harus dikeluarkan dari model.

3.2 Prosedur Menentukan Model Fungsi Transfer Multivariat

Tahap-tahap dalam pemodelan fungsi transfer multivariat untuk deret input (X_t) dan deret output (Y_t) adalah dengan cara mengidentifikasi deret input tunggal terlebih dahulu supaya mendapatkan orde model *ARIMA*. Setelah didapatkan model *ARIMA* untuk deret input tunggal dan deret output selanjutnya dilakukan pemutihan dan dilanjutkan dengan perhitungan korelasi silang untuk masing-masing deret input dengan output yang berguna untuk menentukan nilai r, s, b. Sebagaimana Liu dan Hanssensn (1982) menyarankan suatu prosedur identifikasi simultan yang menggunakan kuadrat terkecil untuk mengestimasi bobot respon impuls. Setelah estimasi bobot-bobot respon impuls diperoleh baru dapat mengidentifikasi bentuk model fungsi transfer dan *noise* gabungan. Berikut dipaparkan prosedur pemodelan fungsi transfer multivariat. (Makridakis, dkk:1999:450)

3.2.1 Tahap Pertama : Identifikasi Bentuk Model Input Tunggal

1) Mempersiapkan deret input dan output

Pada tahap ini yang perlu dilakukan adalah mengidentifikasi kestasioneran deret input dan deret output. Untuk menghilangkan ketidakstasioneran maka perlu mentransformasi atau melakukan pembedaan deret-deret input dan output.

Deret data yang telah di transformasi dan telah sesuai, kemudian disebut x_t dan y_t. Atau bisa disimpulkan bahwa di tahap ini perlu diadakan pengecekan kestasioneran untuk melanjutkan ka tahap selanjutnya, yaitu dengan melakukan pembedaan terhadap nilai X_t dan Y_t menjadi x_t dan y_t dengan persamaan :

$$(1-B)X_t = x_t \tag{3.7}$$

$$(1-B)Y_t = y_t \tag{3.8}$$

2) Pemutihan deret input

Pemutihan deret input bertujuan untuk menjadikan deret input menjadi lebih dapat diatur dengan menghilangkan seluruh pola yang diketahui supaya yang tertinggal hanya *white noise*. Pemutihan deret input x_t dengan proses *ARIMA* $(p_x, 0, q_x)$ adalah

$$\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)\alpha_t \tag{3.9}$$

Mengubah deret input x_t menjadi deret α_t sebagai berikut:

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}x_t = \alpha_t \tag{3.10}$$

3) Pemutihan deret output

Apabila suatu transformasi pemutihan dilakukan untuk x_t maka transformasi yang sama juga harus diterapkan terhadap y_t supaya fungsi transfer dapat memetakan x_t kedalam y_t. Transformasi pada y_t tidak harus mengubah y_t menjadi *white noise*. Berikut merupakan deret y_t yang telah diputihkan:

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} y_t = \beta_t \tag{3.11}$$

4) Perhitungan korelasi silang dan autokorelasi deret input dan deret output yang telah diputihkan.

Kovarian antara dua variabel X dan Y ditetapkan sebagai berikut:

$$C_{xy} = E\{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})\}$$

Dengan bentuk ini didapatkan dua ragam yaitu C_{xx} dan C_{yy}. Sekarang dengan memasang subskrip waktu di bawah variabel X dan Y dan dengan memisalkan k sebagai *time lag*. Kovarians silang $C_{xy}(k)$ dan $C_{yx}(k)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{xy}(k) = E\{(X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y})\} \tag{3.12}$$

$$C_{yx}(k) = E\{(Y_t - \bar{Y})(X_{t+k} - \bar{X})\} \tag{3.13}$$

Dimana $k = 0,1,2,3, \ldots$ dan setererusnya. Persamaan (3.12) dan (3.13) didefinisikan sebagai ekspektasi. Dalam praktek, taksiran kovarians-silang dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}) \tag{3.14}$$

$$C_{yx}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(Y_t - \bar{Y})(X_{t+k} - \bar{X}) \tag{3.15}$$

Kovarians silang kemudian diubah menjadi korelasi silang dengan membagi kovarians tersebut oleh dua standar deviasi sebagai berikut:

$$r_{xy}(k) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2 \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}} = \frac{C_{xy}(k)}{S_x S_y} \tag{3.16}$$

Rumus *standar error* berikut berguna untuk memeriksa apakah $r_{xy}(k)$ berbeda nyata dari nol dengan membandingkan nilai $r_{xy}(k)$ dengan *standar error*. (Wei, 1990:330)

$$SE_{r_{xy(k)}} = \frac{1}{\sqrt{n-k}} \quad (3.17)$$

Didalam model fungsi transfer multivariat perhitungan korelasi silang pada masing-masing input x terhadap output y digunakan untuk mengetahui nilai r, s, b yang diidentifikasi dari plot korelasi silang. Setelah didapatkan nilai r, s, b pada masing-masing input maka barulah dilakukan korelasi silang serentak antara nilai y terhadap seluruh variabel inputnya.

5) Penaksir langsung bobot respon impuls

Langkah selanjutnya setelah perhitungan korelasi silang adalah penaksiran nilai bobot respon impuls. Bobot respon impuls ini berguna untuk menghitung deret *noise*. Untuk penaksiran bobot respon impuls secara langsung rumusnya adalah sebagai berikut:

$$v_k = r_{\alpha\beta}(k)\frac{S_\beta}{S_\alpha} \quad (3.18)$$

dengan

$r_{\alpha\beta}(k)$ menyatakan nilai dari korelasi silang lag ke-k

S_β menyatakan standar deviasi dari deret output yang telah diputihkan

S_α menyatakan standar deviasi dari deret input yang telah diputihkan

6) Penetapan (r, s, b) untuk model fungsi transfer yang menghubungkan deret input dan deret output

Tiga parameter kunci dalam model fungsi transfer adalah (r, s, b) dimana r menunjukkan derajat fungsi $\delta(B)$, s menunjukkan derajat fungsi $\omega(B)$ dan b menunjukkan keterlambatan yang dicatat pada x_{t-b} pada persamaan

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)}x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\alpha_t \quad (3.19)$$

Berikut ini beberapa aturan yang dapat digunakan untuk menduga nilai r, s, b dari suatu fungsi transfer.(Wei,1994:324)

a. Nilai b menyatakan bahwa y_t tidak dipengaruhi oleh x_t sampai periode $t + b$. Besarnya b dapat ditentukan dari lag yang pertama kali signifikan pada plot korelasi silang. Nilai ini merupakan nilai yang paling mudah ditentukan apabila korelasi silang diperoleh dari $r_{\alpha\beta}(0) = r_{\alpha\beta}(1) = r_{\alpha\beta}(2) = 0$ tetapi $r_{\alpha\beta}(3) = 0{,}5$ maka dapat ditentukan $b = 3$, dengan kata lain terdapat tiga periode sebelum runtun waktu input α mulai mempengaruhi runtun waktu output β.

b. Nilai s menyatakan seberapa lama deret y_t terus dipengaruhi $x_{t-b-1}, x_{t-b-2}, \dots, x_{t-b-s}$ sehingga dapat dikatakan bahwa nilai s adalah bilangan pada lag plot korelasi silang sebelum terjadinya pola menurun.

c. Nilai r menyatakan bahwa yt dipengaruhi oleh nilai masa lalunya $y_{t-1}, \dots, y_{t-r}$.

   $r = 0$ bila ada beberapa lag plot pada korelasi silang yang terpotong.

   $r = 1$ bila plot pada korelasi silang menunjukan suatu pola eksponensial menurun.

   $r = 2$ bila plot pada korelasi silang menunjukan suatu pola eksponensial menurun dan pola sinus.

Berikut beberapa bentuk fungsi transfer yang umum digunakan dalam peramalan:

Tabel 3.1 Model Fungsi Transfer dengan $r = 0$

(r, s, b)	Fungsi Transfer
(0,0,2)	$v(B)x_t = \omega_0 x_{t-2}$
(0,1,2)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1)x_{t-2}$
(0,2,2)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)x_{t-2}$

Tabel 3.2 Model Fungsi Transfer dengan $r = 1$

(r, s, b)	Fungsi Transfer
(1,0,2)	$v(B)x_t = \dfrac{\omega_0}{(1-\delta_1 B)} x_{t-2}$
(1,1,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1-\delta_1 B)} x_{t-2}$
(1,2,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1-\delta_1 B)} x_{t-2}$

Tabel 3.3 Model Fungsi Transfer dengan $r = 2$

(r, s, b)	Fungsi Transfer
(2,0,2)	$v(B)x_t = \dfrac{\omega_0}{(1-\delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$
(2,1,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1-\delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$
(2,2,2)	$v(B)x_t = \dfrac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1-\delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$

7) Penaksir awal deret gangguan (n_t)

Bobot respon impuls diukur secara langsung dan ini memungkinkan dilakukannya perhitungan nilai taksiran dari deret gangguan n_t dengan.

$$n_t = y_t - \hat{y}_t \tag{3.20}$$

$$= y_t - \frac{\hat{\omega}(B)}{\hat{\delta}(B)} B^b x_t \tag{3.21}$$

$$= y_t - \hat{v}(B) x_t \tag{3.22}$$

$$= y_t - v_0 x_t - v_1 x_{t-1} - v_2 x_{t-2} - \cdots - v_g x_{t-g} \tag{3.23}$$

8) Penetapan (p_n, q_n) untuk model *ARIMA* $(p_n, 0, q_n)$ dari deret gangguan n_t

Sesudah menggunakan persamaan deret gangguan n_t nilai-nilai n_t dianalisis dengan cara *ARIMA* biasa untuk menentukan model *ARIMA* yang tepat sehingga diperoleh nilai p_n dan q_n. Dengan cara ini fungsi $\phi_n(B)$ dan $\theta_n(B)$ untuk deret gangguan n_t dapat diperoleh untuk mendapatkan persamaan

$$\phi_n(B)n_t = \theta_n(B)a_t \quad (3.24)$$

3.2.2 Tahap Kedua : Penaksiran Parameter-parameter Model Fungsi Transfer

Setelah mendapatkan model fungsi *ARIMA* dan model *MARIMA* dari deret *noise* maka akan dapat menghasilkan suatu model fungsi transfer. Contoh berikut adalah pengaplikasian model fungsi transfer dan *ARIMA* untuk deret *noise*.

Contoh:

Misal digunakan model fungsi transfer (2,2,2) dan ARIMA (2,0,1).

$$y_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2} + \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)} a_t \quad (3.25)$$

Di tahap inilah nilai-nilai dari ω_n, δ_n, ϕ_n, dan θ_n akan ditaksir. Taksiran didapat dengan cara mensubstitusikan persamaan khusus seperti berikut:

$v_j = 0$ untuk j < b

$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} + \omega_0$ untuk j = b (3.26)

$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r} + \omega_{j-b}$ untuk j = b+1,…,b+s

$v_j = \delta_1 v_{j-1} + \cdots + \delta_r v_{j-r}$ untuk j > b+s

Dan jika rumus ini digunakan dengan menggunakan contoh dari model fungsi transfer pada persamaan (3.25) dengan nilai $r = 2$, $s = 2$ dan $b = 2$, maka akan menghasilkan rumus:

$v_0 = 0$ (1)

$v_1 = 0$ (2)

$v_2 = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_0 + \omega_0$ (3)

$v_3 = \delta_1 v_2 + \delta_2 v_1 - \omega_1$ (4)

$v_4 = \delta_1 v_3 + \delta_2 v_2 - \omega_2$ (5) (3.27)

$v_5 = \delta_1 v_4 + \delta_2 v_3$ (6)

$v_6 = \delta_1 v_5 + \delta_2 v_4$ (7)

$v_7 = \delta_1 v_6 + \delta_2 v_5$ (8)

Dengan menggunakan pembobotan impuls, maka akan didapat nilai-nilai parameter yang diperlukan dengan cara mensubstitusikannya.

3.2.3 Tahap Ketiga : Uji Diagnosis Model Fungsi Transfer Tunggal

Pada tahap ini diperlukan pengecekan deret gangguan n_t dan hubungan deret n_t dengan α_t. Deret n_t yang sudah didapat melalui tahap 1 dan 2, secara umum bentuk prosedurnya adalah:

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

Bila dikalikan dengan $\delta(B)\phi(B)$ diperoleh

$$\delta(B)\phi(B) y_t = \omega(B)\phi(B) x_{t-b} + \delta(B)\theta(B) a_t$$

Contoh berikut adalah tahap-tahap penguraian menjadi persamaan a_t.

Contoh:

Misal digunakan model fungsi transfer (1,1,b) dan *ARIMA*(1,1):

$$y_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1-\delta_1 B)} x_{t-b} + \frac{(1-\theta_1 B)}{(1-\phi_1 B)} a_t$$

Yang dilanjutkan dengan mengkalikan tiap parameternya menjadi

$$(1-\delta_1 B)(1-\phi_1 B) y_t = (1-\phi_1 B)(\omega_0 - \omega_1 B) x_{t-b} + ((1-\delta_1 B)(1-\theta_1 B)) a_t$$

Kemudian dengan melakukan peraturan perkalian maka y_t menjadi

$$(1-\phi_1 B - \delta_1 B + \delta_1 \phi_1 B^2) y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_0 \phi_1 B + \omega_1 \phi_1 B^2) x_{t-b} + (1 - \theta_1 B - \delta_1 B + \theta_1 \delta_1 B^2) a_t$$

$$(1-(\phi_1 + \delta_1) B + \delta_1 \phi_1 B^2) y_t = (\omega_0 - (\omega_1 + \omega_0 \phi_1) B + \omega_1 \phi_1 B^2) x_{t-b} + (1 - (\theta_1 + \delta_1) B + \theta_1 \delta_1 B^2) a_t$$

$$y_t - (\phi_1 + \delta_1)y_{t-1} + (\delta_1\phi_1)y_{t-2} = (\omega_0)x_{t-b} - (\omega_1 + \omega_0\phi_1)x_{t-b-1} + (\omega_1\phi_1)x_{t-b-2} + a_t - (\theta_1 + \delta_1)a_{t-1} + (\theta_1\delta_1)a_{t-2}$$

$$y_t = (\phi_1 + \delta_1)y_{t-1} - (\delta_1\phi_1)y_{t-2} + (\omega_0)x_{t-b} - \left(\omega_1 + \omega_0\phi_1\right)x_{t-b-1} + \left(\omega_1\phi_1\right)x_{t-b-2} + a_t - (\theta_1 + \delta_1)a_{t-1} + (\theta_1\delta_1)a_{t-2} \quad (3.28)$$

Pada akhirnya persamaan (3.28) dapat digunakan untuk peramalan, tetapi masih ada parameter yang kurang yang harus dicari yaitu a_t, sehingga melalui pengaturan kembali, maka persamaan a_t dapat dicari

$$a_t = y_t - (\phi_1 + \delta_1)y_{t-1} + (\delta_1\phi_1)y_{t-2} - (\omega_0)x_{t-b} + (\omega_1 + \omega_0\phi_1)x_{t-b-1} - (\omega_1\phi_1)x_{t-b-2} + (\theta_1 + \delta_1)a_{t-1} - (\theta_1\delta_1)a_{t-2} \quad (3.29)$$

3.2.4 Tahap Keempat : Penentuan Model Fungsi Transfer Multivariat

Pemodelan fungsi transfer multivariat dilakukan dengan cara memodelkan secara serentak seluruh variabel yang sudah diidentifikasi sebelumnya. Identifikasi nilai-nilai bobot respon impuls dan korelasi silang dijadikan dasar dalam pemodelan serentak yang menghasilkan fungsi transfer multivariat. Cara yang dilakukan dalam model fungsi transfer multivariat sama halnya yang dilakukan pada model input tunggal. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut :

1) Mengidentifikasi deret input dan output untuk mengetahui kestasioneran dan menentukan orde model *ARIMA*.
2) Menghitung estimasi parameter model *ARIMA* yang sesuai untuk masing-masing deret input. Lalu dilakukan uji untuk mengetahui model memenuhi proses *white noise* atau belum.
3) Dilakukan korelasi silang untuk masing-masing deret input terhadap deret output. Korelasi silang berguna untuk menghitung deret *noise* dan juga menentukan orde model fungsi transfer yakni dengan mengidentifikasi plot korelasi silang.

4) Menentukan nilai r, s, b pada masing-masing deret dan menghitung nilai gangguan (n_t) sehingga model fungsi transfer input tunggal selesai terbentuk. Tahapan tersebut merupakan pembentukan model fungsi transfer input tunggal.

Sedangkan untuk model fungsi transfer multivariat dilakukan dengan cara :

5) Nilai r, s, b masing-masing deret input yang telah didapat lalu dilakukan estimasi secara serentak.
6) Sedangkan nilai gangguan gabungannya didapat dari rumus

$$n_t = y_t - \hat{y}_t$$
$$= y_t - \sum_{j=1}^{k} \hat{v}_j(B)x_{jt} \quad (3.30)$$

Nilai-nilai (r, s, b) yang telah diidentifikasi dalam model fungsi transfer input tunggal dijumlahkan sehingga model multivariat menjadi

$$y_t = \sum_{j=1}^{m} \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} B^{bj} x_{jt} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (3.31)$$