

BAB III

Masalah Penugasan Multi Objektif untuk Meminimumkan Biaya Produksi, Waktu Produksi, dan Kualitas Produk

Masalah penugasan multi objektif adalah suatu masalah penugasan yang memiliki lebih dari satu tujuan untuk dioptimalkan terhadap beberapa jenis sumber daya yang dimiliki oleh pekerja dalam menyelesaikan suatu tugas. Penyelesaian masalah penugasan multi objektif ditujukan untuk mencari solusi yang optimal dari suatu kasus penugasan. Biasanya masalah ini ditemukan pada perusahaan-perusahaan produksi diantaranya adalah pengoptimalan biaya produksi, biaya pengiriman produk, waktu produksi, jarak pengiriman produk, kualitas produk, dan lain-lain. Penelitian ini membahas masalah penugasan multi objektif dengan tiga fungsi tujuan yang akan dioptimalkan yaitu biaya produksi, waktu produksi, dan kualitas produk yang dihasilkan.

3.1 Model

Pada bagian ini akan diturunkan model optimisasi masalah penugasan multi objektif. Model optimisasi yang akan dibangun terdiri dari tiga fungsi tujuan dengan sejumlah kendala yang terkait dengan banyaknya mesin dan pekerja. Diasumsikan satu pekerja hanya mengerjakan satu mesin, satu mesin dikerjakan oleh satu pekerja, dan banyaknya pekerja sama dengan banyaknya mesin. Untuk keperluan penurunan model didefinisikan himpunan, parameter, dan variabel keputusan model.

Misal:

A : Himpunan mesin

B : Himpunan pekerja

Parameter-parameter model didefinisikan sebagai berikut. Misal:

c_{ij} : Biaya yang dibutuhkan untuk menugaskan pekerja i ke mesin j

t_{ij} : Waktu yang dibutuhkan untuk menugaskan pekerja i ke mesin j

q_{ij} : Kualitas produk yang dihasilkan dari penugasan pekerja i ke mesin j

Variabel keputusan dari model optimisasi menentukan jenis mesin mana yang akan ditugaskan pada setiap pekerja. Oleh karena itu didefinisikan variabel keputusan model sebagai berikut:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika pekerjaan } i \text{ ditugaskan ke mesin } j \\ 0, & \text{jika pekerjaan } i \text{ tidak ditugaskan ke mesin } j \end{cases}$$

Model penugasan yang dibahas pada penelitian ini diturunkan dengan tujuan untuk mengoptimalkan tiga komponen, yaitu:

1. Meminimumkan biaya
2. Meminimumkan waktu pengerjaan
3. Memaksimumkan kualitas

Karena ada dua jenis fungsi tujuan, maka perlu untuk mengubah fungsi tujuan tersebut menjadi satu jenis fungsi tujuan agar memudahkan proses penyelesaian masalah penugasan multi objektif tersebut. Fungsi tujuan kualitas terdiri dari kualitas sangat baik, baik, dan cukup baik. Karena komponen fungsi tujuan dari kualitas adalah memaksimumkan, maka akan diubah menjadi meminimumkan dengan cara mengkonversikan setiap nilainya yaitu memberi nilai terkecil yaitu "1" pada kualitas tertinggi dimana kualitas tertingginya adalah sangat baik, memberi nilai "2" pada kualitas baik, dan memberi nilai "3" pada kualitas terendah yaitu cukup baik.

Jadi fungsi tujuan dari model optimisasi masalah penugasan dalam penelitian ini terdiri dari tiga fungsi, yaitu:

1. Meminimumkan Biaya

Fungsi ini dapat diekspresikan sebagai

Meminimumkan:

$$Z_c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

2. Meminimumkan Waktu Pengerjaan

Fungsi ini dapat diekspresikan sebagai

Meminimumkan:

$$Z_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

3. Meminimumkan Kualitas

Fungsi ini dapat diekspresikan sebagai

Meminimumkan:

$$Z_q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot x_{ij} .$$

Kendala dari model optimisasi diturunkan untuk menjamin agar setiap pekerja dipasangkan pada tepat satu mesin dan banyaknya mesin sama dengan banyaknya pekerja. Kendala-kendala tersebut masing-masing diekspresikan sebagai

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dan

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} .$$

Selengkapnya, model optimisasi dari masalah penugasan multi objektif adalah sebagai berikut:

Minimumkan:

$$Z_c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

$$Z_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

$$Z_q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

terhadap:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}.$$

3.2 Metode Penyelesaian Model

Masalah penugasan multi objektif adalah salah satu masalah optimisasi yang termasuk dalam klasifikasi *NP-hard Problem*, yaitu masalah optimisasi yang sulit diselesaikan secara eksak. Oleh karena itu dibutuhkan metode-metode pendekatan penyelesaian masalah multi objektif agar masalah tersebut dapat diselesaikan dengan efisien.

Pada penelitian ini model penugasan multi objektif akan diselesaikan dengan cara mengubah fungsi tujuan multi objektif menjadi satu fungsi tujuan saja. Ada dua metode yang akan digunakan untuk mentransformasi beberapa fungsi objektif menjadi sebuah fungsi tujuan. Metode tersebut adalah metode *weighted-sum* dan metode *ε -constraint*.

3.2.1 Metode *Weighted-Sum*

Salahsatu metode yang dapat digunakan untuk mengubah fungsi tujuan multi objektif menjadi satu fungsi tujuan adalah metode *weighted-sum*. Metode ini bekerja dengan cara memberikan bobot pada masing-masing fungsi objektif.

Langkah pertama yang dilakukan adalah menormalkan semua data data dengan cara membagi setiap biaya dengan maksimum biaya dari setiap fungsi tujuan. Misal c'_{ij} adalah biaya (setelah dinormalkan) yang dibutuhkan untuk menugaskan pekerja i ke mesin j , t'_{ij} adalah waktu (setelah dinormalkan) yang dibutuhkan untuk menugaskan pekerja i ke mesin j , dan q'_{ij} adalah kualitas (setelah dinormalkan) yang dihasilkan penugasan pekerja i ke mesin j . Selanjutnya model optimisasi masalah penugasan multi objektif diubah menjadi model penugasan dengan satu fungsi fungsi objektif berikut:

Meminimumkan:

$$Z = \omega_c \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} \cdot x_{ij} + \omega_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} \cdot x_{ij} + \omega_q \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q'_{ij} \cdot x_{ij},$$

terhadap:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\omega_c + \omega_t + \omega_q = 1,$$

$$\omega_c, \omega_t, \omega_q > 0,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}.$$

Setelah model penugasan baru diperoleh, maka masalah penugasan multi objektif yang telah diubah menjadi satu fungsi tujuan diselesaikan dengan menggunakan algoritma Hungarian.

Berikut adalah satu contoh dari masalah penugasan multi objektif. Suatu perusahaan pembangun perumahan akan membuat kompleks perumahan dengan lima tipe rumah. Ada lima kontraktor yang akan membangun tiap tipe rumah di kompleks tersebut. Kontraktor tersebut memiliki biaya, waktu pengerjaan, dan kualitas masing-masing pada setiap tipe rumah. Perusahaan pembangunan perumahan ini ingin meminimumkan biaya dan waktu pengerjaan serta memaksimumkan kualitas dari setiap tipe rumah yang akan dibangun. Sehingga, satu kontraktor memiliki tugas untuk mengerjakan satu tipe rumah.

Data pada Tabel 3.1 menunjukkan penetapan biaya pembangunan persepuluh rumah (dalam jutaan rupiah), waktu pembuatan (dalam hari kerja), dan kualitas hasil (Sangat Baik (S), Baik (B), dan Cukup Baik (C)) dari masing-masing kontraktor terhadap pembangunan kelima tipe rumah tersebut.

Misal c_{ij} adalah biaya yang harus dikeluarkan perusahaan kepada kontraktor i untuk menyelesaikan tipe rumah j , t_{ij} adalah waktu (dalam hari) yang diperlukan kontraktor i untuk menyelesaikan tipe rumah j , dan q_{ij} adalah kualitas tipe rumah j yang diselesaikan oleh kontraktor i .

Risyani Asri Rahayu, 2017

PENYELESAIAN MASALAH PENUGASAN MULTI OBJEKTIF DENGAN METODE WEIGHTED-SUM DAN METODE ϵ -CONSTRAINT

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

		Tipe Rumah					
		1	2	3	4	5	
Kontraktor	A	4.750	3.500	3.450	1.875	1.750	$\leftarrow c_{ij}$
		145	145	130	135	132	$\leftarrow t_{ij}$
		C	B	S	B	S	$\leftarrow q_{ij}$
	B	4.525	4.050	2.970	1.580	1.320	
		153	140	137	130	130	
		B	S	B	C	B	
	C	5.230	4.575	3.215	2.250	1.250	
		140	138	135	133	130	
		S	S	B	S	B	
	D	5.585	3.750	3.530	2.300	1.945	
		149	135	140	130	135	
		S	B	S	S	S	
	E	4.100	4.255	2.855	1.725	1.570	
		140	130	135	132	130	
		C	S	B	B	B	

Tabel 3.1 Data Penetapan Biaya, Waktu Pengerjaan, dan Kualitas

Untuk mempermudah penyelesaian masalah penugasan multi objektif, maka data untuk fungsi objektif kualitas harus diubah menjadi bilangan. Karena yang diinginkan adalah kualitas terbaik atau maksimum, maka kualitas terbaik harus diubah dengan nilai terkecil agar proses tujuannya sama seperti biaya pembangunan dan waktu pengerjaan yaitu diminimumkan. Misalkan kualitas “S” (Sangat Baik) diberi nilai “1”, kualitas “B” (Baik) diberi nilai “2”, dan kualitas “C” (Cukup Baik) diberi nilai “3”, sehingga diperoleh data-data pada Tabel 3.2.

		Tipe Rumah					
		1	2	3	4	5	
Kontraktor	A	4.750	3.500	3.450	1.875	1.750	$\leftarrow c_{ij}$
		145	145	130	135	132	$\leftarrow t_{ij}$
		3	2	1	2	1	$\leftarrow q_{ij}$
	B	4.525	4.050	2.970	1.580	1.320	
		153	140	137	130	130	
		2	1	2	3	2	
	C	5.230	4.575	3.215	2.250	1.250	
		140	138	135	133	130	
		1	1	2	1	2	
	D	5.585	3.750	3.530	2.300	1.945	
		149	135	140	130	135	
		1	2	1	1	1	
	E	4.100	4.255	2.855	1.725	1.570	
		140	130	135	132	130	
		3	1	2	2	2	

Tabel 3.2 Penetapan Biaya, Waktu Pengerjaan, dan Kualitas

Karena masing-masing fungsi objektif mempunyai satuan yang berbeda, maka langkah pertama untuk memecahkan masalah semacam ini dilakukan dengan menormalkan semua data. Normalisasi adalah suatu proses penyetaraan semua data dengan cara membagi setiap biaya dengan maksimum biaya dari setiap fungsi tujuan. Biaya maksimum dari c_{ij} , t_{ij} , dan q_{ij} berturut-turut adalah 5.585, 153, dan 3 sehingga diperoleh Tabel 3.3 yang merupakan hasil dari normalisasi Tabel 3.2.

		Tipe Rumah					
		1	2	3	4	5	
Kontraktor	A	0,850	0,627	0,618	0,336	0,313	$\leftarrow c'_{ij}$
		0,948	0,948	0,850	0,882	0,863	$\leftarrow t'_{ij}$
		1,000	0,667	0,333	0,667	0,333	$\leftarrow q'_{ij}$
	B	0,810	0,725	0,532	0,283	0,236	
		1,000	0,915	0,895	0,850	0,850	
		0,667	0,333	0,667	1,000	0,667	
	C	0,936	0,819	0,576	0,403	0,224	
		0,915	0,902	0,882	0,869	0,850	
		0,333	0,333	0,667	0,333	0,667	
	D	1,000	0,671	0,632	0,412	0,348	
		0,974	0,882	0,915	0,850	0,882	
		0,333	0,667	0,333	0,333	0,333	
	E	0,734	0,762	0,511	0,309	0,281	
		0,915	0,850	0,882	0,863	0,850	
		1,000	0,333	0,667	0,667	0,667	

Tabel 3.3 Normalisasi Biaya, Waktu Pengerjaan, dan Kualitas

Selanjutnya modifikasi data pada setiap fungsi tujuan dengan cara menjumlahkan semua fungsi tujuan dari data yang sudah dinormalkan sehingga diperoleh satu fungsi tujuan yang dapat diselesaikan dengan algoritma Hungarian. Masalah penugasan multi objektif untuk kasus di atas dapat diselesaikan dengan perumusan berikut:

Minimumkan:

Risyani Asri Rahayu, 2017

PENYELESAIAN MASALAH PENUGASAN MULTI OBJEKTIF DENGAN METODE WEIGHTED-SUM DAN METODE ϵ -CONSTRAINT

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

$$Z = \omega_c \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} \cdot x_{ij} + \omega_t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} \cdot x_{ij} + \omega_q \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q'_{ij} \cdot x_{ij}$$

terhadap:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

di mana c'_{ij} , t'_{ij} , dan q'_{ij} adalah data dari biaya pembangunan, waktu pengerjaan dan kualitas yang dihasilkan setelah dinormalkan. Diasumsikan bobot atau tingkat kepentingan dari setiap fungsi tujuan sama yaitu $\omega_c = \omega_t = \omega_q = \frac{1}{3}$. Maka masalah penugasan multi objektif untuk kasus di atas dapat ditunjukkan pada tabel 3.4.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,933	0,747	0,600	0,628	0,503
	B	0,826	0,658	0,698	0,711	0,584
	C	0,728	0,685	0,708	0,535	0,580
	D	0,769	0,740	0,627	0,532	0,521
	E	0,883	0,648	0,687	0,613	0,599

Tabel 3.4 Modifikasi Contoh Kasus

Masalah penugasan berdasarkan data pada Tabel 3.4 dituliskan sebagai model optimisasi berikut:

Minimumkan:

$$\begin{aligned}
Z = & 0,933 x_{11} + 0,747 x_{12} + 0,600 x_{13} + 0,628 x_{14} + 0,503 x_{15} \\
& + 0,826 x_{21} + 0,658 x_{22} + 0,698 x_{23} + 0,711 x_{24} \\
& + 0,584 x_{25} + 0,728 x_{31} + 0,685 x_{32} + 0,708 x_{33} \\
& + 0,535 x_{34} + 0,580 x_{35} + 0,769 x_{41} + 0,740 x_{42} \\
& + 0,627 x_{43} + 0,532 x_{44} + 0,521 x_{45} + 0,883 x_{51} \\
& + 0,648 x_{52} + 0,687 x_{53} + 0,613 x_{54} + 0,599 x_{55}
\end{aligned}$$

terhadap:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1
\end{aligned}$$

Model penugasan di atas selanjutnya diselesaikan dengan algoritma Hungarian berikut.

- 1) Representasikan masalah dalam bentuk matriks penugasan.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,933	0,747	0,600	0,628	0,503
	B	0,826	0,658	0,698	0,711	0,584
	C	0,728	0,685	0,708	0,535	0,580
	D	0,769	0,740	0,627	0,532	0,521
	E	0,883	0,648	0,687	0,613	0,599

- 2) Cari nilai terkecil untuk setiap baris, dan kemudian kurangkan setiap nilai pada baris tersebut dengan nilai terkecilnya.

Risyani Asri Rahayu, 2017

PENYELESAIAN MASALAH PENUGASAN MULTI OBJEKTIF DENGAN METODE WEIGHTED-SUM DAN METODE ϵ -CONSTRAINT

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,933	0,747	0,600	0,628	0,503
	B	0,826	0,658	0,698	0,711	0,584
	C	0,728	0,685	0,708	0,535	0,580
	D	0,769	0,740	0,627	0,532	0,521
	E	0,883	0,648	0,687	0,613	0,599

Apabila ditemukan nol maka harus ditarik garis seminimum mungkin. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris atau kolom, maka pemecahan sudah optimal.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,430	0,244	0,097	0,125	0
	B	0,242	0,074	0,114	0,127	0
	C	0,193	0,150	0,173	0	0,045
	D	0,248	0,219	0,106	0,011	0
	E	0,284	0,049	0,088	0,014	0

Jumlah garis yang dapat ditarik hanya dua tidak sama dengan jumlah baris atau kolom yang ada lima, maka matriks di atas masih belum optimal.

- 3) Pada kolom yang tidak terkena garis, pilih nilai terkecil. Kemudian kurangi nilai pada kolom tersebut dengan nilai terkecil yang sudah dipilih.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,430	0,244	0,097	0,125	0
	B	0,242	0,074	0,114	0,127	0
	C	0,193	0,150	0,173	0	0,045
	D	0,248	0,219	0,106	0,011	0
	E	0,284	0,049	0,088	0,014	0

- 4) Tarik garis semimumimum mungkin, baik ke arah vertikal maupun horizontal pada baris atau kolom yang memiliki nilai nol. Jika jumlah garis sama dengan jumlah baris atau kolom, maka pemecahan sudah optimal.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,237	0,195	0,009	0,125	0
	B	0,049	0,025	0,026	0,127	0
	C	0	0,101	0,085	0	0,045
	D	0,055	0,170	0,018	0,011	0
	E	0,091	0	0	0,014	0

Jumlah garis yang dapat ditarik hanya tiga tidak sama dengan jumlah baris atau kolom yang ada lima, maka matriks di atas masih belum optimal.

- 5) Pilih nilai terkecil pada sel yang tidak terkena garis.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,237	0,195	0,009	0,125	0
	B	0,049	0,025	0,026	0,127	0
	C	0	0,101	0,085	0	0,045
	D	0,055	0,170	0,018	0,011	0
	E	0,091	0	0	0,014	0

Semua nilai yang tidak tertutup garis dikurangkan dengan nilai terkecil tersebut, dan nilai yang tertutup oleh dua garis ditambahkan dengan nilai terkecil itu.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,228	0,186	0	0,116	0
	B	0,040	0,016	0,017	0,118	0
	C	0	0,101	0,085	0	0,054

	D	0,046	0,161	0,009	0,002	0
	E	0,091	0	0	0,014	0,009

Jumlah garis yang dapat ditarik hanya empat tidak sama dengan jumlah baris atau kolom yang ada lima, maka matriks di atas masih belum optimal.

- 6) Ulangi langkah sebelumnya yaitu pilih nilai terkecil pada sel yang tidak terkena garis.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,228	0,186	0	0,116	0
	B	0,040	0,016	0,017	0,118	0
	C	0	0,101	0,085	0	0,054
	D	0,046	0,161	0,009	0,002	0
	E	0,091	0	0	0,014	0,009

Semua nilai yang tidak tertutup garis dikurangkan dengan nilai terkecil tersebut, dan nilai yang tertutup oleh dua garis ditambahkan dengan nilai terkecil itu.

		Tipe Rumah				
		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,228	0,186	0	0,116	0,002
	B	0,038	0,014	0,015	0,116	0
	C	0	0,101	0,085	0	0,056
	D	0,044	0,159	0,007	0	0
	E	0,091	0	0	0,014	0,011

Jumlah garis yang dapat ditarik adalah lima sama dengan jumlah baris atau kolom, maka matriks penugasan di atas sudah optimal.

- 7) Pilih nilai nol dari tiap baris dan kolom sedemikian sehingga tidak terdapat nol yang dipilih pada baris maupun kolom yang sama.

Tipe Rumah	
------------	--

		1	2	3	4	5
Kontraktor	A	0,228	0,186	0	0,116	0,002
	B	0,038	0,014	0,015	0,116	0
	C	0	0,101	0,085	0	0,056
	D	0,044	0,159	0,007	0	0
	E	0,091	0	0	0,014	0,011

Berdasarkan langkah-langkah di atas maka diperoleh solusi optimal sebagai berikut:

$$x_{13} = x_{25} = x_{31} = x_{44} = x_{52} = 1$$

$$Z_c = 2,964 \quad Z_t = 4,315 \quad Z_q = 1,999$$

$$Z = 9,278$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

Kontraktor A mengerjakan rumah tipe 3 dengan biaya Rp. 3.450.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor B mengerjakan rumah tipe 5 dengan biaya Rp. 1.320.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas baik.

Kontraktor C mengerjakan rumah tipe 1 dengan biaya Rp. 5.230.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 140 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor D mengerjakan rumah tipe 4 dengan biaya Rp. 2.300.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor E mengerjakan rumah tipe 2 dengan biaya Rp. 4.255.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

3.2.2 Metode ϵ -Constraint

Pada bagian ini model penugasan multi objektif akan diselesaikan dengan menggunakan metode ϵ -constraint. Metode penyelesaian masalah penugasan multi objektif ini diharuskan untuk memilih satu fungsi tujuan dari semua fungsi tujuan yang harus diminimumkan. Sedangkan tujuan lainnya dijadikan sebagai pembatas yang kurang dari atau sama dengan nilai target yang diberikan.

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menormalkan semua data sama seperti pada bagian sebelumnya. Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan masalah penugasan multi objektif sebagai masalah penugasan dengan satu fungsi untuk setiap tujuan. Misal:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_c \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_q \end{pmatrix}$$

di mana ε_c , ε_t , dan ε_q adalah solusi optimal dari masing-masing fungsi tujuan masalah penugasan multi objektif dari data yang sudah dinormalkan. Maka model optimisasi masalah penugasan multi objektif diubah menjadi beberapa model matematik berikut.

1. Minimumkan:

$$Z_c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

terhadap:

$$Z_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} \cdot x_{ij} \leq \varepsilon_t ,$$

$$Z_q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q'_{ij} \cdot x_{ij} \leq \varepsilon_q ,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m ,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} .$$

2. Minimumkan:

$$Z_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

terhadap:

$$Z_c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} \cdot x_{ij} \leq \varepsilon_c ,$$

$$Z_q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q'_{ij} \cdot x_{ij} \leq \varepsilon_q ,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m ,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} .$$

3. Minimumkan:

$$Z_q = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n q'_{ij} \cdot x_{ij} ,$$

terhadap:

$$Z_c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} \cdot x_{ij} \leq \varepsilon_c ,$$

$$Z_t = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t'_{ij} \cdot x_{ij} \leq \varepsilon_t ,$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m ,$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} .$$

Model-model matematik untuk masalah di atas selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan TORA *software* untuk mendapatkan solusi yang optimal.

Contoh masalah penugasan multi objektif pada bagian sebelumnya akan digunakan pada bagian ini. Diketahui bahwa permasalahan contoh tersebut telah dinormalisasi sehingga diperoleh data pada tabel 3.3 seperti pada bagian sebelumnya.

Langkah selanjutnya adalah mencari solusi optimal dari masing-masing fungsi tujuan. Masalah penugasan untuk setiap fungsi tujuan dapat diselesaikan dengan menggunakan algoritma Hungarian. Model matematik dan untuk setiap fungsi tujuan adalah sebagai berikut.

1. Minimumkan:

$$\begin{aligned} Z_{ci} = & 0,850 x_{11} + 0,627 x_{12} + 0,618 x_{13} + 0,336 x_{14} + 0,313 x_{15} \\ & + 0,810 x_{21} + 0,725 x_{22} + 0,532 x_{23} + 0,283 x_{24} \\ & + 0,236 x_{25} + 0,936 x_{31} + 0,819 x_{32} + 0,576 x_{33} \\ & + 0,403 x_{34} + 0,224 x_{35} + 1,000 x_{41} + 0,671 x_{42} \\ & + 0,632 x_{43} + 0,412 x_{44} + 0,348 x_{45} + 0,734 x_{51} \\ & + 0,762 x_{52} + 0,511 x_{53} + 0,309 x_{54} + 0,281 x_{55} \end{aligned}$$

terhadap:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$

Dengan menggunakan algoritma Hungarian, diperoleh solusi optimal berikut:

$$x_{14} = x_{23} = x_{35} = x_{42} = x_{51} = 1$$

$$Z_{c'} = 2,497$$

2. Minimumkan:

$$Z_{t'} = 0,948 x_{11} + 0,948 x_{12} + 0,850 x_{13} + 0,882 x_{14} + 0,863 x_{15}$$

$$+ 1,000 x_{21} + 0,915 x_{22} + 0,895 x_{23} + 0,850 x_{24}$$

$$+ 0,850 x_{25} + 0,915 x_{31} + 0,902 x_{32} + 0,882 x_{33}$$

$$+ 0,869 x_{34} + 0,850 x_{35} + 0,974 x_{41} + 0,882 x_{42}$$

$$+ 0,915 x_{43} + 0,850 x_{44} + 0,882 x_{45} + 0,915 x_{51}$$

$$+ 0,850 x_{52} + 0,882 x_{53} + 0,863 x_{54} + 0,850 x_{55}$$

terhadap:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$

Dengan menggunakan algoritma Hungarian, diperoleh solusi optimal berikut:

$$x_{13} = x_{25} = x_{31} = x_{44} = x_{52} = 1$$

$$Z_{c'} = 4,315$$

3. Minimumkan:

$$\begin{aligned}
Z_{q'} = & 1,000 x_{11} + 0,667 x_{12} + 0,333 x_{13} + 0,667 x_{14} + 0,333 x_{15} \\
& + 0,667 x_{21} + 0,333 x_{22} + 0,667 x_{23} + 1,000 x_{24} \\
& + 0,667 x_{25} + 0,333 x_{31} + 0,333 x_{32} + 0,667 x_{33} \\
& + 0,333 x_{34} + 0,667 x_{35} + 0,333 x_{41} + 0,667 x_{42} \\
& + 0,333 x_{43} + 0,333 x_{44} + 0,333 x_{45} + 1,000 x_{51} \\
& + 0,333 x_{52} + 0,667 x_{53} + 0,667 x_{54} + 0,667 x_{55}
\end{aligned}$$

terhadap:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} &= 1 \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} &= 1 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan algoritma Hungarian, diperoleh solusi optimal berikut:

$$\begin{aligned}
x_{13} = x_{25} = x_{34} = x_{41} = x_{52} &= 1 \\
Z_{c'} &= 1,999
\end{aligned}$$

Berdasarkan masing-masing solusi dari setiap fungsi tujuan diperoleh vektor solusi berikut:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{c'} \\ \varepsilon_{t'} \\ \varepsilon_{q'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,497 \\ 4,315 \\ 1,999 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, model optimisasi masalah penugasan multi objektif diubah menjadi beberapa model matematik berikut:

1. Minimumkan:

$$\begin{aligned}
Z_c = & 0,850 x_{11} + 0,627 x_{12} + 0,618 x_{13} + 0,336 x_{14} + 0,313 x_{15} \\
& + 0,810 x_{21} + 0,725 x_{22} + 0,532 x_{23} + 0,283 x_{24} \\
& + 0,236 x_{25} + 0,936 x_{31} + 0,819 x_{32} + 0,576 x_{33} \\
& + 0,403 x_{34} + 0,224 x_{35} + 1,000x_{41} + 0,671 x_{42} \\
& + 0,632 x_{43} + 0,412 x_{44} + 0,348 x_{45} + 0,734 x_{51} \\
& + 0,762 x_{52} + 0,511 x_{53} + 0,309 x_{54} + 0,281 x_{55}
\end{aligned}$$

terhadap:

$$\begin{aligned}
& 0,948 x_{11} + 0,948 x_{12} + 0,850 x_{13} + 0,882 x_{14} + 0,863 x_{15} + 1,000 x_{21} \\
& + 0,915 x_{22} + 0,895 x_{23} + 0,850 x_{24} + 0,850 x_{25} \\
& + 0,915 x_{31} + 0,902 x_{32} + 0,882 x_{33} + 0,869 x_{34} \\
& + 0,850 x_{35} + 0,974x_{41} + 0,882 x_{42} + 0,915 x_{43} \\
& + 0,850 x_{44} + 0,882 x_{45} + 0,915 x_{51} + 0,850 x_{52} \\
& + 0,882 x_{53} + 0,863 x_{54} + 0,850 x_{55} \leq 4,315
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1,000 x_{11} + 0,667 x_{12} + 0,333 x_{13} + 0,667 x_{14} + 0,333 x_{15} + 0,667 x_{21} \\
& + 0,333 x_{22} + 0,667 x_{23} + 1,000 x_{24} + 0,667 x_{25} \\
& + 0,333 x_{31} + 0,333 x_{32} + 0,667 x_{33} + 0,333 x_{34} \\
& + 0,667 x_{35} + 0,333 x_{41} + 0,667 x_{42} + 0,333 x_{43} \\
& + 0,333 x_{44} + 0,333 x_{45} + 1,000 x_{51} + 0,333 x_{52} \\
& + 0,667 x_{53} + 0,667 x_{54} + 0,667 x_{55} \leq 1,999
\end{aligned}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$

Dengan menggunakan *software* TORA, diperoleh solusi sebagai berikut:

Risyani Asri Rahayu, 2017

PENYELESAIAN MASALAH PENUGASAN MULTI OBJEKTIF DENGAN METODE WEIGHTED-SUM DAN METODE ϵ -CONSTRAINT

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

$$x_{14} = x_{25} = x_{32} = x_{43} = x_{51} = 1$$

$$Z_c = 2,757 \quad Z_t = 4,464 \quad Z_q = 3$$

$$Z = 10,221$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

Kontraktor A mengerjakan rumah tipe 4 dengan biaya Rp. 1.875.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 135 hari yang memiliki kualitas baik.

Kontraktor B mengerjakan rumah tipe 5 dengan biaya Rp. 1.320.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas baik.

Kontraktor C mengerjakan rumah tipe 2 dengan biaya Rp. 4.575.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 138 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor D mengerjakan rumah tipe 3 dengan biaya Rp. 3.530.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 140 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor E mengerjakan rumah tipe 1 dengan biaya Rp. 4.100.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 140 hari yang memiliki kualitas cukup baik.

2. Minimumkan:

$$\begin{aligned} Z_t = & 0,948 x_{11} + 0,948 x_{12} + 0,850 x_{13} + 0,882 x_{14} + 0,863 x_{15} \\ & + 1,000 x_{21} + 0,915 x_{22} + 0,895 x_{23} + 0,850 x_{24} \\ & + 0,850 x_{25} + 0,915 x_{31} + 0,902 x_{32} + 0,882 x_{33} \\ & + 0,869 x_{34} + 0,850 x_{35} + 0,974 x_{41} + 0,882 x_{42} \\ & + 0,915 x_{43} + 0,850 x_{44} + 0,882 x_{45} + 0,915 x_{51} \\ & + 0,850 x_{52} + 0,882 x_{53} + 0,863 x_{54} + 0,850 x_{55} \end{aligned}$$

terhadap:

$$\begin{aligned} & 0,850 x_{11} + 0,627 x_{12} + 0,618 x_{13} + 0,336 x_{14} + 0,313 x_{15} + 0,810 x_{21} \\ & + 0,725 x_{22} + 0,532 x_{23} + 0,283 x_{24} + 0,236 x_{25} \\ & + 0,936 x_{31} + 0,819 x_{32} + 0,576 x_{33} + 0,403 x_{34} \\ & + 0,224 x_{35} + 1,000 x_{41} + 0,671 x_{42} + 0,632 x_{43} \\ & + 0,412 x_{44} + 0,348 x_{45} + 0,734 x_{51} + 0,762 x_{52} \\ & + 0,511 x_{53} + 0,309 x_{54} + 0,281 x_{55} \leq 2,497 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&1,000 x_{11} + 0,667 x_{12} + 0,333 x_{13} + 0,667 x_{14} + 0,333 x_{15} + 0,667 x_{21} \\
&\quad + 0,333 x_{22} + 0,667 x_{23} + 1,000 x_{24} + 0,667 x_{25} \\
&\quad + 0,333 x_{31} + 0,333 x_{32} + 0,667 x_{33} + 0,333 x_{34} \\
&\quad + 0,667 x_{35} + 0,333 x_{41} + 0,667 x_{42} + 0,333 x_{43} \\
&\quad + 0,333 x_{44} + 0,333 x_{45} + 1,000 x_{51} + 0,333 x_{52} \\
&\quad + 0,667 x_{53} + 0,667 x_{54} + 0,667 x_{55} \leq 1,999
\end{aligned}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$

Dengan menggunakan *software* TORA, diperoleh solusi sebagai berikut:

$$x_{15} = x_{24} = x_{32} = x_{41} = x_{53} = 1$$

$$Z_c = 2,926 \quad Z_t = 4,471 \quad Z_q = 2,666$$

$$Z = 10,063$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

Kontraktor A mengerjakan rumah tipe 5 dengan biaya Rp. 1.750.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 132 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor B mengerjakan rumah tipe 4 dengan biaya Rp. 1.580.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas cukup baik.

Kontraktor C mengerjakan rumah tipe 2 dengan biaya Rp. 4.575.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 138 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor D mengerjakan rumah tipe 1 dengan biaya Rp. 5.585.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 149 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor E mengerjakan rumah tipe 3 dengan biaya Rp. 2.855.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 135 hari yang memiliki kualitas baik.

3. Minimumkan:

$$\begin{aligned}
 Z_q = & 1,000 x_{11} + 0,667 x_{12} + 0,333 x_{13} + 0,667 x_{14} + 0,333 x_{15} \\
 & + 0,667 x_{21} + 0,333 x_{22} + 0,667 x_{23} + 1,000 x_{24} \\
 & + 0,667 x_{25} + 0,333 x_{31} + 0,333 x_{32} + 0,667 x_{33} \\
 & + 0,333 x_{34} + 0,667 x_{35} + 0,333 x_{41} + 0,667 x_{42} \\
 & + 0,333 x_{43} + 0,333 x_{44} + 0,333 x_{45} + 1,000 x_{51} \\
 & + 0,333 x_{52} + 0,667 x_{53} + 0,667 x_{54} + 0,667 x_{55}
 \end{aligned}$$

terhadap:

$$\begin{aligned}
 & 0,850 x_{11} + 0,627 x_{12} + 0,618 x_{13} + 0,336 x_{14} + 0,313 x_{15} + 0,810 x_{21} \\
 & + 0,725 x_{22} + 0,532 x_{23} + 0,283 x_{24} + 0,236 x_{25} \\
 & + 0,936 x_{31} + 0,819 x_{32} + 0,576 x_{33} + 0,403 x_{34} \\
 & + 0,224 x_{35} + 1,000 x_{41} + 0,671 x_{42} + 0,632 x_{43} \\
 & + 0,412 x_{44} + 0,348 x_{45} + 0,734 x_{51} + 0,762 x_{52} \\
 & + 0,511 x_{53} + 0,309 x_{54} + 0,281 x_{55} \leq 2,497
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 0,948 x_{11} + 0,948 x_{12} + 0,850 x_{13} + 0,882 x_{14} + 0,863 x_{15} + 1,000 x_{21} \\
 & + 0,915 x_{22} + 0,895 x_{23} + 0,850 x_{24} + 0,850 x_{25} \\
 & + 0,915 x_{31} + 0,902 x_{32} + 0,882 x_{33} + 0,869 x_{34} \\
 & + 0,850 x_{35} + 0,974 x_{41} + 0,882 x_{42} + 0,915 x_{43} \\
 & + 0,850 x_{44} + 0,882 x_{45} + 0,915 x_{51} + 0,850 x_{52} \\
 & + 0,882 x_{53} + 0,863 x_{54} + 0,850 x_{55} \leq 4,315
 \end{aligned}$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1$$

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1$$

Dengan menggunakan *software* TORA, diperoleh solusi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_{14} = x_{25} = x_{33} = x_{41} = x_{52} &= 1 \\ Z_c = 2,910 \quad Z_t = 4,438 \quad Z_q &= 2,667 \\ Z &= 10,015 \end{aligned}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa:

Kontraktor A mengerjakan rumah tipe 4 dengan biaya Rp. 1.875.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 135 hari yang memiliki kualitas baik.

Kontraktor B mengerjakan rumah tipe 5 dengan biaya Rp. 1.320.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas baik.

Kontraktor C mengerjakan rumah tipe 3 dengan biaya Rp. 3.215.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 135 hari yang memiliki kualitas baik.

Kontraktor D mengerjakan rumah tipe 1 dengan biaya Rp. 5.585.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 149 hari yang memiliki kualitas sangat baik.

Kontraktor E mengerjakan rumah tipe 2 dengan biaya Rp. 4.255.000.000,- persepuluh rumah dalam waktu 130 hari yang memiliki kualitas sangat baik.