

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Aljabar- $C^*$  diperkenalkan oleh Gelfand dan Naimark pada tahun 1943 (Murphy, 1990, hlm. 277). Aljabar- $C^*$  merupakan aljabar Banach  $A$  dengan involusi dan memenuhi identitas- $C^*$ , yaitu untuk setiap  $a \in A$ ,

$$\|a^*a\| = \|a\|^2.$$

Salah satu contoh dari aljabar- $C^*$  adalah  $\mathcal{B}(H)$ , yaitu himpunan operator linear terbatas pada ruang Hilbert  $H$ . Selanjutnya  $\mathcal{B}(H)$  dikenal sebagai aljabar operator.

Contoh lainnya dari aljabar- $C^*$  adalah aljabar Cuntz-Krieger. Aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  diperkenalkan oleh Cuntz dan Krieger pada tahun 1980. Setelah sebelumnya, Cuntz pada tahun 1977 memperkenalkan aljabar Cuntz yaitu aljabar- $C^*$  yang dibangun oleh isometri. Aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  merupakan perumuman dari aljabar Cuntz. Aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  ini berkaitan dengan matriks persegi  $A$  dengan entri  $\{0,1\}$ . Ketika setiap entri pada matriks  $A$  adalah 1 maka aljabar tersebut adalah aljabar Cuntz (Cuntz&Krieger, 1980, hlm. 251).

Pada tahun 1980, Enomoto dan Watatani memperkenalkan aljabar- $C^*$  graf sebagai alternatif lain untuk mendeskripsikan aljabar Cuntz-Krieger, namun hanya untuk graf berarah berhingga (Carlsen, Kang, Shotwell, & Sims, 2014, hlm. 2570). Meskipun Watatani telah menerbitkan beberapa *paper* terkait graf pada tahun 1980 dan 1982, namun karyanya itu sebagian besar kurang memperoleh perhatian. Hingga pada tahun 1997, Kumjian, Pask, Raeburn, dan Renault memperkenalkan kembali konsep aljabar- $C^*$  terkait graf berarah. Selanjutnya pada tahun 2000 diperkenalkan juga aljabar- $C^*$  dari graf berhingga-baris oleh Bates, Pask, Raeburn dan Szymanski. Hingga saat ini topik terkait aljabar- $C^*$  graf masih terus berkembang.

Misalkan graf berarah  $E$  terdiri dari himpunan *countable*  $E^0, E^1$  dan fungsi  $r, s : E^1 \rightarrow E^0$ , di mana  $E^0$  adalah himpunan titik dan  $E^1$  adalah himpunan sisi. Suatu graf dapat direpresentasikan oleh operator-operator pada ruang Hilbert yaitu

setiap titiknya direpresentasikan sebagai proyeksi yang saling ortogonal dan setiap sisinya direpresentasikan sebagai isometri parsial. Aljabar graf adalah subaljabar- $C^*$  dari  $\mathcal{B}(H)$  yang dibangun oleh operator-operator tersebut dan memenuhi relasi Cuntz-Krieger (Raeburn, 2005, hlm. 1).

Berdasarkan uraian di atas, penulis termotivasi untuk melakukan kajian mengenai kaitan antara aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  yang terkait matriks dan bersifat klasik dengan aljabar Cuntz-Krieger dari graf  $E$ .

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah pada penelitian ini adalah :

1. Bagaimanakah kaitan antara matriks dengan graf berarah ?
2. Bagaimanakah karakteristik keluarga operator yang memenuhi relasi Cuntz-Krieger?
3. Bagaimanakah membangun aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  ?
4. Bagaimanakah membangun aljabar Cuntz-Krieger dari graf  $E$ ?
5. Bagaimanakah kaitan antara aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  dan aljabar Cuntz-Krieger dari graf  $E$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang kaitan antara matriks dengan graf berarah.
2. Untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang karakteristik keluarga operator yang memenuhi relasi Cuntz-Krieger.
3. Untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang konstruksi aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  .
4. Untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang konstruksi aljabar Cuntz-Krieger  $E$ .
5. Untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang kaitan antara aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  dan aljabar Cuntz-Krieger dari graf  $E$ .

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk memperoleh gambaran menyeluruh tentang keterkaitan matriks dan graf sehingga dapat menjelaskan keterkaitan aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  dan aljabar Cuntz-Krieger dari graf  $E$ .

## 1.5 Struktur Organisasi Skripsi

Bagian ini memuat sistematika penulisan skripsi, penulis akan menjelaskan secara ringkas bab demi bab secara berurutan. Urutan penulisan bab yang akan disajikan sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan, merupakan garis besar, arah tujuan, dan alasan penelitian yang mendorong penulis melakukan penelitian meliputi : Latar Belakang, Rumusan Masalah, Tujuan Penelitian, Manfaat Penelitian dan Struktur Organisasi Skripsi.

BAB II Kajian Pustaka, memaparkan lebih jauh mengenai landasan teori terkait topik penelitian yang meliputi :

1. Ulasan teori aljabar- $C^*$ , berisi tentang ruang Hilbert, aljabar operator, proyeksi ortogonal, isometri parsial, dan aljabar- $C^*$  beserta contoh-contohnya.
2. Jenis- jenis matriks, yaitu matriks permutasi dan matriks irreduksibel.
3. Graf berarah, berisi definisi graf berarah, graf berhingga, graf berhingga-baris beserta contoh- contohnya.
4. Graf dual beserta contohnya.

BAB III Metode Penelitian, memaparkan tentang gambaran alur penelitian dimulai dari mencari sumber/referensi sebanyak-banyaknya, menentukan topik, membuat peta konsep, lalu mengkaji dan memahami lebih mendalam terkait topik yang dipilih.

BAB IV Pembahasan, berisi tentang topik yang dikaji yaitu meliputi : kaitan antara matriks dan graf, keluarga Cuntz-Krieger, konstruksi aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$ , konstruksi aljabar Cuntz-Krieger dari graf  $E$  dan kaitan antara aljabar Cuntz-Krieger  $\mathcal{O}_A$  dan aljabar Cuntz-Krieger dari graf  $E$ .

BAB V Penutup, menguraikan tentang kesimpulan dari penelitian ini, dan rekomendasi untuk penelitian selanjutnya.