BAB III

MODEL ARIMAX DENGAN EFEK VARIASI KALENDER

3.1 Model Variasi Kalender

Liu (Kamil 2010: 10) menjelaskan bahwa untuk data runtun waktu yang mengandung efek variasi kalender, Z_t dituliskan pada persamaan berikut:

$$Z_t = f(\omega_t, X_t) + N_t \qquad ...(3.1)$$

dengan

$$N_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)(1-B)^d}\alpha_t \qquad ...(3.2)$$

dan

$f(\omega_t, X_t)$: total efek variasi kalender pada saat t

$\phi_p(B)$: koefisien komponen AR non musiman dengan derajat p

$\theta_q(B)$: koefisien komponen MA non musiman dengan derajat q

$(1-B)^d$: operator untuk *differencing* orde d

X_t : matriks yang berisi variabel $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}$ sebagai suatu informasi variasi kalender

ω_t : vektor parameter yang menggambarkan efek variasi kalender

a_t : nilai residual pada saat t, dimana $\alpha_t \sim iid\ N(0, \sigma_\alpha^2)$ dan $t = 1, 2, \dots, n$

Operator $(1-B)^d$, $\phi_p(B)$, dan $\theta_q(B)$ dapat berbentuk sederhana ataupun multiplikatif. Secara umum, variasi kalender terbagi menjadi dua yaitu efek hari perdagangan (*Trading Day Effect*) dan efek hari libur (*Holiday Effect*). Pada penelitian ini pemodelan yang digunakan adalah variasi kalender hijriyah (islam) dengan adanya efek liburan hari raya Idul Fitri (Lebaran).

3.1.1 Model Efek Hari Liburan (*Holiday Effect*)

Liu (Kamil, 2010: 11) memberikan model efek liburan sebagai berikut:

$$f(\alpha_1, H_{1t}) = \alpha_1 H_{1t} \qquad \text{...(3.3)}$$

Jika efek disebabkan oleh hari libur lebih spesifik, variabel H_{1t} menunjukkan proporsi dari hari libur pada tahun ke-t. Jika efek hari libur mengalami penurunan ataupun peningkatan secara linier dari tahun ke tahun, maka model yang digunakan adalah:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, H_{1t}, H_{2t}) = \alpha_1 H_{1t} + \alpha_2 H_{2t} \qquad \text{...(3.4)}$$

dengan $H_{2t} = H_{1t}.K_t$. K_t bernilai 1 untuk pengamatan di tahun pertama, 2 untuk pengamatan di tahun kedua, dan seterusnya. Model di atas dapat berkembang menjadi bentuk kuadratik maupun bentuk polynomial yang lebih tinggi.

3.1.2 Model ARIMAX untuk Variasi Kalender

Pemodelan runtun waktu dengan menambahkan beberapa variabel yang dianggap memiliki pengaruh yang signifikan terhadap data seringkali dilakukan untuk menambah akurasi peramalan yang dilakukan dalam suatu penelitian. Model ARIMAX adalah modifikasi dari model dasar ARIMA *seasonal* dengan penambahan variabel eksogen (Chan dan Chan, 2008). Model ARIMA *seasonal* umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$Z_t = \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^S)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D}\,\alpha_t \qquad \text{...(3.5)}$$

Efek variasi kalender merupakan salah satu variabel *dummy* yang seringkali digunakan dalam pemodelan tersebut. Secara umum, jika Z_t adalah suatu runtun waktu dengan efek variasi kalender, maka model ARIMAX dengan efek variasi kalender ditulis sebagai berikut.

$$Z_t = \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \cdots + \beta_p X_{p,t} + \frac{\theta_q(B)\Theta_Q(B^S)}{\phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D}\,\alpha_t \qquad \text{...(3.6)}$$

Pemodelan (3.6) terdiri dari variabel respon, yaitu data runtun waktu dan variasi kalender yang berperan sebagai variabel *dummy*.

3.2 Langkah Analisis

Langkah penyelesaian analisis dengan menggunakan ARIMAX model efek variasi kalender (Rasyid, 2009; Perdana, 2010; Rusianto, 2010; Dini, 2012) adalah sebagai berikut :

1. Melakukan identifikasi model dengan tujuan untuk mengetahui apakah Z_t dipengaruhi oleh waktu dan fenomena bulan lebaran. Identifikasi ini dilakukan secara visual dengan mengecek plot data runtun waktu.
2. Menganalisis pemodelan-pemodelan yang mungkin dengan variabel prediktor *dummy* untuk menangkap fenomena bulan lebaran.
3. Melakukan penaksiran parameter, pengujian signifikansi dan pemodelan data runtun waktu.
4. Melakukan pemeriksaan diagnostik sehingga proses stasioner dan residual dari model mencapai kondisi *white noise*, berdistribusi normal, identik, dan independen.
5. Melakukan evaluasi model dengan kriteria *Akaike's Information Criterion* (AIC) dan *Scwartz's Bayesian Criterion* (SBC).
6. Melakukan peramalan.

3.3 Penaksiran Parameter Model Variasi Kalender

Bentuk umum model variasi kalender adalah sebagai berikut:

$$Z_t = \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \cdots + \beta_p X_{p,t} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}\, \alpha_t \quad \text{...(3.7)}$$

dengan

$\phi_p(B)$: koefisien komponen AR dengan derajat p

$\theta_q(B)$: koefisien komponen MA dengan derajat q

Langkah berikutnya ialah menaksir parameter β, θ, dan ϕ, sehingga persamaan di atas dapat dibentuk menjadi sebagai berikut:

$$Z_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}\, \alpha_t$$

$$\phi_p(B) Z_t = \left(\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp}\right)\phi_p(B) + \theta_q(B)\, \alpha_t$$

$$\theta_q(B)\,\alpha_t \quad = \phi_p(B)Z_t - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp}\right)\phi_p(B)$$

$$\begin{aligned}\left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right)\alpha_t \quad &= \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right)Z_t \\ &\quad -\left(\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp}\right) \\ &\quad \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_t - \theta_1\alpha_{t-1} - \theta_2\alpha_{t-2} - \cdots - \theta_q\alpha_{t-q} &= Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} \\ &\quad -\left(\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp}\right) \\ &\quad \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \theta_1\alpha_{t-1} + \theta_2\alpha_{t-2} + \cdots + \theta_q\alpha_{t-q} + Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} \\ &\quad - \cdots - \phi_p Z_{t-p} - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_p x_{tp}\right) \\ &\quad \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right)\end{aligned} \qquad \text{...(3.8)}$$

dengan α_t merupakan residual *white noise* yang berdistribusi normal $N(0, \sigma_a^2)$. Metode estimasi parameter yang digunakan untuk menaksir parameter model variasi adalah estimasi *Nonlinear Least Squares*. Sedangkan untuk mengestimasi parameter tersebut adalah dengan meminimumkan nilai jumlah kuadrat residual (Kamil, 2010: 15).

3.4 Pengujian Signifikansi Parameter

Untuk mengetahui apakah hasil penaksiran parameter model variasi kalender signifikan atau tidak, dilakukan pengujian signifikansi parameter. Pengujian ini digunakan untuk mengetahui apakah setiap variabel yang digunakan berpengaruh pada Z_t atau tidak. Pengujian hipotesis dilakukan dengan menggunakan uji t. Sebagai contoh, parameter dari MA adalah θ. Hipotesis yang akan diuji adalah sebagai berikut

H_0 : $\theta_q = 0$ (Variabel α_{t-q} tidak berpengaruh pada Z_t)

H_1 : $\theta_q \neq 0$ (Variabel α_{t-q} berpengaruh pada Z_t)

Statistik uji

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\theta}}{\widehat{SE}(\theta)} \quad ...(3.9)$$

Tolak H_0 jika nilai $|t_{hitung}| > t_{tabel}$, atau tolak H_0 jika *p-value* $< \alpha$, dengan α adalah tingkat sigifikansi.

3.5 Pemeriksaan Diagnostik

Wei (Kamil, 2010: 16) mengatakan bahwa "Setelah diperoleh model dengan semua parameter yang telah signifikan, selanjutnya dilakukan cek diagnostik yaitu pengujian untuk mengetahui apakah residual telah memenuhi asumsi *white noise* dan berdistribusi normal. Pengujian terdiri dari uji asumsi residual *white noise* dan berdistribusi normal".

3.5.1 *White Noise*

Proses α_t disebut proses *white noise* apabila tidak ada korelasi dalam variabel acak dengan nilai mean konstan $E(\alpha_t) = \mu_\alpha$, biasanya diasumsikan sebagai nol, varians konstan $var(\alpha_t) = \sigma_\alpha{}^2$ dan $\gamma_k = Cov(\alpha_t, \alpha_{t+k}) = 0$ untuk $k \neq 0$. Dari definisi tersebut, dapat diketahui bahwa proses *white noise* adalah stasioner dengan fungsi autokovarian. Untuk menguji asumsi ini dapat dilakukan dengan menggunakan uji Ljung-Box. Hipotesis yang digunakan dalam pengujian ini adalah sebagai berikut:

H_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$

H_1 : terdapat $\rho_i \neq \rho_j$; $i, j = 1, 2, \dots, k; i \neq j$

Statistik uji yang digunakan dalam pengujian ini adalah statistik uji Ljung-Box seperti pada persamaan berikut:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{k} \frac{\hat{\rho}_k}{n-k} \quad ...(3.10)$$

dengan n adalah banyak pengamatan dan $\hat{\rho}_k$ menunjukkan ACF residual pada lag ke-k. H_0 ditolak jika nilai $Q > \chi^2{}_{(1-\alpha);df=k-m}$ dengan m adalah banyaknya parameter atau dengan menggunakan *p-value*, yakni tolak H_0 jika *p-value* $< \alpha$ (Wei, 2002, 2006).

3.5.2 Distribusi Normal

Banyak peramalan yang mensyaratkan distribusi data yang normal sehingga asumsi normalitas berperan penting dalam peramalan. Untuk melihat distribusi data memenuhi asumsi normalitas atau tidak dapat dilakukan dengan melihat plot residual atau dapat juga dilakukan dengan pengujian Kolmogorov-Smirnov.

Jika residual tersebar di sekitar garis, artiya residual berdistribusi normal. Jika residual tersebar tidak di sekitar garis, artiya residual tidak berdistribusi normal.

Uji Kolmogorov-Smirnov biasa digunakan untuk memutuskan jika sampel berasal dari populasi dengan distribusi spesifik/tertentu. Uji Kolmogorov-Smirnov ini digunakan untuk menguji *'goodness of fit'* antar distribusi sampel dan distribusi lainnya, Uji ini membandingkan serangkaian data pada sampel terhadap distribusi normal serangkaian nilai dengan mean dan standar deviasi yang sama. Singkatnya uji ini dilakukan untuk mengetahui kenormalan distribusi beberapa data. uji Kolmogorov-Smirno*v* merupakan uji yang lebih kuat daripada uji *chi-square* ketika asumsi-asumsinya terpenuhi. Uji Kolmogorov-Smirnov juga tidak memerlukan asumsi bahwa populasi terdistribusi secara normal.

Di bawah ini merupakan cara pengujian kenormalan data dengan uji Kolmogorov-Smirnov:

Hipotesis :

$H_0 : F(x) = F_0(x)$ (Residual berdistribusi normal)

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ (Residual tidak berdistribusi normal)

Statistik uji :

$$D = SUP\ X\ |S(x) - F_0(x)| \qquad \text{...(3.11)}$$

dimana :

$S(x)$: Fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel

$F_0(x)$: Fungsi peluang kumulatif dari distribusi normal

$SUP\ X$: Nilai supremum untuk semua x dari $|S(x) - F_0(x)|$

dengan kriteria : Tolak H_0 jika $D > D_{(1-\alpha,n)}$ atau $p - value < \alpha$ (Daniel, 1989; Chakravart, Laha, dan Roy, 1967).

3.6 Evaluasi Model

Pada analisis runtun waktu, ada kemungkinan bahwa terdapat lebih dari satu model yang parameternya signifikan dan memenuhi asumsi residual *white noise* maupun berdistribusi normal. Hal ini mendorong para peneliti melakukan suatu proses untuk memilih model terbaik yang dinamakan evaluasi model. Evaluasi model digunakan untuk melakukan pemilihan model terbaik dari beberapa kemungkinan model runtun waktu yang didapatkan. Untuk pemilihan model, Wei (Dini, 2012: D231) memberikan kriteria yang digunakan yaitu *Akaike's Information Criterion* (AIC) dan *Scwartz's Bayesian Criterion* (SBC).

$$AIC(M) = n \ln \hat{\sigma}_{\alpha}^{2} + 2M \qquad \text{...(3.12)}$$

$$SBC(M) = n \ln \hat{\sigma}_{\alpha}^{2} + M \ln n \qquad \text{...(3.13)}$$

dimana

M : Jumlah parameter

n : Banyak residual

$\hat{\sigma}_{\alpha}^{2}$: Varians dari residual