BAB III
MODEL M_o DAN MODEL M_t

3.1. Model Mo; Peluang Ditangkap Konstan

Model M_o merupakan model yang paling sederhana diantara model-model analisis data *Capture-Recapture*. Pada model M_o semua anggota populasi mempunyai peluang yang sama untuk ditangkap pada setiap kesempatan penangkapan, serta setiap kesempatan penangkapan tidak mempengaruhi peluang ditangkap.

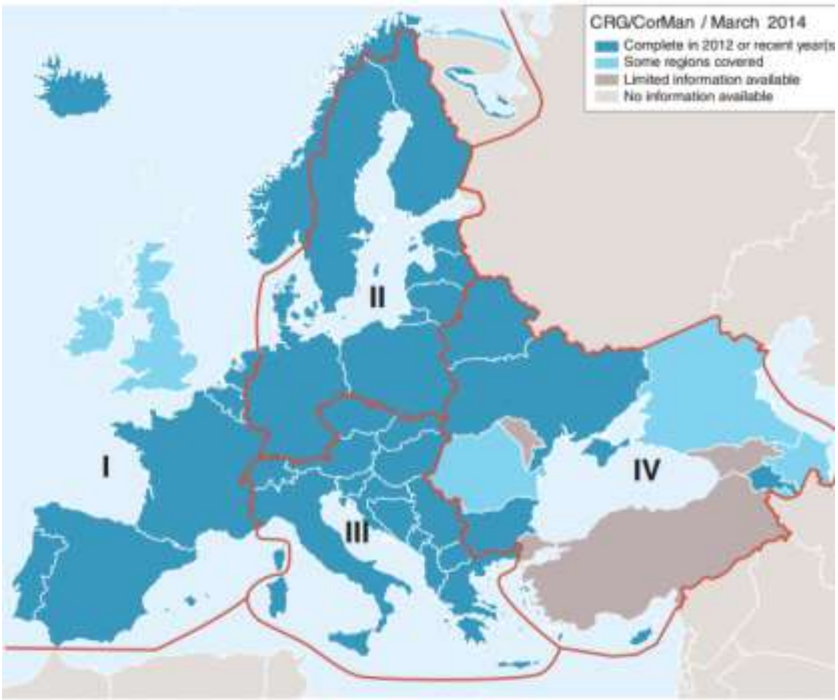
Ilustrasi berikut untuk mempermudah pemahaman mengenai suatu percobaan dengan menggunakan pendekatan model M_o. Misalkan suatu penelitian dilakukan untuk mengestimasi ukuran populasi burung kormoran di Palearctic Barat.

Gambar 3.1 Burung Kormoran dengan *marking* berupa gelang
(sumber : http://www.deeestuary.co.uk)

Burung kormoran atau pecuk adalah sejenis burung yang pandai menyelam dan berenang di kedalaman air yang dilakukan untuk mencari makan. Burung ini cenderung membuat sarang di hutan bakau di rawa-rawa atau tepi laut (Tanpa nama, 2016.

Burung kormoran dipelihara dan diajari oleh nelayan Jepang untuk membantu mereka mencari ikan. Burung kormoran yang telah dijinakkan akan diberikan sebuah cincin yang agak longgar pada lehernya. Agar burung ini tidak bisa terbang jauh maka para nelayan mengikat kaki burung ini dengan seutas tali. Selain itu cara ini juga mempunyai manfaat lain bagi para nelayan karena ikan besar yang didapat oleh burung tidak akan bisa langsung ditelan. Makanan alami dari burung kormoran adalah binatang air seperti ikan, serangga atau binatang-binatang kecil yang hidup di sekitar rawa-rawa atau kolam. Pada penelitian ini, diasumsikan tidak ada respon perilaku anggota populasi yang mempengaruhi penangkapan, dan tidak ada variasi waktu penangkapan.

Dengan demikian, penelitian dilakukan di daerah yang banyak terdapat pantai yaitu di Palearctic Barat meliputi wilayah Rusia dan Kazakstan, dengan partisi wilayah sebagai berikut :



Gambar 3.2 Area penelitian burung kormoran
sumber : (Report, 2012-2013)

Area I. Negara-negara yang meliputi pantai sepanjang Samudra Atlantik Timur Laut, kecuali Jerman dan Denmark.

Area II. Negara-negara yang meliputi pantai sepanjang Laut Baltic, Rusia, Teluk Finlandia dan Kaliningrad.

Area III. Negara-negara yang berada di Eropa Tengah dan Tenggara Mediterania.

Area IV. Belarusia, negara-negara pada perbatasan Laut Hitam, dan beberapa daerah Rusia diantara Laut Azov dan Laut Kaspian, seperti Georgia, Azerbaijan dan Armenia.

Pada setiap daerah, telah dipasang jebakan agar burung kormoran tertangkap, selanjutnya burung kormoran yang tertangkap tersebut diberikan tanda berupa gelang pada kakinya, kemudian dilepaskan kembali. Pada hari berikutnya, dilakukan penangkapan kembali sehingga dapat dihitung kormoran yang sudah diberi tanda (jika ada) dan burung kormoran yang belum bertanda (burung kormoran baru tertangkap).

Waktu penelitian ditentukan selama lima hari dalam hal ini artinya t = 5. Selama waktu penelitian untuk setiap harinya dicatat data-data sebagai berikut :

- Banyak burung kormoran tertangkap selama lima hari.
- Banyak burung kormoran yang tertangkap kembali dan sudah ditandai selama lima hari.
- Lama waktu penelitian

Setelah mendapatkan data-data tersebut, akan dihitung peluang penangkapan sehingga diperoleh besar peluang ditangkapnya adalah konstan yaitu $p_1 = p_2 = \cdots = p_5$.

Hal ini berarti, pada setiap penangkapan tidak mempengaruhi peluang tertangkap burung kormoran.

Dengan demikian, kasus tersebut termasuk ke dalam model Mo dimana tidak ada heterogenitas dalam peluang ditangkap, tidak ada respon perilaku anggota populasi yang mempengaruhi penangkapan, dan tidak ada variasi dalam suatu eksperimental dari waktu ke waktu (Otis dkk., 1978)

Ilustrasi model di atas merupakan ilustrasi dari model M_o yang melibatkan dua parameter yaitu : N yang menggambarakan ukuran populasi dan p yang menggambarkan peluang anggota populasi ditangkap pada setiap perangkap.

3.1.1 Pendekatan Statistika

Pada bagian subbab sebelumnya, model M_o melibatkan parameter p yaitu peluang anggota populasi tertangkap. Sehingga, penentuan terjadinya sebuah peristiwa ditentukan oleh nilai peluang dan penghitungannya didasarkan pada perumusan secara umum. Sehingga peluang dapat diartikan sebagai ukuran yang digunakan untuk mengetahui terjadinya atau tidak terjadinya suatu peristiwa.

Sebuah peristiwa yang terjadi pasti mempunyai nilai peluang yang besarnya antara nol dan satu. Adapun, peristiwa yang sudah pasti terjadi akan mempunyai nilai peluang sebesar satu. Akan tetapi, peristiwa yang sudah pasti tidak terjadi akan mempunyai nilai peluang sebesar nol (Nar Herrhyanto, 2011).

Dalam hal ini definisi dari peluang penangkapan berarti nilai atau ukuran antara nol dan satu yang digunakan untuk mengetahui terjadi penangkapan anggota populasi, apabila anggota populasi sudah pasti tertangkap maka nilai peluangnya satu dan apabila anggota populasi sudah pasti tidak tertangkap maka nilai peluangnya nol.

Selanjutnya, menurut Nar Herryanto & Tuti Gantini (2011) fungsi peluang didefinisikan sebagai berikut :

Jika X adalah peubah acak diskrit, maka $p(x) = P(X = x)$ untuk setiap x dalam range X dinamakan fungsi peluang dari X. Nilai fungsi peluang dari X, yaitu $p(x)$ harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

- $p(x) \geq 0$
- $\sum_x p(x) = 1$

Adapun, kumpulan pasangan yang diurutkan $\{x, p(x)\}$ dinamakan distribusi peluang dari X. Kajian mengenai distribusi peluang dari himpunan setiap kesempatan penangkapan telah dikaji oleh darroch pada tahun 1958 (David L Otis, 1978).

Beberapa notasi yang akan dipergunakan adalah sebagai berikut:

- N menyatakan banyaknya anggota populasi yang sesungguhnya.
- M_{t+1} menyatakan jumlah hewan berbeda tertangkap selama penelitian.

$$M_{t+1} = \sum_{j}^{t+1} m_j$$

- n_j menyatakan banyak penangkapan pada penangkapan ke-j, $j = 1,2\ldots,t$.
- $n.$ menyatakan total penangkapan

$$n. = \sum_{j=1}^{t} n_j$$

p_j menyatakan peluang setiap hewan tertangkap sehingga $p_j = 1 - q_j$ dimana $j = 1,2,\ldots t$. Asumsi yang diambil adalah $p_1 = p_2 = \cdots = p_t$ dengan t banyak pengambilan sampel. Oleh karena itu, model M_o ini distribusi populasinya akan merupakan distribusi multinomial dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

Jadi distribusi peluang penangkapan pada model M_o yaitu :

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N - M_{t+1})!} p^{n.}(1-p)^{tN-n.}$$

3.1.2 Estimator Model M_o

Pada subbab ini akan membahas mengenai estimasi ukuran populasi dengan menggunakan model M_o. Seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa parameter yang akan ditentukan adalah N dan p. Fungsi log-likelihood dari distribusi Multinomial adalah sebagai berikut:

$$\ln L(N,p|\boldsymbol{X}) = In\left(\frac{N!}{(N - M_{t+1})!}\right) + (n.)\ln(p) + (tN - n.).In(1-p),$$

dimana $p \in [0,1]$ dan $N \in \mathbb{N} = \{M_{t+1}, M_{t+1} + 1, M_{t+1} + 2, \ldots\}$.

Berdasarkan fungsi log-likelihood tersebut, selanjutnya akan menentukan estimator dari p dengan memisalkan nilai N sehingga:

$$\frac{\partial}{\partial p} lnL(p|N,\boldsymbol{X}) = 0$$

Untuk memperoleh nilai p yang mengakibatkan estimator p maks yaitu :

$$\frac{\delta}{\delta p} lnL(p|N,\boldsymbol{X}) = 0 + \frac{n.}{p} + \frac{tN - n.}{1-p}(-1)$$

$$\frac{\delta}{\delta p} lnL(p|N,\boldsymbol{X}) = 0 + \frac{n.}{p} - \frac{tN - n.}{1-p}$$

$$\frac{n.}{p} - \frac{tN - n.}{1-p} = 0$$

$$\frac{n.}{p} = \frac{tN - n.}{1-p}$$

$$n. - pn. = ptN - pn.$$

$$n. = ptN$$

$$p = \frac{n.}{tN}$$

Jadi, estimator untuk p yaitu :

$$\hat{p} = \frac{\mathrm{n.}}{\mathrm{tN}} \tag{3.3}$$

Selanjutnya menentukan estimator Maksimum Likelihood untuk N, nilai $\widehat{N}$ dipergunakan untuk menentukan estimator maksimum likelihood $\hat{p}(\widehat{N})$ dengan menggunakan perumusan sebagai berikut :

$$\hat{p}(\widehat{N}) = \frac{\mathrm{n.}}{\mathrm{t}\widehat{N}} = \hat{p}$$

Sehingga diperoleh :

$$L(\hat{p}(\widehat{N})|N,\boldsymbol{X}) = \frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\left(\frac{n.}{tN}\right)^{n.}\left(1-\frac{n.}{tN}\right)^{tN-n.}$$

$$= \frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\left(\frac{n.}{tN}\right)^{n.}\left(\frac{tN}{tN}-\frac{n.}{tN}\right)^{tN-n.}$$

$$= \frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\left(\frac{(n.)^{n.}}{(tN)^{n.}}\right)\left(\frac{(tN-n.)^{tN-n.}}{(tN)^{tN-n.}}\right)$$

$$L(\hat{p}(\widehat{N})|N,\boldsymbol{X}) = \frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\left(\frac{(n.)^{n.}}{(tN)^{tN}}\right)(tN-n.)^{tN-n.}$$

Selanjutnya, kedua ruas persamaan menggunakan fungsi *ln*

$$\ln L(\hat{p}(\widehat{N})|N,\boldsymbol{X}) = In\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + (n.)In(n.) + (tN-n.)In(tN-n.) - tNln(tN)$$

Untuk sekumpulan data yang diberikan, penentuan melalui N ini dilakukan untuk menemukan estimator maksimum likelihood $(\hat{N})$ dengan menentukan nilai dari setiap taksiran awal dimana $\hat{N}\epsilon\mathcal{N}$ dengan $\mathcal{N}$ menyatakan himpunan taksiran awal ukuran populasi. Selanjutnya, nilai tersebut digunakan dalam perhitungan estimasi maksimum likelihood menggunakan (David L Otis, 1978)

$$In\ L\left(\hat{N},\hat{p}\left(\hat{N}\right)\middle|\boldsymbol{X}\right) = \max_{N\in\mathbb{N}}\left[\max_{p\in[0,1]} ln\ L(p|N,\boldsymbol{X})\right]$$

$$= \max_{N\in\mathbb{N}}\left[ln\ L(\hat{p}\left(\hat{N}\right)|N,\boldsymbol{X})\right]$$

$$= \max_{N\in\mathbb{N}}\left[In\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + (n.)In(n.)\right.$$

$$\left. + (tN-n.)In(tN-n.) - tNln(tN)\right]$$

Bias

Menurut Otis, dkk (1978) yang didasarkan pada simulasi yang dibuktikan secara numerik, bias pada estimator M_o ditentukan oleh besaran nilai peluang penangkapan dan banyak penangkapan pada penelitian. Apabila nilai peluang penangkapan lebih dari sama dengan 0,10 dan $t \geq 5$ maka bias relatif pada 0-15%. Sedangkan apabila nilai penangkapan lebih kecil dari 0,10 dan $t < 5$ maka bias relatif pada 15-20%.

3.1.3 Varians Estimator Model M_o

Menurut J.N Darroch (1958) varians *asymptotic* dari $\hat{N}$ untuk model M_o dengan kesamaan nilai peluang pada setiap kesempatan penangkapan yaitu :

$$Var\left(\hat{N}\right) = \hat{N}[(1-p)^{-t} - t(1-p)^{-1} + t - 1]^{-1}$$

dan standar error nya adalah

$$SE(\hat{N}) = \sqrt{\hat{N}[(1-p)^{-t} - t(1-p)^{-1} + t - 1]^{-1}}$$

3.2. Model M_t; Peluang Ditangkap Dipengaruhi Waktu

Menurut Pollock (dalam David L Otis, 1978), pada kasus peluang penangkapan yang tidak konstan. Ada beberapa model berdasarkan faktor yang bisa mempengaruhi peluang penangkapan yaitu :

1) Peluang penangkapan bervariasi terhadap waktu atau kesempatan penangkapan, dimodelkan dengan model M_t.

   Misalnya, pada saat hujan kemungkinan hewan beraktivitas bisa berkurang sehingga bisa mengurangi peluang penangkapan.

2) Peluang penangkapan bervariasi terhadap tingkah laku , dimodelkan dengan model M_b.

   Misalnya, beberapa jenis hewan memiliki insting untuk tidak kembali ke daerah yang terdapat jebakan sehingga bisa mengurangi peluang penangkapan berikutnya.

3) Peluang penangkapan bervariasi terhadap heterogenitasi diantara individu, dimodelkan dengan model M_h.

   Misalnya, beberapa jenis hewan memiliki perbedaan dalam aktivitas, berdasakan jenis kelamin, umur, dan sebagainya yang menyebabkan perilaku heterogenitas pada setiap individu hewan. Sehingga, bisa menambah atau mengurangi peluang penangkapan berikutnya.

Model M_t merupakan model yang bergantung pada peluang penangkapan bervariasi terhadap waktu atau kesempatan penangkapan dalam analisis data *capture-recapture*. Semua anggota populasi memiliki peluang yang bervariasi untuk ditangkap pada setiap kesempatan penangkapan dan setiap kesempatan penangkapan mempengaruhi peluang ditangkap.

Ilustrasi berikut untuk mempermudah pemahaman mengenai suatu percobaan dengan menggunakan pendekatan model M_t. Misalkan suatu penelitian dilakukan untuk mengestimasi ukuran populasi katak di Taman Partere .

Di asumsikan tidak ada respon perilaku anggota populasi yang mempengaruhi penangkapan.

Katak merupakan hewan yang memiliki tingkah laku apabila turun hujan katak akan keluar untuk kawin. Katak jantan akan mengeluarkan bunyi-bunyi untuk memanggil katak betina.

Di wilayah Taman Partere, telah dipasang jebakan agar katak tertangkap, selanjutnya katak yang tertangkap tersebut diberikan tanda berupa gelang pada kakinya, kemudian dilepaskan kembali. Pada hari berikutnya, dilakukan penangkapan kembali sehingga dapat dihitung katak yang sudah diberi tanda (jika ada) dan katak yang belum bertanda (katak baru tertangkap).

Waktu penelitian ditentukan selama lima hari dalam hal ini artinya t = 5. Selama waktu penelitian untuk setiap harinya dicatat data-data sebagai berikut :

- Banyak katak tertangkap selama lima hari.
- Banyak katak yang tertangkap kembali dan sudah ditandai selama lima hari.
- Lama waktu penelitian

Pada penelitian hari pertama dan ketiga turun hujan, selanjutnya telah dicatat data-data tersebut, setelah dihitung peluang penangkapan sehingga didapatkan $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_5$ atau paling tidak, ada satu peluang penangkapan yang berbeda dengan peluang penangkapan lainnya.

Dengan demikian, kasus tersebut termasuk ke dalam model M_t dimana ada variasi dalam suatu eksperimental dari waktu ke waktu.

Perbedaan antara model M_o dengan model M_t yaitu dalam hal peluang penangkapan. Pada model M_o peluang penangkapan konstan yang berarti semua anggota populasi memiliki nilai peluang yang sama pada sebarang penangkapan, tetapi dalam model M_t nilai peluang anggota populasi tertangkap juga dapat berubah dari satu kesempatan ke kesempatan yang berikutnya.

Ilustrasi model di atas merupakan ilustrasi dari model M_t yang melibatkan dua parameter yaitu : N syang menggambarkan ukuran populasi dan p_j, $dengan\, j = 1,2,3 \dots t,$ dimana p_j yang menggambarkan nilai peluang anggota populasi ditangkap pada penangkapan ke-j dengan $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_j$ atau paling tidak, ada peluang penangkapan yang berbeda dengan peluang penangkapan lainnya.

3.2.1. Pendekatan Statistika

Pengkajian model M_t telah banyak menarik para ilmuan statistika dibandingkan dengan model lainnya (Cormack,1968).

Asumsi model ini telah digunakan untuk mengembangkan model yang berasal dari penaksir ukurang populasi metode Schnabel. Model ini mengasumsikan bahwa nilai-nilai dari M_j, banyak anggota populasi yang ditandai dalam populasi pada waktu j, untuk $j = 1,2,3\ldots t$.

Darroch pada tahun 1958 telah mengkaji untuk mendapatkan model yang tepat untuk situasi tersebut. Dari hasil kajian Darroch, kita dapat menuliskan distribusi peluang dari himpunan setiap kesempatan penangkapan.

Beberapa notasi yang akan dipergunakan adalah sebagai berikut:

- N menyatakan banyaknya anggota populasi yang sesungguhnya.
- u_j menyatakan banyaknya hewan baru tidak bertanda yang tertangkap pada kesempatan penangkapan ke-j dimana $j = 1,2,3 \ldots t$.
- M_{t+1} menyatakan jumlah hewan berbeda tertangkap selama penelitian.

$$M_{t+1} = \sum_{j}^{t} u_j$$

- n_j menyatakan banyak penangkapan pada penangkapan ke-j, $j = 1,2\ldots,t$.
- n menyatakan total penangkapan

$$n = \sum_{j=1}^{t} n_j$$

- p_j menyatakan peluang setiap hewan tertangkap sehingga $p_i = 1 - q_i$ dimana $j = 1,2,\ldots t$. Dimana $p_1 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_5$ atau paling tidak, ada satu peluang penangkapan yang berbeda dengan peluang penangkapan lainnya.

Oleh karena pada model M_t ini dilakukan beberapa kali penangkapan maka distribusi populasinya akan merupakan distribusi multinomial dengan fungsi kepadatan peluang sebagai berikut :

Misalkan peluang hewan tidak tertangkap ditentukan dengan menggunakan perumusan sebagai berikut :

$$\prod_{j}^{t} q_j = Q$$

sedangkan peluang hewan tertangkap pada $1, \dots, t$ hari ditentukan dengan perumusan sebagai berikut :

$$\frac{p_1}{q_1} \dots \frac{p_t}{q_t} Q = \prod_{j}^{t} p_j$$

Sehingga :

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N-M_{t+1})!} Q^{N-M_{t+1}} \prod_j^t p_j^{n_j} \quad (3.1)$$

dimana $0 \leq X_\omega \leq N$ sehingga $0 \leq M_{t+1} = n_j \leq N$.

selanjutnya, perhatikan

$$\begin{aligned} Q^{N-M_{t+1}} \prod_j^t p_j^{n_j} &= \frac{(\prod_j^t q_j)^N}{(\prod_j^t q_j)^{M_{t+1}}} \prod_j^t p_j^{n_j} \\ &= \frac{(\prod_j^t q_j)^N}{(\prod_j^t q_j)^{n_j}} \prod_j^t p_j^{n_j} \\ &= (\prod_j^t q_j)^N \frac{\prod_j^t p_j^{n_j}}{(\prod_j^t q_j)^{n_j}} \\ &= (\prod_j^t q_j)^N (\prod_j^t q_j)^{-n_j} \prod_j^t p_j^{n_j} \\ &= \prod_{j=1}^t p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j} \end{aligned}$$

Sehingga persamaan 3.1 dapat ditulis :

$$P[\{X_\omega\}] = \frac{N!}{[\prod_\omega X_\omega!](N-M_{t+1})!} \prod_{j=1}^t p_j^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j} \quad (3.2)$$

3.2.2. Estimator Model M_t

Pada subbab ini akan membahas mengenai estimasi ukuran populasi dengan menggunakan model M_t. Seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa parameter yang akan ditentukan adalah N dan p. Fungsi log-likelihood dari distribusi Multinomial adalah sebagai berikut:

$$\ln L(N,\boldsymbol{p}|\boldsymbol{X}) = In\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + \sum_{j=1}^{t} n_j \ln(p_j) + \sum_{j=1}^{t}(N-n_j)\ln(1-p_j),$$

Dimana $p_j \in [0,1]$ untuk setiap $j = 1,2,3 \dots, t$. dan $N \in \mathbb{N} = \{M_{t+1}, M_{t+1} + 1, M_{t+1} + 2, \dots\}$.

Berdasarkan fungsi log-likelihood tersebut, selanjutnya akan menentukan estimator dari p dengan memisalkan nilai N sehingga:

$$\frac{\partial}{\partial p_j} lnL(\boldsymbol{p}|N,\boldsymbol{X}) = 0, \qquad j = 1,2,3 \dots, t.$$

Untuk memperoleh salah satu nilai $p = p_j$ yang mengakibatkan estimator p_j max yaitu :

$$\frac{\delta}{\delta p_j} lnL(\boldsymbol{p}|N,\boldsymbol{X}) = 0 + \frac{n_j}{p_j} + \frac{N-n_j}{1-p_j}(-1) = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta p_j} lnL(\boldsymbol{p}|N,\boldsymbol{X}) = 0 + \frac{n_j}{p_j} + \frac{N-n_j}{1-p_j}(-1) = 0$$

$$\frac{N-n_j}{1-p_j} = \frac{n_j}{p_j}$$

Jadi estimator untuk $p_j(N)$ yaitu

$$\hat{p}_j = \frac{\mathrm{n_j}}{\mathrm{N}} \qquad (3.5)$$

Selanjutnya menentukan estimator Maksimum Likelihood untuk N, nilai $\widehat{N}$ dipergunakan untuk menentukan estimator maksimum likelihood $\hat{p}(\widehat{N})$ dengan menggunakan perumusan sebagai berikut :

$$\hat{p}_j(\widehat{N}) = \frac{\mathrm{n}_j}{\widehat{N}} = \hat{p}_j$$

Sehingga diperoleh :

$$L\left(\widehat{N}_t, \hat{p}_1\left(\widehat{N}_t\right), \dots, \hat{p}_t\left(\widehat{N}_t\right) \middle| \boldsymbol{X}\right) = \frac{N!}{(N-M_{t+1})!} \prod_{j=1}^{t} {p_j}^{n_j} (1-p_j)^{N-n_j}$$

$$= \frac{N!}{(N-M_{t+1})!} \prod_{j=1}^{t} \left(\frac{n_j}{N}\right)^{n_j} \left(\frac{N}{N} - \frac{n_j}{N}\right)^{N-n_j}$$

$$= \frac{N!}{(N-M_{t+1})!} \prod_{j=1}^{t} \left(\frac{{n_j}^{n_j}}{N^{n_j}}\right) \left(\frac{(N-n_j)^{N-n_j}}{N^{N-n_j}}\right)$$

$$= \frac{N!}{(N-M_{t+1})!} \prod_{j=1}^{t} \left(\frac{{n_j}^{n_j}}{N^{N}}\right) (N-n_j)^{N-n_j}$$

Selanjutnya, kedua ruas persamaan menggunakan fungsi *ln*

$$ln\left(\widehat{N}_t, \hat{p}_1\left(\widehat{N}_t\right), \dots, \hat{p}_t\left(\widehat{N}_t\right) \middle| \boldsymbol{X}\right) = ln \frac{N!}{(N-M_{t+1})!} + \sum_{j=1}^{t} n_j \ln(n_j)$$

$$+ \sum_{j=1}^{t} (N-n_j)\, ln(N-n_j) - tNln(N)$$

Untuk sekumpulan data yang diberikan, penentuan melalui N ini dilakukan untuk menemukan estimator maksimum likelihood $(\widehat{N})$ dengan menentukan nilai dari setiap taksiran awal dimana $\widehat{N} \epsilon \mathcal{N}$ dengan $\mathcal{N}$ menyatakan himpunan taksiran awal ukuran populasi. Selanjutnya, nilai tersebut digunakan dalam perhitungan estimasi maksimum likelihood (David L Otis, 1978)

$$In\ L(\hat{N}_t, \hat{p}_1(\hat{N}_t), \dots, \hat{p}_t(\hat{N}_t)|\boldsymbol{X})$$

$$= \max_{N\in\mathbb{N}}\left[\max_{p_j\in[0,1]} ln\ L(p_1, \dots, p_t|N, \boldsymbol{X})\right]$$

$$= \max_{N\in\mathbb{N}}[ln\ L(\hat{p}_1(\hat{N}_t), \dots, \hat{p}_t(\hat{N}_t)|N, \boldsymbol{X})]$$

$$= \max_{N\in\mathbb{N}}\left[In\left(\frac{N!}{(N-M_{t+1})!}\right) + \sum_{j=1}^{t} n_j \ln(n_j) + \sum_{j=1}^{t}(N-n_j)\ln(N-n_j) - tNn(N)\right]$$

Bias

Menurut David L Otis (1978) yang didasarkan pada simulasi yang dibuktikan secara numerik, bias pada estimator M_t ditentukan oleh besaran nilai peluang penangkapan dan banyak penangkapan pada penelitian.

Apabila nilai rata-rata peluang penangkapan selama t waktu penelitian; lebih dari sama dengan 0,10 maka bias $\hat{N}$ tidak signifikan. Dalam hal ini berarti, $\hat{N}$ jadi estimator tak bias bagi N. Akan tetapi apabila nilai rata-rata peluang penangkapan selama t waktu penelitian; kurang dari 0,10 maka bias $\hat{N}$ signifikan. Dalam hal ini berarti, $\hat{N}$ jadi estimator tak bias bagi N.

3.2.3. Varians Estimator Model M_t

Menurut Darroch pada tahun 1959, varians *asymptotic* dari $\hat{N}$ yaitu :

$$Var(\hat{N}) = \hat{N}[\frac{1}{\prod_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)} + t - 1 - \sum_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)^{-1}]^{-1}$$

dan standar error nya adalah

$$SE(\hat{N}_t) = \sqrt{\hat{N}_t[\frac{1}{\prod_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)} + t - 1 - \sum_{j=1}^{t}(1-\hat{p}_j)^{-1}]^{-1}}$$