BAB III

GENERALIZED SPACE TIME AUTOREGRESSIVE

3.1 Model Generalized Space Time Autoregressive

Model *Generalized Space Time Autoregressive* (GSTAR) merupakan perluasan dari model *Space Time Autoregressive* (STAR), model ini cenderung lebih fleksibel dari model STAR. Model STAR diperkenalkan oleh Pfeifer dan Deutsch pada tahun 1980 namun model ini memiliki kelemahan pada flesksibilitas parameter yang menjelaskan keterkaitan lokasi dan waktu yang berbeda pada data *space time* (Prisandy & Suhartono, 2008). Dengan kata lain, kelemahan model STAR adalah semua lokasinya dianggap sama (homogen). Berdasarkan hal tersebut, model STAR diperbaiki oleh Borovkova, Lopuhaä, dan Ruchjana (2002) melalui model GSTAR, dimana model ini tidak mensyaratkan nilai yang sama untuk semua lokasi. Dengan kata lain, untuk kasus dimana kondisi lokasi-lokasinya heterogen, pemodelannya dapat menggunakan model GSTAR.

Model GSTAR dengan orde *autoregressive* *p* dan orde spasial $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, dinotasikan dengan GSTAR $(p; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ didefinisikan dengan menggunakan perumusan sebagai berikut (Suhartono dkk., 2010):

$$Z_n(t) = \sum_{s=1}^{p} \left[\Phi_{s0} + \sum_{k=1}^{\lambda s} \Phi_{sk} W^{(k)} \right] Z(t-s) + \varepsilon(t) \qquad (3.1)$$

dimana $Z(t)$ merupakan vektor pengamatan pada waktu ke-t lokasi ke-n yang berukuran (n x 1), Φ_{s0} merupakan matriks diagonal parameter *autoregressive*, s = 1,2,...,p dengan $\Phi_{s0} = diag(\phi_{s0}^1, \ldots, \phi_{s0}^N)$, Φ_{sk} merupakan matriks diagonal parameter spasial regresi, k = 1,2,...λ dengan $\Phi_{sk} = diag(\phi_{sk}^1, \ldots, \phi_{sk}^N)$, $W^{(k)}$ merupakan matriks pembobot spasial/ruang yang berukuran (n x n) dengan nilai pembobot yang dipilih agar memenuhi syarat $w_{ii}^k = 0$ dan $\sum_{i \neq j} w_{ji}^k = 1; i = 1,2, \ldots, N$.

3.2 Stasioneritas Model GSTAR

Pada pemodelan *time series* terdapat dua asumsi yang harus dipenuhi yaitu data harus stasioner dan residual harus *white noise*. Menurut (Ruchjana, Borovkova, & Lopuhaa, 2002), penerapan model GSTAR dimulai dengan menentukan kestasioneran data. Identifikasi pola stasioner dapat dilakukan dengan melihat plot data. Namun karena penentuan stasioneritas dengan menggunakan plot data masih mengandung unsur penilaian yang subjektif, maka diperlukan suatu pengujian stasioneritas secara formal pada data panel yang heterogen yaitu dapat dilakukan dengan menggunakan uji Im Pesaran Shin (IPS). Langkah-langkah pengujian stasioneritas data adalah:

1. Perumusan Hipotesis

   H_0 : data yang diteliti merupakan data tidak stasioner

   H_1 : data yang diteliti merupakan data stasioner

2. Statistik uji

$$\bar{t} = \frac{1}{N}\sum t_i \tag{3.2}$$

   dengan $\bar{t}$ adalah nilai IPS, t_i adalah nilai t_{hitung} dari *augmented* Dickey Fuller (ADF) wilayah ke$-i$. Nilai t_i ditentukan dengan menggunakan perumusan berikut:

$$t_i = \frac{\frac{\sum_{t=1}^{n} Z(t-1)Z(t)}{\sum_{t=1}^{n} Z(t-1)^2} - 1}{\sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(Z(t)-nZ(t-1))^2}{n-1}}} \tag{3.3}$$

   dengan n adalah banyaknya data dan Z_t data pengamatan ke-*t*.

3. Kriteria Pengujian

   Kriteria pengujiannya adalah dengan taraf signifikansi $\propto$, tolak H_0 apabila $|\bar{t}| > t_{\frac{\propto}{2},n}$.

3.3 Pemilihan Bobot Lokasi pada Model GSTAR

Salah satu permasalahan utama pada pemodelan GSTAR adalah pemilihan dan penentuan bobot lokasi. Bobot lokasi yang baik adalah bobot lokasi yang membentuk model dengan kesalahan ramalan kecil (Anggraeni, Prahutama, & Andari, 2013). Para ahli statistika model *space time* umumnya menetukan bobot berdasarkan karakteristik fisik, misalnya berdasarkan luas wilayah, kepadatan penduduk, batas antara dua lokasi dan sarana transportasi (Novianti, 2012). Karena data memiliki karakteristik heterogen dimana umumnya dilakukan standarisasi pada matiriks bobot, sehingga salah satu syarat dari matriks bobot adalah jumlah semua entri pada setiap baris sama dengan satu dan diasumsikan bahwa bobot suatu lokasi terhadap dirinya sendiri bernilai nol.

Menurut Suhartono dan Atok (2006) terdapat beberapa cara untuk menentukan bobot lokasi pada pemodelan dengan menggunakan model GSTAR yaitu bobot seragam dan bobot invers jarak. Suhartono dan Subanar (2006) memperkenalkan suatu metode penentuan bobot baru yaitu dengan menggunakan hasil normalisasi korelasi silang antar lokasi pada lag waktu yang bersesuaian. Bobot ini dinamakan bobot lokasi normalisasi korelasi silang. Selain itu, pembobotan lain yang dapat digunakan pada model GSTAR ini adalah bobot biner.

3.3.1 Bobot Invers Jarak

Nilai dari bobot invers jarak didapatkan dari perhitungan berdasarkan jarak sebenarnya antar lokasi. Lokasi yang berdekatan mendapatkan nilai yang lebih besar. Jarak yang digunakan pada pembobot ini mempertimbangkan koordinat lintang dan bujur. Derajat lintang dan bujur yang selanjutnya dikonversikan ke kilometer dengan menggunakan software Latlong. Pembobot invers jarak dinyatakan sebagai:

$$w_{ij} = \frac{w_{ij}^*}{\sum_{k=1}^{p} w_{ik}^*} \tag{3.4}$$

Dimana

$$w_{ij}^* = \begin{cases} \frac{1}{d_{ij}}, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases} \tag{3.5}$$

$$d_{ij} = \sqrt{\left(u_i - u_j\right)^2 + \left(v_i - v_j\right)^2} \tag{3.6}$$

dengan d_{ij} merupakan jarak dari lokasi i ke-j, (u_i, u_j) koordinat dari garis lintang dan (v_i, v_j) koordinat dari garis bujur.

3.3.2 Bobot Biner

Bobot biner merupakan pembobotan dengan menggunakan nilai kategorik 0 dan 1. Bobot biner dinyatakan sebagai berikut:

$$w_{ij} = 0\ atau\ 1 \tag{3.7}$$

Dengan nilai 0 dan 1 tergantung pada batasan tertentu. Jarak lokasi terdekat bernilai 1, sedangkan jarak lokasi yang lebih jauh bernilai 0.

3.4 Pemilihan Orde Model GSTAR

Pada pemilihan orde spasial model GSTAR pada umumnya dibatasi pada orde spasial 1, karena orde yang lebih tinggi akan sulit untuk diinterpretasikan (Suhartono, Sutijo, & Wutsqa, 2010). Selain itu menurut (Suhartono, Sutijo, & Wutsqa, 2010) penentuan pada orde waktu (*autoregressive*) dapat menggunakan orde model VAR (p). Identifikasi orde model VAR ditentukan dengan panjang *lag* optimal. Kriteria penentuan panjang *lag* optimal dilakukan dengan menggunakan nilai *Akaike's Information Criterian* (AIC). Nilai AIC merupakan suatu nilai yang digunakan sebagai ukuran kriteria kebaikan model. Penentuan orde model terbaik pada GSTAR dapat dilihat berdasarkan nilai AIC terkecil dari berbagai *lag*.

Menurut (Tsay, 2005), nilai AIC dapat ditentukan dengan menggunakan perumusan sebagai berikut:

$$AIC = \ln\left(\frac{\mathrm{JKS}}{\mathrm{n}}\right) + \frac{2K^2}{n} \tag{3.8}$$

dengan JKS merupakan jumlah kuadrat sisaan, n adalah banyaknya data dan K merupakan jumlah parameter.

3.5 Estimasi Parameter *Least Square* pada Model GSTAR

Model GSTAR dapat dinyatakan sebagai suatu model linier dan estimasi dari parameter-parameter autoregresif model GSTAR dapat dilakukan dengan menggunakan metode *least square* yaitu dengan meminimumkan jumlah kuadrat sisaan. Model GSTAR memiliki nilai pengamatan yang dinotasikan dengan $Z_{i,t}, t = 0,1,2, \dots, T$ adalah waktu, *lag* waktu yang dinotasikan dengan *k*, lag spasial dinotasikan dengan *l*, pembobot yang dinotasikan dengan *w* dan *i* = 1,2,...,*n* adalah daerah pengamatan. Berdasarkan persamaan (3.1), bentuk matriks model GSTAR dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} Z_1(1) \\ \vdots \\ Z_1(T) \\ \vdots \\ Z_n(1) \\ \vdots \\ Z_n(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset_{k0}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \emptyset_{k0}^{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset_{k0}^{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \emptyset_{k0}^{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset_{k0}^{5} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \emptyset_{k0}^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1(T-k) \\ \vdots \\ Z_2(T-k) \\ \vdots \\ Z_3(T-k) \\ \vdots \\ Z_n(T-k) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \emptyset_{kl}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \emptyset_{kl}^{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset_{kl}^{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \emptyset_{kl}^{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset_{kl}^{5} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \emptyset_{kl}^{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & w_{12}(k) & w_{13}(k) & \cdots & w_{1n}(k) \\ w_{21}(k) & 0 & w_{23}(k) & \cdots & w_{2n}(k) \\ w_{31}(k) & w_{32}(k) & 0 & \cdots & w_{3n}(k) \\ w_{41}(k) & w_{42}(k) & w_{43}(k) & \cdots & w_{4n}(k) \\ w_{51}(k) & w_{52}(k) & w_{53}(k) & \ddots & w_{5n}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{n1}(k) & w_{n2}(k) & w_{n3}(k) & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_1(T-k) \\ \vdots \\ Z_2(T-k) \\ \vdots \\ Z_3(T-k) \\ \vdots \\ Z_n(T-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(T) \\ \vdots \\ e_2(T) \\ \vdots \\ e_3(T) \\ \vdots \\ e_n(T) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \emptyset_{k0}^1 Z_1(T-k) \\ \emptyset_{k0}^2 Z_2(T-k) \\ \emptyset_{k0}^3 Z_3(T-k) \\ \emptyset_{k0}^4 Z_4(T-k) \\ \emptyset_{k0}^5 Z_5(T-k) \\ \vdots \\ \emptyset_{k0}^n Z_n(T-k) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \emptyset_{kl}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \emptyset_{kl}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset_{kl}^3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \emptyset_{kl}^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset_{kl}^5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \emptyset_{kl}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{12}(k)Z_2(T-k) + \cdots + w_{1n}(k)Z_n(T-k) \\ w_{21}(k)Z_1(T-k) + \cdots + w_{2n}(k)Z_n(T-k) \\ w_{31}(k)Z_1(T-k) + \cdots + w_{3n}(k)Z_n(T-k) \\ w_{41}(k)Z_1(T-k) + \cdots + w_{4n}(k)Z_n(T-k) \\ w_{51}(k)Z_1(T-k) + \cdots + w_{5n}(k)Z_n(T-k) \\ \vdots \\ w_{n1}(k)Z_1(T-k) + \cdots + w_{nn}(k)Z_n(T-k) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} e_1(T) \\ \vdots \\ e_2(T) \\ \vdots \\ e_3(T) \\ \vdots \\ e_n(T) \end{pmatrix}$$

dengan $V_i(t) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(k)\, Z_i(t)$ sehingga bentuk matriks model GSTAR dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} Z_1(1) \\ \vdots \\ Z_1(T) \\ \vdots \\ Z_n(1) \\ \vdots \\ Z_n(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset_{k0}^1 Z_1(T-k) \\ \emptyset_{k0}^2 Z_2(T-k) \\ \emptyset_{k0}^3 Z_3(T-k) \\ \emptyset_{k0}^4 Z_4(T-k) \\ \emptyset_{k0}^5 Z_5(T-k) \\ \vdots \\ \emptyset_{k0}^n Z_n(T-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \emptyset_{kl}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \emptyset_{kl}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \emptyset_{kl}^3 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \emptyset_{kl}^4 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \emptyset_{kl}^5 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \emptyset_{kl}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(T-k) \\ \vdots \\ V_2(T-k) \\ \vdots \\ V_3(T-k) \\ \vdots \\ V_n(T-k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(T) \\ \vdots \\ e_2(T) \\ \vdots \\ e_3(T) \\ \vdots \\ e_n(T) \end{pmatrix}$$

Model untuk lokasi ke-*i* dapat dinyatakan dengan $Z_i = Z_i^* \Phi + \varepsilon$ karena itu, estimasi parameter Φ untuk masing-masing lokasi dapat ditentukan secara terpisah. Persamaan model GSTAR untuk keseluruhan lokasi dapat dinyatakan dalam model regresi linier, berikut:

$$Z = Z^* \Phi + \varepsilon \tag{3.9}$$

Dalam bentuk matriks model GSTAR dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} Z_1(1) \\ Z_1(2) \\ \vdots \\ Z_1(T) \\ \vdots \\ Z_n(1) \\ Z_n(2) \\ \vdots \\ Z_n(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1(T-k) & \cdots & V_1(T-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ Z_1(T-k) & \cdots & V_1(T-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1(T-k) & \dots & V_1(T-k) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & Z_n(T-k) & \dots & V_n(T-k) \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_n(T-k) & \cdots & V_n(T-k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_n(T-k) & \cdots & V_n(T-k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k0}^1 \\ \phi_{k0}^2 \\ \vdots \\ \phi_{k0}^n \\ \vdots \\ \phi_{kl}^1 \\ \phi_{kl}^2 \\ \vdots \\ \phi_{kl}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1(1) \\ e_1(2) \\ \vdots \\ e_1(T) \\ e_2(1) \\ e_2(2) \\ \vdots \\ e_n(T) \end{pmatrix}$$

dengan

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1(1)\\ Z_1(2)\\ \vdots\\ Z_1(T)\\ \vdots\\ Z_n(1)\\ Z_n(2)\\ \vdots\\ Z_n(T)\end{pmatrix}, Z^*=\begin{pmatrix} Z_1(T-k) & \cdots & V_1(T-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ Z_1(T-k) & \cdots & V_1(T-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Z_1(T-k) & \dots & V_1(T-k) & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_n(T-k) & \dots & V_n(T-k)\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_n(T-k) & \cdots & V_n(T-k)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & Z_n(T-k) & \cdots & V_n(T-k)\end{pmatrix},$$

$$\Phi=\begin{pmatrix}\phi_{k0}^1\\ \phi_{k0}^2\\ \vdots\\ \phi_{k0}^n\\ \vdots\\ \phi_{kl}^1\\ \phi_{kl}^2\\ \vdots\\ \phi_{kl}^n\end{pmatrix}, dan\ \varepsilon=\begin{pmatrix} e_1(1)\\ e_1(2)\\ \vdots\\ e_1(T)\\ e_2(1)\\ e_2(2)\\ \vdots\\ e_n(T)\end{pmatrix}$$

Menurut (Gujarati, 2006) Metode Kuadrat Terkecil yang merupakan metode estimasi parameter dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat sisaannya. Berdasarkan persamaan model regresi linier pada persamaan (3.8), diperoleh

$$\varepsilon = Z - Z^*\Phi \tag{3.10}$$

Sehingga jumlah kuadrat sisaan model tersebut adalah

$$\begin{aligned}\varepsilon'\varepsilon &= (Z - Z^*\Phi)'(Z - Z^*\Phi)\\ &= Z'Z - Z'Z^*\Phi - \Phi'Z^*Z + \Phi'Z^{*'}Z^*\Phi\\ &= Z'Z - 2\Phi'Z^*Z + \Phi'Z^{*'}Z^*\Phi\end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai minimum dari jumlah kuadrat sisaannya diperoleh dari turunan parsial pertama dari fungsi $\varepsilon'\varepsilon$ terhadap Φ yang disamadengankan 0 sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \varepsilon'\varepsilon}{\partial \Phi} = -2\Phi' Z^* Z + \Phi' Z^{*'} Z^* \Phi$$

$$0 = -2\Phi' Z^* Z + \Phi' Z^{*'} Z^* \Phi$$

$$\widehat{\Phi} = (Z^{*'} Z^*)^{-1}(Z^{*'} Z)$$

3.6 Pengujian Residual *White Noise*

Setelah memperoleh parameter yang signifikan dan terpilih model yang terbaik, langkah selanjutnya yang perlu dilakukan yaitu uji kelayakan model. Suatu model GSTAR dikatakan layak apabila sisaannya bersifat *white noise* dan berdistribusi normal. Pengujian asumsi untuk mengetahui apakah residual memenuhi *white noise* perlu dilakukan. Residual *white noise* adalah *residual* mengikuti distribusi identik independen (iid) yang dapat dideteksi menggunakan uji autokorelasi *residual* pada analisis *error*-nya. Uji korelasi *residual* digunakan untuk mendeteksi ada tidaknya korelasi *residual* antar *lag*. Pemenuhan asumsi *white noise* dapat dilakukan dengan menggunakan uji *Ljung Box-Pearce* (Wei, 2006). Langkah-langkah uji *Ljung Box-Pearce* adalah:

1. Perumusan Hipotesis

   H_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$ (sisaan tidak *white noise*)

   H_1 : Terdapat $\rho_k \neq 0, k = 1,2,\ldots,K$ (sisaan *white noise*)

2. Statistik Uji

$$Q_k = T(T+2)\sum_{k=1}^{K} \frac{\widehat{\rho}_k^2}{T-k} \quad (3.11)$$

   dengan T menyatakan banyaknya data, K menyatakan banyaknya periode yang diuji dan $\hat{\rho}_k$ menyatakan dugaan autokorelasi *residual* periode ke-k.

3. Kriteria Pengujian

   Dengan taraf signifikansi sebesar $\propto$, tolak H_0 apabila $Q_k > x^2{}_{(a,d,f)}$ tabel.

3.7 Pemilihan Model Terbaik

Tujuan dari model peramalan adalah untuk meramalkan nilai yang akan datang dengan *error* sekecil mungkin, salah satu alternatif untuk pemilihan model berdasarkan nilai *error* adalah *Root Mean Square* (RMSE). RMSE digunakan untuk memperoleh gambaran keseluruhan *standart deviasi* yang muncul saat menunjukkan perbedaan antar model. Model peramalan dengan nilai RMSE lebih kecil merupakan model peramalan yang lebih akurat (Wei, 2006). RMSE ditentukan dengan menggunakan perumusan sebagai berikut:

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\left(Z_t - \hat{Z}_t\right)^2} \qquad (3.12)$$

dengan m menyatakan banyak ramalan yang dilakukan, Z_t menyatakan data sebenarnya dan $\hat{Z}_t$ menyatakan data hasil ramalan

Nilai RMSE berkisar antara 0 sampai ~. Semakin kecil nilai RMSE maka dapat dikatakan model semakin bagus.