BAB III

FUNGSI MIDKONVEKS

Pada bab ini akan dibahas tentang fungsi midkonveks, fungsi midkonveks pada ruang linear bernorm, serta fungsi midkonveks pada bilangan real.

3.1 Pendahuluan

Diberikan fungsi bernilai real yang terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] \qquad (1)$$

untuk setiap x dan y pada I. Fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks jika dan hanya jika

$$f[\text{ë}x + (1 - \text{ë})y] \leq \text{ë}f(x) + (1 - \text{ë})f(y) \qquad (2)$$

untuk setiap x dan y pada I, $\text{ë} \in (0,1)$. Jika $\text{ë} = \frac{1}{2}$ dapat ditunjukkan semua fungsi yang memenuhi (2) juga memenuhi (1), tetapi tidak sebaliknya.

Melalui fungsi konveks yaitu fungsi yang memenuhi (2) selanjutnya akan didefinisikan fungsi midkonveks yaitu fungsi yang memenuhi (1). Kedua definisi ini hanya berlaku pada fungsi yang terdefinisi pada subset konveks U pada ruang linear bernorm dan akan dilihat hubungan antara fungsi konveks dan fungsi midkonveks

3.2 Fungsi Midkonveks pada Ruang Linear Bernorm

Definisi 3.2.1 (Fungsi Midkonveks)

Diketahui L ruang linear dan himpunan konveks $U \subseteq L$. Suatu fungsi $f: U \to \mathbb{R}$ disebut fungsi midkonveks jika untuk setiap $x, y \in U$, berlaku

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)]$$

Contoh :

1. $g(x) = |x|$. Akan ditunjukkan g midkonveks

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left|\frac{x+y}{2}\right| = \frac{1}{2}|x+y| \leq \frac{1}{2}(|x|+|y|) = \frac{1}{2}[g(x)+g(y)]$$

2. $h(x) = x^2$. Akan ditunjukkan h midkonveks

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$$

berdasarkan ketaksamaan aritmatik-rataan geometri $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ sehingga $ab \leq \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$, maka

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right) + \frac{1}{4}y^2 \\
&= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2 \\
&\leq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right) + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2 \\
&= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}xy + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2 \\
&\leq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 \\
&\quad + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2 \\
&= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{16}xy + \frac{1}{32}y^2 + \frac{1}{16}y^2 \\
&\quad + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2 \\
&\leq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{32}y^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2 \\
&= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{32}xy + \frac{1}{64}y^2 \\
&\quad + \frac{1}{32}y^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2
\end{aligned}$$

jika diteruskan akan ditemukan deret geometri tak hingga. Dan berdasarkan rumus geometri tak hingga,

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\leq \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{64}x^2 + \cdots + \frac{1}{64}y^2$$

$$+ \frac{1}{32}y^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$= \frac{1}{2}[h(x) + h(y)]$$

Definisi 3.2.2 (Kombinasi Konveks Rasional)

Kombinasi $\sum_1^n á_i x_i$ disebut kombinasi konveks rasional pada titik $x_1, \cdots, x_n$ jika,

$á_i \geq 0$ untuk $i = 1, \cdots, n$ (1)

$\sum_1^n á_i = 1$ (2)

$á_i$ bilangan rasional untuk $i = 1, \cdots, n$ (3)

Contoh :

Akan ditunjukkan $\sum_1^n \frac{1}{n} x_i$ adalah kombinasi konveks rasional.

$á_i = \frac{1}{n} \geq 0$,

$\sum_1^n á_i = \sum_1^n \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{sebanyak\ n} = \frac{n}{n} = 1$,

dan $á_i = \frac{1}{n}$ adalah bilangan rasional untuk $i = 1, \cdots, n$.

Teorema 3.2.3 Fungsi f dikatakan midkonveks pada himpunan konveks $U \subseteq L$ jika dan hanya jka untuk setiap kombinasi konveks rasional dari titik-titik pada U berlaku

$f(\sum_1^n á_i x_i) \leq \sum_1^n á_i f(x_i)$ (4)

Bukti:

Jelas jika dipilih $á_1 = á_2 = \frac{1}{2}$ sembarang f akan memenuhi (4), karena diketahui f midkonveks. Pertama akan ditunjukkan bahwa f fungsi midkonveks pada kasus spesial dimana $á_1 = \cdots = á_n = \frac{1}{n}$ memenuhi (4). Saat $n = 4$

$$f\left(\sum_{1}^{4} á_i x_i\right) = f\left(\sum_{1}^{4} \frac{1}{4} x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right)$$

$$= f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{2} f\left(\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4)\right)$$

$$\leq \frac{1}{4}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)] = \frac{1}{4}\sum_{1}^{4} f(x_i)$$

$$= \sum_{1}^{4} \frac{1}{4} f(x_i) = \sum_{1}^{4} á_i f(x_i)$$

Akan ditunjukkan jika $n = 2^k$ berlaku

$$f\left(\sum_{1}^{2^k} á_i x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}\left[f(x_1) + \cdots + f\left(x_{2^k}\right)\right] = \sum_{1}^{2^k} á_i f(x_i)$$

Untuk $k = 1$, maka $n = 2$. Jelas karena merupakan definisi midkonveks.

Jika untuk $k = t$ benar, akan ditunjukkan untuk $k = t + 1$ juga benar. $k = t$ benar artinya

$$f\left(\sum_{1}^{2^t} á_i x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^t}}{2^t}\right) \leq \frac{1}{2^t}[f(x_1) + \cdots + f(x_{2^t})] = \sum_{1}^{2^t} á_i f(x_i)$$

benar. Sehinggga,

$$f\left(\sum_{1}^{2^{k+1}} á_i x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^{t+1}}}{2^{t+1}}\right) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^t} + x_{2^t+1} + \cdots + x_{2^t+2^t}}{2 \cdot 2^t}\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{2^t}}{2^t}\right) + f\left(\frac{x_{2^t+1} + \cdots + x_{2^t+2^t}}{2^t}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^t}[f(x_1) + \cdots + f(x_{2^t})] + \frac{1}{2^t}[f(x_{2^t+1}) + \cdots + f(x_{2^t+2^t})]\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^t}[f(x_1) + \cdots + f(x_{2^t}) + f(x_{2^t+1}) + \cdots + f(x_{2^t+2^t})]$$

$$= \frac{1}{2^{t+1}}[f(x_1) + \cdots + f(x_{2^{t+1}})] = \frac{1}{2^{t+1}} \sum_{1}^{2^{k+1}} f(x_i)$$

$$= \sum_{1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^{t+1}} f(x_i) = \sum_{1}^{2^{k+1}} á_i f(x_i)$$

Jadi ntuk setiap $n = 2^k$, berlaku

$$f\left(\sum_{1}^{2^k} á_i x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + \cdots + f(x_n)] = \sum_{1}^{2^k} á_i f(x_i)$$

Untuk $n = 3$,

$$f\left(\sum_{1}^{3} á_i x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$$

$$= f\left[\frac{1}{2^2}\left(x_1 + x_2 + x_3 + (2^2 - 3)\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)\right]$$

$$\leq \frac{1}{2^2}\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + (2^2 - 3)f\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$$

sehingga,

$$\left(1 - \frac{2^2 - 3}{2^2}\right) f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{1}{2^2}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

atau

$$\frac{3}{2^2} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{1}{2^2}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]$$

kali dengan $\frac{2^2}{3}$ maka

$$f\left(\sum_1^3 \acute{a}_i x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \leq \frac{1}{3}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] = \sum_1^3 \acute{a}_i\, f(x_i)$$

Dengan pola yang sama untuk setiap $n \neq 2^k$. Pilih m sehingga $2^{m-1} < n < 2^m$. Maka

$$\begin{aligned} f\left(\sum_1^n \acute{a}_i x_i\right) &= f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \\ &= f\left[\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{2^2}\left(x_1 + \cdots + x_n + (2^m - n)\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{2^m}\left[f(x_1) + \cdots + f(x_n) + (2^m - n) f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

kita akan peroleh

$$\left(1 - \frac{2^m - n}{2^m}\right) f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{2^m}[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

kalikan dengan $\frac{2^m}{n}$ maka

$$f\left(\sum_1^n \acute{a}_i x_i\right) = f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}[f(x_1) + \cdots + f(x_n)] = \sum_1^n \acute{a}_i\, f(x_i)$$

Diberikan sembarang himpunan n bilangan rasional positif $\acute{a}_i$ sehingga $\sum_1^n \acute{a}_i = 1$, pilih $\acute{a}_i = u_i/d$ dimana $\sum_1^n u_i = d$, maka

$$f\left(\sum_{1}^{n} á_i x_i\right) = f\left(\sum_{i}^{n} \frac{u_i}{d} x_i\right) = f\left(\frac{u_1}{d} x_1 + \cdots + \frac{u_n}{d} x_n\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{d}\left[\underbrace{(x_1 + \cdots + x_1)}_{sebanyak\, u_1} + \cdots + \underbrace{(x_n + \cdots + x_n)}_{sebanyak\, u_n}\right]\right)$$

$$\leq \frac{1}{d} f\left(\left[\underbrace{(x_1 + \cdots + x_1)}_{sebanyak\, u_1} + \cdots + \underbrace{(x_n + \cdots + x_n)}_{sebanyak\, u_n}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{d} f(u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n) \leq \frac{1}{d}\left(u_1 f(x_1) + \cdots + u_n f(x_n)\right)$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{i}^{n} u_i f(x_i) = \sum_{i}^{n} \frac{u_i}{d} f(x_i) = \sum_{i}^{n} á_i f(x_i). \blacksquare$$

Persamaan (4) disebut Ketaksamaan Jensen.

Teorema 3.2.4 Diberikan $f: L \to R$, dan f memenuhi ketaksamaan jensen

(a) Untuk semua $á_i \Leftrightarrow f$ linear

(b) Untuk semua $á_i$ memenuhi persamaan (2) $\Leftrightarrow f$ affine

(c) Untuk semua $á_i$ memenuhi persamaan (1) dan (2) $\Leftrightarrow f$ konveks

(d) Untuk semua $á_i$ memenuhi persamaan (1), (2), dan (3) $\Leftrightarrow f$ midkonveks

Bukti:

(d) Sudah terbukti pada Teorema 3.2.3.

(c) untuk $n = 2$, $x_1, x_2 \in U$ dan $á_1 + á_2 = 1$, maka

$$f\left(\sum_{1}^{2} á_i x_i\right) = f(á_1 x_1 + á_2 x_2) = f(á_1 x_1 + (1 - á_1) x_2)$$

$$\leq á_1 f(x_1) + (1 - á_1) f(x_2) = á_1 f(x_1) + á_2 f(x_2) = \sum_{i}^{2} á_i f(x_i).$$

untuk $n = 3$, $x_1, x_2, x_3 \in U$ dan $á_1 + á_2 + á_3 = 1$, maka

$$f\left(\sum_{1}^{3} á_i x_i\right) = f(á_1 x_1 + á_2 x_2 + á_3 x_3)$$

$$= f\left[á_1 x_1 + (á_2 + á_3)\left(\frac{á_2}{á_2 + á_3} x_2 + \frac{á_3}{á_2 + á_3} x_3\right)\right]$$

$$\leq á_1 f(x_1) + (á_2 + á_3) f\left(\frac{á_2}{á_2 + á_3} x_2 + \frac{á_3}{á_2 + á_3} x_3\right)$$

$$\leq á_1 f(x_1) + (á_2 + á_3)\frac{á_2}{á_2 + á_3} f(x_2)$$

$$+ (á_2 + á_3)\frac{á_3}{á_2 + á_3} f(x_3)$$

$$= á_1 f(x_1) + á_2 f(x_2) + á_3 f(x_3) = \sum_{i}^{3} á_i f(x_i).$$

Jika untuk $n = k$ benar, akan ditunjukkan untuk $n = k + 1$ benar.

untuk $n = k$ benar artinya, $f[\sum_1^k á_i x_i] \leq \sum_1^k á_i f(x_i)$ benar. Sehingga

$$f\left[\sum_{1}^{k+1} á_i x_i\right] = f[á_1 x_1 + \cdots + á_k x_k + á_{k+1} x_{k+1}] = f\left(\sum_{1}^{k} á_i x_i + á_{k+1} x_{k+1}\right)$$

karena $\sum_1^{k+1} á_i = 1$ maka,

$$f\left(\sum_{1}^{k} á_i x_i + á_{k+1} x_{k+1}\right) = f\left(\sum_{1}^{k} á_i x_i + \left(1 - \sum_{1}^{k} á_i\right) x_{k+1}\right)$$

$$\leq \sum_{1}^{k} á_i f(x_i) + \left(1 - \sum_{1}^{k} á_i\right) f(x_{k+1})$$

$$= \sum_{1}^{k} á_i f(x_i) + á_{k+1} f(x_{k+1}) = \sum_{1}^{k+1} á_i f(x_i)$$

(b) Sudah dibuktikan pada Teorema 2.4.3 f affine jika dan hanya jika $[\sum_1^n á_i x_i] = \sum_1^n á_i f(x_i)$. Karena f memenuhi ketaksamaan Jensen, harus ditunjukkan $f[\sum_1^n á_i x_i] \geq \sum_1^n á_i f(x_i)$. Jika $\sum_1^n á_i = 1$, artinya minimal ada satu $á_i$ yang positif. Misalkan $á_1$ positif, perhatikan

$$\text{á}_1 x_1 + \cdots + \text{á}_n x_n = \sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i$$

$$\text{á}_1 x_1 = \sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i - \text{á}_2 x_2 + \cdots + \text{á}_n x_n$$

$$x_1 = \frac{1}{\text{á}_1}\left(\sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i\right) + \frac{-\text{á}_2}{\text{á}_1} x_2 + \cdots + \frac{-\text{á}_n}{\text{á}_1} x_n$$

dan karena $\frac{1}{\text{á}_1} + \frac{-\text{á}_2}{\text{á}_1} + \cdots + \frac{-\text{á}_n}{\text{á}_1} = \frac{\text{á}_1}{\text{á}_1} = 1$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f\left[\frac{1}{\text{á}_1}\left(\sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i\right) + \frac{-\text{á}_2}{\text{á}_1} x_2 + \cdots + \frac{-\text{á}_n}{\text{á}_1} x_n\right] \\ &= f\left[\frac{1}{\text{á}_1}\left(\sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i\right) + \sum_{2}^{n} \frac{-\text{á}_i}{\text{á}_1}(x_i)\right] \\ &\leq \frac{1}{\text{á}_1} f\left(\sum_{1}^{nf(x_1)} \text{á}_i x_i\right) + \sum_{2}^{n} \frac{-\text{á}_i}{\text{á}_1} f(x_i) \end{aligned}$$

kalikan dengan á_1, sehingga

$$\text{á}_1 f(x_1) \leq f\left(\sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i\right) + \sum_{2}^{n} -\text{á}_i f(x_i)$$

$$\text{á}_1 f(x_1) + \sum_{2}^{n} \text{á}_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i\right)$$

$$\sum_{1}^{n} \text{á}_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{1}^{n} \text{á}_i x_i\right)$$

(a) Karena (4) dipenuhi oleh semua á_i, jelas dipenuhi oleh semua á_i yang terbatas (2). Berdasarkan (b), f affine, berdasarkan definisi $f(x) = g(x) + b$ untuk suatu fungsi linear g dan konstanta b. Harus ditunjukkan $b = 0$. Berdasarkan definisi, g linear, maka $g(\text{Ï}) = \text{Ï}$ dan jika f affine, maka $f(\text{Ï}) = b$. Perhatikan

$$f(\text{Ï}) = f(1 \cdot \text{Ï} + 1 \cdot \text{Ï}) \leq f(\text{Ï}) + f(\text{Ï})$$

dan

$$f(\text{Ï}) = f(0 \cdot \text{Ï}) \leq 0f(\text{Ï}) = 0$$

Jadi, $b = f(\text{Ï}) = 0$. ■

Teorema 3.2.5 Diberikan fungsi f midkonveks pada himpunan buka $U \subseteq L$. Jika f terbatas di atas pada persekitaran dari sebuah titik $x_0 \in U$, maka f kontinu dan konveks di U.

Bukti:

Pilih titik $\text{Ï} \in U$, misalkan f terbatas di atas pada $N_r(\text{Ï})$ oleh B dan $|f(\text{Ï})| = 0$. Pilih suatu bilangan rasional $\text{å} \in (0,1)$ dan suatu x sehingga $\|x\| < \text{å}r$, perhatikan

$$x = (1 - \text{å})\text{Ï} + \varepsilon\left(\frac{x}{\text{å}}\right)$$

dan

$$\text{Ï} = \frac{\text{å}}{1 + \text{å}}\left(\frac{-x}{\text{å}}\right) + \frac{1}{1 + \text{å}}x$$

karena f midkonveks dan $f(\text{Ï}) = 0$, maka

$$f(x) = f\left((1 - \text{å})\text{Ï} + \varepsilon\left(\frac{x}{\text{å}}\right)\right) \leq (1 - \text{å})f(\text{Ï}) + \text{å}f\left(\frac{x}{\text{å}}\right) \leq 0 + \text{å}B = \text{å}B$$

dan

$$f(\text{Ï}) = f\left(\frac{\text{å}}{1 + \text{å}}\left(\frac{-x}{\text{å}}\right) + \frac{1}{1 + \text{å}}x\right) \leq \frac{\text{å}}{1 + \text{å}}f\left(\frac{-x}{\text{å}}\right) + \frac{1}{1 + \text{å}}f(x)$$
$$\leq \frac{\text{å}}{1 + \text{å}}B + \frac{1}{1 + \text{å}}f(x)$$

Jadi, $\|x\| < \text{å}r$ mengakibatkan $|f(x)| \leq \text{å}B$. Hal ini menunjukkan f kontinu pada $x = \text{Ï}$.

Akan ditunjukkan f terbatas di atas oleh B untuk setiap titik $y \neq \text{Ï}$ pada U. Dengan mencontoh pembuktian pada Teorema 2.6.1, pilih $\text{ñ} > 1$ sehingga $z = \text{ñ}y \in U$, dan misalkan $\text{ë} = 1/\text{ñ}$, maka

$$M = \{v \in L: v = (1 - \text{ë})x + \text{ë}z, x \in N\}$$

adalah persekitaran dari $\text{ë}z = y$ dengan jari-jari$(1 - \text{ë})r$ (gambar 2.3.1). Selanjutnya,

$$f(v) = f\big((1 - \text{ë})x + \text{ë}z\big) \leq (1 - \text{ë})f(x) + \text{ë}f(z) \leq B + f(z)$$

Sehingga, f terbatas di atas pada M. Jadi, f kontinu di y. ■

3.3 Fungsi midkonveks pada ℝ

Pada bagian ini akan dikaji apa yang akan terjadi jika domain dari fungsi midkonveks yang awalnya adalah ruang linear bernorm diperluas menjadi ℝ. Jensen (1905) telah membuktikan bahwa jika fungsi midkonveks terbatas di atas pada (a, b), maka f kontinu. Prasyarat apa saja yang diperlukan agar f kontinu pada (a, b).

Teorema 3.3.1 Misalkan f fungsi midkonveks pada (a, b). Jika f terbatas di atas pada persekitaran dari sebuah titik $x_0 \in (a, b)$, maka f kontinu pada (a, b).

Bukti: teorema ini adalah kasus khusus dari Teorema 3.2.5

Teorema 3.3.2 Diberikan f fungsi midkonveks pada (a, b) dan misalkan terdapat himpunan $M \subseteq (a, b)$ memiliki ukuran positif dimana f terbatas di atas. Maka f kontinu pada (a, b).

Bukti:

Misalkan himpunan M adalah himpunan yang memiliki ukuran positif. Himpunan M dapat dibentuk menjadi himpunan J_n, interval buka yang tidak tumpang tindih dari (a, b), sehingga

$$\ell(M) \leq \sum_{1}^{\infty} \ell(J_n) < \frac{4}{3}\ell(M)$$

karena himpunan $M \cap J_n$ semua terpisah dan terukur,

$$\sum_{1}^{\infty} \ell(M \cap J_n) = \ell \bigcup_{1}^{\infty} (M \cap J_n) = \ell(M)$$

haruslah terdapat minimal sebuah J_n, misalkan J, sehingga

$$0 < \ell(M \cap J) \leq \ell(J) < \frac{4}{3}\ell(M \cap J)$$

Misalkan x_0 adalah titik tengah pada interval $J = (c, d)$. Andaikan f tidak terbatas di atas pada sembarang persekitaran di x_0. Dapat dipilih x_1 sehingga

$$|x_1 - x_0| < å = \frac{\ell(M \cap J)}{6}$$

dan $f(x_1) > 1$. Didefinisikan

$$N = \{y : y = 2x_1 - x \; dimana \; x \in (M \cap J)\}$$

karena N adalah refleksi dan translasi dari $M \cap J$, jelas $\ell(N) = \ell(M \cap J) = 6å$. Untuk sembarang $y \in N$,

$$\begin{aligned} |y - x_0| = |2x_1 - x - x_0| = |2(x_1 - x_0) + x_0 - x| \leq 2|x_1 - x_0| + |x_0 - x| \\ < 2å + |x_0 - x| \end{aligned}$$

Jadi, $N \subset (c - 2å, d + 2å)$. Karena $\ell(N) = 6å$, $\ell(N \cap J) \geq 2å$. Perhatikan

$$y = 2x_1 - x$$

$$x_1 = \frac{x + y}{2}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)] \leq \frac{1}{2}f(y)$$

Karena $f(x_1) > 1$, maka $f(y) \geq 2$. Sehingga

$$\ell(J) \geq \ell[(M \cap J) \cup (N \cap J)] = \ell(M \cap J) + \ell(N \cap J) \geq 6å + 2å = \frac{4}{3}\ell(M \cap J)$$

Kontradiksi dengan J yang dipilih. Artinya, f haruslah terbatas di atas pada persekitaran dari x_0. Berdasarkan Teorema 3.3.1 maka f kontinu.■

Teorema 3.3.3 Jika $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ terukur dan midkonveks, maka f kontinu pada (a,b).

Bukti:

Andaikan f tidak kontinu. Pilih $x_0 \in (a,b)$ dan c sedemikian sehiingga $(x_0 - 2c, x_0 + 2c) \subseteq (a,b)$, dan misalkan B_n adalah himpunan terukur dimana $B_n = \{x \in (a,b): f(x) > n\}$. Untuk suatu n pilih $u \in B_n \cap (x_0 - c, x_0 + c)$. Untuk sembarang ë $\in (0,1)$

$$n < f(u) = f\left[\frac{u + \text{ë}c}{2} + \frac{u - \text{ë}c}{2}\right] \leq \frac{1}{2}[f(u + \text{ë}c) + f(u - \text{ë}c)]$$

Oleh karena itu, $f(u + \text{ë}c) > n$ dan $f(u - \text{ë}c) > n$, artinya $u + \text{ë}c \in B_n$ dan $u - \text{ë}c \in B_n$. Ekuivalen dengan, jika $M_n = \{x: x = y - u, y \in B_n\}$ maka $\text{ë}c \in M_n$ dan $-\text{ë}c \in M_n$ untuk semua ë $\in (0,1)$. Karena $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$, berdasarkan teorema pada measure theory (Natanson I, 1961)

$$c \leq \lim_{n\to\infty} \ell(B_n) = \ell\left(\bigcap_1^\infty B_n\right)$$

sehingga $\bigcap_1^\infty B_n \neq \emptyset$. Artinya terdapat $v \in (a,b)$ sedemikian sehingga $f(v) > n$ untuk setiap n, ini kontradiksi.

Perhatikan himpunan terukur M dimana $-\text{ë}c \in M$ dan $\text{ë}c \in M$ untuk setiap ë $\in (0,1)$. Bentuk $A_1 = M \cap (-c, 0)$ dan $A_2 = M \cap (0, c)$. Maka $-A_1 \cup A_2 = [0, c]$ sehingga

$$c = \ell[0,c] \leq \ell(-A_1) + \ell(A_2) = \ell(A_1) + \ell(A_2) = \ell(A_1 \cup A_2) \leq \ell(M)$$

Jadi, terbukti f kontinu. ■