BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

5.1.1 Aljabar Graf

Sebuah graf berarah $E = (E^0, E^1, r, s)$ terdiri dari dua himpunan *countable* E^0, E^1 dan fungsi $r, s : E^1 \longrightarrow E^0$. Elemen dari E^0 disebut titik dan elemen dari E^1 disebut sisi. Untuk setiap sisi e, $s(e)$ adalah *source* dari e dan $r(e)$ adalah *range* dari e. Sebuah graf berarah E disebut graf berarah berhingga baris jika setiap titiknya menerima paling banyak berhingga sisi, yaitu dimana $r^{-1}(v)$ adalah himpunan berhingga $\forall\, v \in E^0$.

Keluarga Cuntz-Krieger-E $\{S, P\}$ di ruang hilbert H adalah keluarga yang terdiri dari himpunan proyeksi yang saling ortogonal $\{P_v : v \in E^0\}$ di H dan himpunan isometri parsial $\{S_e : e \in E^1\}$ di H yang memenuhi $S_e^* S_e = P_{s(e)}$ untuk semua $e \in E^1$, dan $P_v = \sum_{\{e \in E^1 : r(e) = v\}} S_e S_e^*$ dengan v bukan *source*.

Aljabar-C^* $C^*(E)$ disebut aljabar-C^* dari graf E atau aljabar Cuntz-Krieger dari E, dan umumnya dikenal sebagai aljabar graf.

5.1.2 Sifat Universal Aljabar Graf

Untuk setiap graf berarah berhingga baris E, terdapat aljabar-C^* $C^*(E)$ yang dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger-E $\{s, p\}$ sedemikian sehingga untuk setiap keluarga Cuntz-Krieger-E $\{T, Q\}$ di aljabar-C^* B, terdapat homomorfisma $\pi_{T,Q}$ dari $C^*(E)$ ke B yang memenuhi $\pi_{T,Q}(s_e) = T_e$ untuk setiap $e \in E^1$ dan $\pi_{T,Q}(p_v) = Q_v$ untuk setiap $v \in E^0$. Untuk selanjutnya $\{s, p\}$ akan menjadi keluarga universal yang membangun $C^*(E)$.

5.1.3 Teorema Keunikan Gauge-Invariant

Ketika A merupakan aljabar-C^*, G merupakan grup kompak lokal di aljabar-C^* dan $C^*(E)$ merupakan aljabar graf, aksi kontinu khusus dengan

$$\mathbb{T} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

dimana $G = \mathbb{T}$ dan $A = C^*(E)$ adalah suatu homomorfisma $\gamma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{Aut}\ C^*(E)$ yang disebut aksi gauge dari $\mathbb{T}$ di $C^*(E)$.

Teorema keunikan gauge-invariant menyatakan bahwa sembarang aljabar-C^* B akan isomorfik dengan aljabar graf $C^*(E)$ jika kita bisa menemukan keluarga Cuntz-Krieger-E yang membangun B dan memenuhi sifat tertentu. Lebih lengkapnya, misalkan $\{T, Q\}$ keluarga Cuntz-Krieger-E di aljabar-C^* B untuk setiap $Q_v \neq 0$ dan jika terdapat aksi kontinu $\beta : \mathbb{T} \longrightarrow Aut\ B$ sedemikian sehingga $\beta_z(T_e) = zT_e$ untuk setiap $e \in E^1$ dan $\beta_z(Q_v) = Q_v$ untuk setiap $v \in E^0$, maka $\pi_{T,Q}$ adalah isomorfisma dari $C^*(E)$ ke $C^*(T, Q)$.

5.2 Saran

Aljabar graf memiliki dua teorema besar mengenai keunikan. Teorema yang pertama yaitu teorema keunikan gauge invariant. Teorema tersebut menyatakan bahwa misalkan $\{T, Q\}$ keluarga Cuntz-Krieger-E di aljabar-C^* B untuk setiap $Q_v \neq 0$ dan jika terdapat aksi kontinu $\beta : \mathbb{T} \longrightarrow Aut\ B$ sedemikian sehingga $\beta_z(T_e) = zT_e$ untuk setiap $e \in E^1$ dan $\beta_z(Q_v) = Q_v$ untuk setiap $v \in E^0$, maka $\pi_{T,Q}$ adalah isomorfisma dari $C^*(E)$ ke $C^*(T, Q)$. Atau jika kita bisa menemukan keluarga Cuntz-Krieger-E yang membangun aljabar-C^* B dan memenuhi sifat yang dijelaskan sebelumnya, maka sembarang aljabar-C^* B akan isomorfik dengan $C^*(E)$.

Teorema keunikan gauge invariant tidak memiliki hipotesis pada graf, dan karena itu sangat berguna untuk membuktikan pernyataan umum tentang aljabar graf. Sedangkan teorema kedua yaitu teorema keunikan Cuntz-Krieger. Teorema tersebut memiliki hipotesis pada graf sehingga dapat menjadi bahasan pada penelitian selanjutnya.