BAB III

MODEL *GEOGRAPHICALLY WEIGHTED LOGISTIC REGRESSION SEMIPARAMETRIC* (GWLRS)

3.1 *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR)

Geographically Weighted Logistic Regression adalah metode untuk mendapatkan parameter regresi dengan memperhitungkan faktor spasial dan merupakan pendekatan alternatif dari *Geographically Weighted Regression* (GWR) yang menggabungkan parameter non stasioner dan data kategorikal (Aji, 2014).

Model *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR) merupakan bentuk kombinasi dari model *Geographically Weighted Regression* (GWR) dan model regresi logistik dikotomus (Atkinson, 2003). Berdasarkan Dwinata (2012), model GWLR dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\pi(x_i) = \frac{\exp(\sum_{j=0}^{k} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij})}{1+\exp(\sum_{j=0}^{k} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij})} \tag{3.1}$$

dengan $i = 1,2,\dots,n\,; j = 1,2,\dots,k$

Model GWLR merupakan model nonlinear sehingga diperlukan transformasi agar menjadi fungsi linear. Transformasi yang digunakan adalah transformasi logit dari $\pi(x_i)$. Sehingga diperoleh bentuk logit untuk GWLR adalah:

$$logit[\pi(x_i)] = \beta_0(u_i,v_i) + \beta_1(u_i,v_i)x_{i1} + \cdots + \beta_j(u_i,v_i)x_{ij}$$

$$logit[\pi(x_i)] = \sum_{j=0}^{k} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} \tag{3.2}$$

dimana :

x_{ij} : nilai observasi variabel prediktor ke-j pada lokasi pengamatan ke-i

$\beta_0(u_i,v_i)$: konstanta atau intersep untuk setiap lokasi (u_i,v_i)

(u_i,v_i) : menyatakan koordinat letak geografis (*longitude*, *latitude*) dari lokasi pengamatan ke-i

$\beta_j(u_i,v_i)$: parameter model variabel prediktor ke-j untuk setiap lokasi (u_i,v_i)

k : banyak parameter variabel prediktor

3.2 Penaksir Parameter GWLR

Model GWLR menghasilkan bentuk penaksir parameter model yang bersifat lokal untuk setiap lokasi tempat data didapatkan. Pada model GWLR, metode penaksir parameter yang digunakan adalah metode kemungkinan maksimum. Langkah awal dari metode tersebut adalah dengan membentuk fungsi kemungkinan, fungsi kemungkinannya adalah sebagai berikut:

$$L\big(\beta(u_i,v_i)\big) = \left\{exp \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_{ij}\right)\beta_j(u_i,v_i)\right\}$$
$$\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)^{-1}\right\} \tag{3.3 }$$

Dan persamaan ln fungsi kemungkinan yang terbentuk adalah

$$\ln L\big(\beta(u_i,v_i)\big) = \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_{ij}\right)\beta_j(u_i,v_i)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right) \tag{3.4}$$

Letak geografis merupakan pembobot pada model GWLR, pembobot dimasukkan pada persamaan (3.4) untuk mendapatkan model GWLR.

$$\ln L^*\big(\beta(u_i,v_i)\big) = \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i) y_i x_{ij}\right)\beta_j(u_i,v_i)$$
$$-\sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i)\ln\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right) \tag{3.5}$$

Untuk memperoleh nilai β yang dapat memaksimumkan $L\big(\beta(u_i,v_i)\big)$, persamaan (3.5) diturunkan terhadap $\beta_j(u_i,v_i)$. Kemudian hasil yang diperoleh dibuat sama dengan 0.

$$\frac{\partial \ln L^*\big(\beta(u_i,v_i)\big)}{\partial \beta_j(u_i,v_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i) y_i x_{ij}$$
$$-\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i)\left[\frac{\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})}{1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j(u_i,v_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i) y_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\,\pi(x_i) w_{ij}(u_i,v_i) = 0 \qquad (3.6)$$

Turunan keduanya adalah

$$\frac{\partial^2 \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j^2(u_i,v_i)} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, w_{ij}(u_i,v_i)\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_1 = \left\{ \frac{\left(x_{ij}\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)^2} - \frac{\left(x_{ij}\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)\left(\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j^2(u_i,v_i)} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, w_{ij}(u_i,v_i)\Delta_2 = 0$$

$$\Delta_2 = \left\{ \frac{x_{ij}\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij}) - \exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j^2(u_i,v_i)} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, w_{ij}(u_i,v_i) \left\{ \frac{x_{ij}\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\,(1)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)^2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j^2(u_i,v_i)} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{ij}\, w_{ij}(u_i,v_i) \left\{ \frac{\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})\right)^2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j^2(u_i,v_i)} = -\sum_{i=1}^{n} {x_{ij}}^2\, w_{ij}(u_i,v_i)\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) = 0 \qquad (3.7)$$

Digunakan metode iteratif, yaitu iterasi *Newton-Raphson*. Bentuk umum dari hasil penurunannya adalah (Dwinata, 2012):

$$\beta^{(t+1)}(u_i,v_i) = \beta^{(t)}(u_i,v_i) - {H^{(t)}}^{-1}(\beta^{(t)}(u_i,v_i))\, g^{(t)}(\beta^{(t)}(u_i,v_i))$$

dengan

$$g^{(t)}\left(\beta^{(t)}(u_i,v_i)\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_0(u_i,v_i)} \\ \dfrac{\partial \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_1(u_i,v_i)} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_k(u_i,v_i)} \end{bmatrix}$$

$$H^{(t)}\left(\beta^{(t)}(u_i,v_i)\right) = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \cdots & h_{0k} \\ h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{k0} & h_{k1} & \cdots & h_{kk} \end{bmatrix}$$

Dan $H^{(t)}\left(\beta^{(t)}(u_i,v_i)\right)$ adalah matriks dengan elemen-elemennya adalah

$$h_{jj^*}^{(t)} = \frac{\partial^2 \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j(u_i,v_i)\partial \beta_{j^*}(u_i,v_i)}$$

Untuk setiap langkah iterasi ke-t, berlaku :

$$g_j^{(t)} = \frac{\partial \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j(u_i,v_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i)y_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\,\pi(x_i)^{(t)} w_{ij}(u_i,v_i)$$

$$h_{jj^*}^{(t)} = \frac{\partial^2 \ln L^*\left(\beta(u_i,v_i)\right)}{\partial \beta_j(u_i,v_i)\partial \beta_{j^*}(u_i,v_i)}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{ij}x_{ij^*}w_{ij}\,(u_i,v_i)\,\pi(x_i)^{(t)}\left(1-\pi(x_i)^{(t)}\right) \quad ; \quad j,j^* = 0,1,2,\dots,k$$

dengan

$$\pi(x_i)^{(t)} = \frac{\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})}{1+\exp(\sum_{j=0}^{k}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij})}$$

Dengan mengulang prosedur iterasi untuk setiap titik regresi ke-i, maka penduga parameter lokal akan didapatkan. Iterasi berhenti pada saat konvergen, yaitu pada saat $\left\|\beta^{(t+1)}(u_i,v_i) - \beta^{(t)}(u_i,v_i)\right\| \le \varepsilon$ dengan ε merupakan bilangan yang sangat kecil yaitu $\varepsilon = 10^{-6}$ (Dwinata, 2012).

3.3 Pengujian Parameter Model GWLR

Pengujian parameter model GWLR dilakukan dengan menguji parameter secara parsial. Pengujian ini dilakukan untuk mengetahui parameter variabel prediktor mana saja yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon.

Untuk mengetahui parameter variabel prediktor yang bersifat lokal yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon, dilakukan pengujian hipotesis dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Perumusan Hipotesis

   $H_0 : \ \beta_j(u_i, v_i) = 0$

   (parameter variabel tidak signifikan)

   $H_1 : \ \beta_j(u_i, v_i) \neq 0$

   (parameter variabel signifikan)

2. Statistik Uji

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j(u_i, v_i)}{Se(\hat{\beta}_j(u_i, v_i))}$$

3. Kriteria Pengujian

   Tolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

3.4 *Geographically Weighted Logistic Regression Semiparametric* (GWLRS)

Geographically Weighted Logistic Regression Semiparametric (GWLRS) merupakan perluasan dari metode *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR) (Fathurahman, 2014). Nakaya (2005) menyatakan *Geographically Weighted Logistic Regression Semiparametric* (GWLRS) merupakan bentuk lokal dari regresi logistik biner, dimana terdapat parameter yang dipengaruhi lokasi (*geographically varying coefficient*) dan parameter yang tidak dipengaruhi lokasi (*fixed coefficient*). Semiparametrik pada ilmu spasial adalah penggabungan antara regresi spasial dengan regresi biasa (Nakaya, 2005). Dalam model semiparametrik spasial didalamnya terdapat variabel yang dipengaruhi oleh lokasi (bersifat lokal) dan variabel yang tidak dipengaruhi oleh lokasi (bersifat global).

Model GWLRS ini dapat digunakan untuk menjelaskan hubungan antara satu variabel respon biner dan sekumpulan variabel prediktor lokal dan global dengan memperhitungkan faktor geografis (Khoirunnisa, 2012). Pada model

GWLRS, variabel respon (y) diprediksi berdasarkan variabel independen (x) yang masing-masing koefisien regresinya $\beta_j(u_i,v_i)$ bergantung pada lokasi dimana data tersebut diamati dan koefisien regresi γ_m tidak bergantung pada lokasi (konstan). Model GWLRS dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\pi(x_i) = \frac{\exp(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})}{1 + \exp(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})} \tag{3.8}$$

Bentuk logit untuk model GWLRS adalah :

$$logit[\pi(x_i)] = \sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im} \tag{3.9}$$

dimana :

x_{ij} : nilai observasi variabel prediktor ke-j pada lokasi (u_i,v_i)

(u_i,v_i) : menyatakan koordinat letak geografis (*longitude, latitude*) dari lokasi pengamatan ke-i

$\beta_j(u_i,v_i)$: parameter model variabel prediktor ke-j untuk setiap lokasi (u_i,v_i)

γ_m : parameter model yang bersifat konstan

x_{im} : nilai observasi variabel prediktor ke-m

k : banyak variabel prediktor

3.5 Penaksir Parameter GWLRS

Model GWLRS menghasilkan bentuk penaksir parameter model yang bersifat lokal atau dipengaruhi lokasi (*geographically varying coefficient*) untuk setiap lokasi tempat data didapatkan dan penaksir parameter yang bersifat global atau tidak dipengaruhi lokasi (*fixed coefficient*). Pada model GWLRS, metode penaksir parameter yang digunakan adalah metode kemungkinan maksimum. Langkah awal dari metode tersebut adalah dengan membentuk fungsi kemungkinan, fungsi kemungkinannya adalah sebagai berikut:

$$L(\beta(u_i,v_i),\gamma_m) = \left\{exp \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im}\right)\right\}$$
$$\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(1 + \exp(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})\right)^{-1}\right\} \tag{3.10}$$

Dan persamaan ln fungsi kemungkinan yang terbentuk adalah

$$\ln L(\beta(u_i,v_i),\gamma_m) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum\nolimits_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum\nolimits_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im}\right)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \ln \left(1 + \exp(\sum\nolimits_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum\nolimits_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})\right) \quad (3.11)$$

Letak geografis merupakan pembobot pada model GWLRS, pembobot dimasukkan pada persamaan (3.11) untuk mendapatkan model GWLRS.

$$\ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma_m) = \sum_{i=1}^{n} y_i w_{ij}(u_i,v_i) \left(\sum\nolimits_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum\nolimits_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im}\right)$$
$$- \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i) \ln \left(1 + \exp(\sum\nolimits_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum\nolimits_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})\right) \quad (3.12)$$

Untuk memperoleh nilai β yang dapat memaksimumkan $L(\beta(u_i,v_i),\gamma_m)$, persamaan (3.12) diturunkan terhadap $\beta_j(u_i,v_i)$ dan γ_m. Kemudian hasil yang diperoleh dibuat sama dengan 0.

$$\frac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma_m)}{\partial \beta_j(u_i,v_i)} = \sum_{i=1}^{n} y_i w_{ij}(u_i,v_i)\, x_{ij}$$
$$- \sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i) \left(\frac{\exp(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})}{1 + \exp(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma_m)}{\partial \beta_j(u_i,v_i)} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i) y_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i) x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma_m)}{\partial \gamma_m} = \sum_{i=1}^{n} y_i w_{ij}(u_i,v_i)\, x_{im}$$
$$- \sum_{i=1}^{n} x_{im} w_{ij}(u_i,v_i) \left(\frac{\exp(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})}{1 + \exp(\sum_{j=0}^{k^*} \beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k} \gamma_m x_{im})}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma_m)}{\partial \gamma_m} = \sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i) y_i x_{im} - \sum_{i=1}^{n} \pi(x_i) x_{im} w_{ij}(u_i,v_i) = 0$$

Digunakan metode iteratif, yaitu iterasi *Newton-Raphson*. Bentuk umumnya adalah:

$$(\beta^{(t+1)}(u_i,v_i),\gamma^{(m+1)}) = (\beta^{(t)}(u_i,v_i),\gamma^{(m)})$$
$$-\left(H^{(t)^{-1}}(\beta^{(t)}(u_i,v_i),\gamma^{(m)})\right)\left(g^{(t)}(\beta^{(t)}(u_i,v_i),\gamma^{(m)})\right)$$

dengan

$$g^{(t)}\left(\beta^{(t)}(u_i,v_i),\gamma^{(m)}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \beta_0(u_i,v_i)}\\ \dfrac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \beta_1(u_i,v_i)}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \beta_{k^*}(u_i,v_i)}\\ \dfrac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \gamma_{k^*+1}}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \gamma_k}\end{bmatrix}$$

$$H^{(t)}\left(\beta^{(t)}(u_i,v_i),\gamma^{(m)}\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \beta^T(u_i,v_i)\beta(u_i,v_i)} & \dfrac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \beta^T(u_i,v_i)\gamma}\\ simetri & \dfrac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \gamma^T\gamma}\end{bmatrix}$$

dimana $\beta^T(u_i,v_i)=\left[\beta_0(u_i,v_i)\quad \beta_1(u_i,v_i)\quad \cdots\quad \beta_{k^*}(u_i,v_i)\right]$ dan $\gamma^T=[\gamma_{k^*+1}\quad \cdots\quad \gamma_k]$.

Untuk setiap langkah iterasi ke-t, berlaku :

$$g_j^{(t)}=\frac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma_m)}{\partial \beta^T(u_i,v_i)}=\sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i)y_i x_{ij}-\sum_{i=1}^{n}\pi(x_i)x_{ij}w_{ij}(u_i,v_i)$$

$$=0$$

$$g_m^{(t)}=\frac{\partial \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma_m)}{\partial \gamma^T}=\sum_{i=1}^{n} w_{ij}(u_i,v_i)y_i x_{im}-\sum_{i=1}^{n}\pi(x_i)x_{im}w_{ij}(u_i,v_i)=0$$

dengan

$$\pi(x_i)=\frac{\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij}+\sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})}{1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij}+\sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial\beta^T(u_i,v_i)\beta(u_i,v_i)} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i)\,\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_1 = \left\{\frac{\left(x_{ij}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2} - \frac{\left(x_{ij}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)\left(\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial\beta^T(u_i,v_i)\beta(u_i,v_i)} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i)\,\Delta_1 = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i)\left\{\frac{\left(x_{ij}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2}\right\} = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 w_{ij}(u_i,v_i)\left\{\frac{\left(\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2}\right\} = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 w_{ij}(u_i,v_i)\,\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial\gamma^T\gamma} = -\sum_{i=1}^{n} x_{im} w_{ij}(u_i,v_i)\,\Delta_2 = 0$$

$$\Delta_2 = \left\{\frac{\left(x_{im}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2} - \frac{\left(x_{im}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)\left(\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial\gamma^T\gamma} = -\sum_{i=1}^{n} x_{im} w_{ij}(u_i,v_i)\,\Delta_2 = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{im} w_{ij}(u_i,v_i)\left\{\frac{\left(x_{im}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2}\right\} = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{im}^2 w_{ij}(u_i,v_i)\left\{\frac{\left(\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2}\right\} = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{im}^2 w_{ij}(u_i,v_i)\,\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \beta^T(u_i,v_i)\gamma} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i)\,\Delta_3 = 0$$

$$\Delta_3 = \left\{ \frac{\left(x_{im}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2} - \frac{\left(x_{im}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)\left(\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L^*(\beta(u_i,v_i),\gamma)}{\partial \beta^T(u_i,v_i)\gamma} = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i)\,\Delta_3 = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} w_{ij}(u_i,v_i) \left\{ \frac{\left(x_{im}\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2} \right\} = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{im} w_{ij}(u_i,v_i) \left\{ \frac{\left(\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)}{\left(1+\exp(\sum_{j=0}^{k^*}\beta_j(u_i,v_i)x_{ij} + \sum_{m=k^*+1}^{k}\gamma_m x_{im})\right)^2} \right\} = 0$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{im} w_{ij}(u_i,v_i)\,\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) = 0$$

Dengan mengulang prosedur iterasi untuk setiap titik regresi ke-i, maka penduga parameter lokal dan global akan didapatkan. Iterasi berhenti pada saat konvergen, yaitu pada saat $\left\|\beta^{(t+1)}(u_i,v_i) - \beta^{(t)}(u_i,v_i)\right\| \le \varepsilon$ dan $\left\|\gamma^{(t+1)} - \gamma^{(t)}\right\| \le \varepsilon$.

3.6 Pengujian Parameter Model GWLRS

Pengujian parameter model GWLRS dilakukan dengan menguji parameter secara parsial. Pengujian ini dilakukan untuk mengetahui parameter variabel prediktor yang bersifat global dan lokal mana saja yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon.

Untuk mengetahui parameter variabel prediktor yang bersifat lokal yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon, dilakukan pengujian hipotesis dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Perumusan Hipotesis

   H_0 : $\beta_j(u_i,v_i) = 0$(parameter variabel yang bersifat lokal tidak signifikan)

   H_1 : $\beta_j(u_i,v_i) \ne 0$ (parameter variabel yang bersifat lokal signifikan)

2. Statistik Uji

$$Z = \frac{\hat{\beta}_j(u_i, v_i)}{Se(\hat{\beta}_j(u_i, v_i))}$$

3. Kriteria Pengujian

Tolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Untuk mengetahui parameter variabel prediktor yang bersifat global yang berpengaruh secara signifikan terhadap variabel respon, dilakukan pengujian hipotesis dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Perumusan Hipotesis

H_0 : $\gamma_m = 0$ (parameter variabel yang bersifat global tidak signifikan)

H_1 : $\gamma_m \neq 0$ (parameter variabel yang bersifat global signifikan)

2. Statistik Uji

$$Z = \frac{\hat{\gamma}_m}{Se(\hat{\gamma}_m)}$$

3. Kriteria Pengujian

Tolak H_0 jika $|Z_{hit}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

3.7 *Akaike Information Criterion Corrected* (AICc)

Akaike Information Criterion Corrected (AICc) merupakan pengembangan dari *Akaike Information Criterion* (AIC). Pengukuran untuk kualitas relatif dari model statistik berdasarkan data yang diberikan untuk pemodelan model terbaik dari beberapa model yang ada dinyatakan dengan AIC (Khairunnisa, 2015). Perhitungan AIC dapat dilakukan dengan rumus:

$$AIC = 2k - 2\ln(likelihood) \tag{3.13}$$

dimana :

k : banyak parameter yang akan di taksir

$\ln(likelihood)$: nilai maksimum *likelihood* model

Ukuran yang digunakan untuk mengukur kebaikan model (*goodnees-of-fit*) dan mempertimbangkan prinsip *parsimony* adalah AIC. Namun ukuran ini dinilai bias pada sampel kecil, sehingga ukuran ini dikoreksi dengan AIC *Corrected* (AICc), dirumuskan dengan :

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1} \tag{3.14}$$

dimana :

n : ukuran sampel

Jika nilai k semakin besar atau variabel yang ditaksirnya semakin banyak, maka untuk penggunaan nilai AICc akan lebih baik daripada dengan nilai AIC.

Alasan digunakannya AICc adalah berawal dari prinsip *parsimony* yang menyatakan bahwa model terbaik diharapkan terbentuk dari koefisien/parameter regresi yang tidak banyak tapi mampu menjelaskan model secara keseluruhan (Khairunnisa, 2015). Model terbaik adalah model dengan nilai AIC atau AICc terkecil.

3.8 Pembobot

Nilai pembobot pada model GWLRS sangat penting, karena mewakili letak data observasi satu dengan lainnya. Pembobotan digunakan untuk memberikan nilai yang berbeda di setiap lokasi karena akan berpengaruh pada parameter regresinya.

Matriks pembobotan :

$$W(u_i, v_i) = \begin{bmatrix} w_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{in} \end{bmatrix}$$

dimana :

w_{ij} : pembobotan untuk masing-masing titik lokasi pengamatan (u_i, v_i)

Matriks pembobot merupakan ukuran kedekatan jarak antara satu lokasi dengan lokasi lainnya yang akan berpengaruh pada nilai penaksir parameter yang berbeda pada setiap lokasi.

Masing-masing observasi memiliki nilai pembobotan sebesar 1 pada model regresi global tanpa pembobotan geografis. Pada model GWR, pembobotan bervariasi sesuai lokasi pada titik regresi ke-i, dimana $0 \le w_{ij} \le 1$ dan w_{ij} semakin kecil ketika jarak d_{ij} bertambah. Berarti jika observasi dekat dengan titik regresi, maka akan memberikan bobot yang besar dibandingkan dengan yang jauh dari titik regresi.

Pembobotan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pembobot fungsi Kernel *Fixed Gaussian* dan pembobot fungsi Kernel *Fixed Bisquare*.

Fungsi pembobot Kernel *Fixed Gaussian* sebagai berikut:

$$w_{ij}(u_i, v_i) = exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{d_{ij}}{h}\right)^2\right) \quad (3.15)$$

Fungsi pembobot Kernel *Fixed Bisquare* sebagai berikut:

$$w_{ij}(u_i, v_i) = \begin{cases} \left(1-(d_{ij}/h)^2\right)^2, & jika \quad d_{ij} \le h \\ 0, & jika \quad d_{ij} > h \end{cases} \quad (3.16)$$

dengan :

w_{ij} : nilai bobot dari observasi pada lokasi ke-i dengan lokasi ke-j

d_{ij} : jarak *euclidean* antara lokasi ke-i dengan lokasi ke-j

h : parameter penghalus (*bandwidth*).

Rumus jarak euclidean sebagai berikut:

$$d_{ij} = \sqrt{(u_i - u_j)^2 + (v_i - v_j)^2} \quad (3.17)$$

dimana :

u_i = *Longitude* pada lokasi i

u_j = *Longitude* pada lokasi j

v_i = *Latitude* pada lokasi i

v_j = *Latitude* pada lokasi j

Bandwidth dapat dianalogikan sebagai ukuran radius dari suatu lingkaran, sehingga jika sebuah titik lokasi berada di dalam radius lingkaran tersebut, maka masih dianggap memiliki pengaruh terhadap penaksiran koefisien regresi pada titik lokasi i tersebut. Fungsi dari *bandwidth* adalah untuk menentukan bobot dari suatu lokasi terhadap lokasi lain yang digunakan sebagai pusat. Semakin dekat wilayah dengan daerah pusat, akan semakin besar pula pengaruh yang diberikan. Ada beberapa metode yang digunakan untuk memilih *bandwidth* optimum, salah satu diantaranya adalah metode *Cross Validation* (CV) (Dewi, 2015). Rumusnya adalah:

$$CV(h) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_{i \neq i}(h))^2 \quad (3.18)$$

dimana :

$\hat{y}_{i \neq i}(h)$ merupakan nilai penaksir (y_i) dimana pengamatan di lokasi (u_i, v_i) dihilangkan dari proses estimasi. Untuk mendapatkan nilai h yang optimal, maka diperoleh dari h yang menghasilkan nilai CV yang minimum (Fotheringham, Brunsdon, & Charlton, 2002). Proses untuk mendapatkan *bandwidth* yang meminimumkan nilai CV bisa dilakukan juga dengan metode *golden section search* pada *software* GWR4. Pembobotan yang terbaik yaitu pembobotan yang mengahasilkan nilai AIC_c terkecil.

3.9 Metode Analisis

Adapun metode dan tahapan analisis yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Melakukan analisis deskriptif data sebagai gambaran awal mengenai kemiskinan daerah kabupaten dan kota di Provinsi Jawa Barat serta faktor-faktor yang diduga mempengaruhi kemiskinan daerah kabupaten dan kota di Provinsi Jawa Barat.
2. Melakukan pengujian asumsi non-multikolinearitas terhadap variabel-variabel prediktor X.
3. Melakukan pengujian distribusi binomial terhadap variabel respon Y.
4. Menganalisis model global (model regresi logistik) dengan melakukan penaksiran estimasi parameter model global dan melakukan pengujian parameter model global.
5. Melakukan pemodelan dengang menggunakan GWLRS dengan langkah-langkah sebagai berikut:
    a. Karena variabel prediktor yang bersifat global belum diketahui, maka semua variabel prediktor diasumsikan bersifat lokal, sehingga dilakukan penaksiran parameter model GWLR terlebih dahulu dengan pembobot fungsi Kernel *Fixed Gaussian* dan fungsi Kernel *Fixed Bisquare* menggunakan *software* GWR4.
    b. Melakukan pengujian terhadap penaksir parameter model GWLR.

c. Menentukan variabel prediktor yang bersifat global dan variabel yang bersifat lokal.

d. Melakukan penaksiran parameter model GWLRS dengan pembobot fungsi Kernel *Fixed Gaussian* dan fungsi Kernel *Fixed Bisquare* menggunakan *software* GWR4.

e. Melakukan pengujian terhadap penaksir parameter model GWLRS.

6. Membuat kesimpulan.