

## BAB III

### WAVELET

#### 3.1 Analisis Multiresolusi

**Definisi 3.1.1 Analisis Multiresolusi** (Daubechies, 1992)

Analisis Multiresolusi terbentuk dari barisan subruang tertutup dari

$V_j, j \in \mathbb{Z}$  dari  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  yang memenuhi

- i.  $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$
- ii.  $f \in V_j$  jika dan hanya jika  $f(2(\cdot)) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$
- iii.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- iv.  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$
- v. Terdapat fungsi  $\phi \in V_0$ , sedemikian sehingga  $\{\phi(\cdot - k): k \in \mathbb{Z}\}$  adalah basis ortonormal untuk  $V_0$

Fungsi  $\phi$  pada (v) dinamakan fungsi skala dalam Analisis Multiresolusi tersebut.

**Corrolary** (Daubechies, 1992)

Misalkan  $\{V_j: j \in \mathbb{Z}\}$  suatu Analisis Multiresolusi pada  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  dan  $\phi \in V_0$  fungsi skala dalam Analisis Multiresolusi tersebut. Dan didefinisikan

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad 3.1.1$$

Maka untuk setiap  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\{\phi_{j,k}(x), k \in \mathbb{Z}\}$  merupakan basis ortonormal untuk  $V_j$

**Bukti :**

Mis  $j \in \mathbb{Z}$  maka  $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  merupakan himpunan orthonormal, karena

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,m} \rangle = 2^j \int_{\mathbb{R}} \phi(2^j x - k) \phi(2^j x - m) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(x-k)\phi(x-m) dx = \delta_{k,m}$$

Selanjutnya, mis.  $f \in V_j$ , maka  $f(2^{-j} \cdot) \in V_0$  dan karenanya

$$f(2^{-j}x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x')$$

Substitusikan  $x' = 2^{-j}x$ , dengan demikian

$$f(x') = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x')$$

Pada pengkontruksian wavelet, misalkan  $\{V_j: j \in \mathbb{Z}\}$  merupakan suatu Analisis Multiresolusi pada  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  serta misalkan  $W_0$  komplemen ortogonal dari  $V_0$  relatif terhadap  $V_1$ , sedemikian sehingga

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

selanjutnya untuk setiap  $j \in \mathbb{Z}$  definisikan

$$W_j = \{f(2^j \cdot), f \in W_0\}$$

maka

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad j \in \mathbb{Z}$$

karena  $V_j \rightarrow \{0\}$  untuk  $j \rightarrow \infty$ , kita peroleh

$$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} W_n$$

Untuk memperoleh wavelet, yang harus dilakukan terlebih dahulu yaitu menentukan  $\psi \in W_0$  sedemikian sehingga  $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  merupakan basis ortonormal untuk  $W_0$ . Selanjutnya dapat diperiksa bahwa untuk setiap  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  membentuk basis ortonormal untuk  $W_j$ . Dengan demikian,  $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  merupakan basis ortonormal untuk  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$  atau  $\psi$  merupakan wavelet yang diinginkan.

### 3.2 Transformasi Wavelet

Transformasi wavelet adalah sebuah transformasi untuk memotong data atau fungsi atau operator dalam komponen frekuensi yang berbeda (Daubechies, 1992). Penerapan transformasi wavelet telah banyak dikembangkan, baik dalam Bidang Matematika (dalam resolusi calderon pada analisis harmonik), Bidang Fisika ( keadaan yang terjadi untuk  $(ax + b)$  dalam mekanika quantum, pertama kali di kontruksi oleh alaksen dan klauder (Aslaken & Klauder, 1968) dan pada kasus atom hidrogen Hamilton yang dikemukakan oleh Paul (Paul, 1985)), Geologi (Analisis Seismik yang dikemukakan oleh J Morlet (Morlet, Arens, & Fourgeau, 1982)), serta masih banyak yang lainnya, bahkan untuk bidang ekonomi sekalipun.

Transformasi wavelet, mentransformasikan sinyal yang berjalan bersamaan dengan waktu. Dengan kata lain transformasi wavelet bergantung pada 2 variabel, yaitu : *scale* ( frekuensi ) dan waktu. Hal ini mengindikasikan bahwa wavelet dapat melokalisasi frekuensi – waktu, sama seperti WFT ( *Windowed Fourier Transformation* ). Berdasarkan analogi dari WFT, Transformasi Wavelet dirumuskan sebagai berikut :

$$(T^{wav} f)(a, b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int f(t) \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) dt \quad 3.2.1$$

$$\psi^{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) \quad 3.2.2$$

dan

$$(T_{m,n}^{wav} f)(a, b) = a_0^{-\frac{m}{2}} \int f(t) \psi \left( a_0^{-\frac{m}{2}} t - nb_0 \right) dt \quad 3.2.3$$

dengan kondisi

$$\int \psi(t) dt = 0 \quad 3.2.4$$

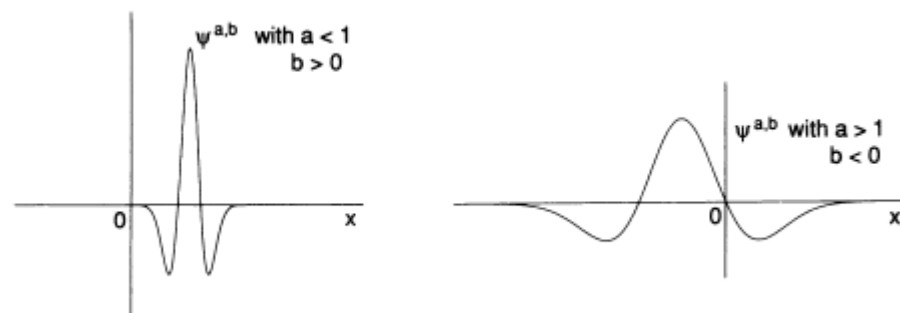
$$\int |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad 3.2.5$$

serta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} < \infty \quad 3.2.6$$

dimana  $\psi(f)$  merupakan Transformasi Fourier, dan  $f$  adalah fungsi frekuensi dari  $\psi(t)$ . Fungsi  $\psi$  disebut ‘ *mother wavelet* ’, berdasarkan kondisi pada persamaan (3.2.6), hal ini menunjukkan bahwa apabila  $f \rightarrow 0$  mengakibatkan  $\psi(f)$  menuju nol pula (Grossmann, A. and Morlet, J., 1984).

Persamaan  $\psi^{a,b}$  sering disebut dengan wavelet. Untuk nilai dari  $a$  dan  $b$  adalah bilangan real. Dengan memperbesar nilai  $|a|$  ( $a > 1$ ) maka akan berkorespondansi dengan small frequencies atau dengan kata lain membuat kurva wavelet melebar sepanjang domain waktu, atau jika  $|a|$  diperkecil ( $a < 1$ ) maka berkorespondansi dengan *high frequencies* atau mempersempit kurva wavelet, dan pada perubahan nilai  $b$ , dapat dikatakan terdapat perubahan dalam pusat dari lokalisasi waktu hal ini dapat dilihat pada gambar 3.1



**Gambar 3. 1** lokalisasi waktu dan perbesaran nilai  $a$  dalam wavelet

Berdasarkan pada jenis domain Transformasi Wavelet, terbagi menjadi 2 transformasi yaitu :

1. *Continuous Wavelet Transformation* / Transformasi Wavelet Kontinu (CWT)
2. *Discrete Wavelet Transformation* / Transformasi Wavelet Diskret (DWT)

### 3.2.1 *Continuous Wavelet Transformation* (CWT)

*Continuous Wavelet Transformation* (CWT) merupakan fungsi dari 2 variabel  $W(a, b)$  dan diperoleh dari proyeksi fungsi  $f(t)$  terhadap fungsi wavelet  $\psi$ . Penggunaan Transformasi Wavelet pada bentuk CWT diperlihatkan pada persamaan (3.2.2), hal ini dikarenakan domain pada persamaan (3.2.2) memenuhi domain yang kontinu.

$$W(a, b) = \langle f(t), \psi^{a,b}(t) \rangle \quad 3.2.1.1$$

pada konteks Ruang Lebesgue, persamaan (3.2.1.1) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$W(a, b) = \int f(t) \cdot \psi^{a,b}(t) dt \quad 3.2.1.2$$

dan berdasarkan persamaan (3.2.2) maka persamaan (3.2.1.1) dinyatakan sebagai berikut:

$$W(a, b) = \int f(t) \cdot |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad 3.2.1.3$$

Persamaan (3.2.1.3) merupakan persamaan yang merepresentasikan CWT. Pada CWT, fungsi  $f(t)$  dapat dibentuk dari CWT melalui resolusi identitas, hal ini mengakibatkan bentuk  $f(t)$  menjadi

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} W(a, b) \psi^{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad 3.2.1.4$$

dengan

$$c_\psi = 2\pi \int |\hat{\psi}(\xi)|^2 |\xi|^{-1} d\xi \quad 3.2.1.5$$

### 3.2.2 Discrete Wavelet Transformation (DWT)

Berdasarkan sifatnya, *Discrete Wavelet Transformation* (DWT) dapat dibedakan menjadi 2 (Daubechies, 1992), yaitu:

1. *Redundant Discrete System* (MODWT – *Maximum Overlap Discreet Wavelet Transformation*)
2. Wavelet Basis Ortonormal

Pada dasarnya DWT menggunakan wavelet *dyadic* dimana translasi, skala dan waktu bervariasi dalam pangkat. Pada wavelet basis ortonormal, pemilihan dari  $\psi$ ,  $a_0, b_0$  akan menghasilkan  $\psi_{m,n}$  yang merupakan basis ortonormal pada  $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ . Selanjutnya dengan memilih  $a_0 = 2$ ,  $b_0 = 1$ , akan terdapat  $\psi$  dengan kemampuan untuk melokalisasi waktu dan frekuensi dengan baik, sedemikian sehingga

$$\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n) \quad 3.2.2.1$$

Pada analisis suatu data runtun waktu  $\{X_t\}$ , *Discrete Wavelet Transform* (DWT) mempunyai sifat transformasi ortonormal linear. Pada analisis komputasi terdapat suatu  $\{W_n; n = 0, 1, \dots, N - 1\}$  yang menyatakan koefisien DWT, dengan notasi  $W = \mathcal{W}X$ , dengan  $W$  adalah vektor kolom dengan panjang  $N = 2^j$  dengan elemen ke- $n$  adalah koefisien DWT ke- $n$  pada  $W_n$ , dan  $\mathcal{W}$  adalah sebuah matriks bernilai real berukuran  $N \times N$ . Sifat ortonormalitas menyatakan bahwa  $X = \mathcal{W}_T W$  dan  $\|W\|_2 = \|X\|_2$ . Oleh karena itu  $W_n^2$  menunjukkan besarnya pengaruh perubahan untuk masing-masing koefisien indeks ke- $n$ .

Secara umum pada data  $N = 2^j$ , penyusunan elemen  $\mathcal{W}$  dari wavelet haar atau keluarga wavelet lainnya kurang lebih sebagai berikut. Pada koefisien DWT di level pertama berukuran  $N/2$ , untuk level ke-2 ukurannya  $N/4$  sampai di level terakhir diperoleh  $W_{j0}$  dan  $V_{j0}$  dimana  $j$  merupakan bilangan level ke-. Sehingga didapatkan koefisien DWT untuk ukuran  $|x|$  dengan penjumlahan dari level pertama diperoleh matriks dengan ukuran  $N \times 1$  sebagaimana ukuran data asli. Perubahan koefisien tersebut dihubungkan dengan perubahan pada skala  $\tau_j$ , dengan  $\tau_j \equiv 2^{j-1}$  untuk level  $j = 1, \dots, J$  dengan  $\tau_j$  adalah sebuah skala terstandarisasi tanpa unit

DWT dari sebuah deret waktu  $X$  dengan panjang  $N$ , adalah sebuah transformasi linear, dengan pembentukan  $W$  dari koefisien DWT per-level, dari perkalian matriks filter atas  $X$ .

$$\mathcal{W}X = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 X \\ \mathcal{W}_2 X \\ \vdots \\ \mathcal{W}_j X \\ \mathcal{V}_j X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_j \\ V_j \end{bmatrix} = W$$

Dimana  $W$  adalah matriks berukuran  $N/2^j \times N$  dan  $V^j$  adalah matriks berukuran  $1 \times N$ .  $W_j$  adalah vektor kolom dengan panjang  $N/2^j$  dan  $V^j$  adalah elemen terakhir dari  $W$  yang berukuran  $1 \times 1$ .  $W_j$  merupakan baris yang tergeser sirkular terhadap baris  $j$  yang lainnya berdasarkan sistem perodisasi terhadap

perubahan panjang level. Koefisien wavelet pada vektor  $W_j$  dihubungkan dengan perbedaan rata-rata yang berdekatan dengan skala  $\tau_j \equiv 2^{j-1}$  dimana koefisien skala pada  $V^j$  sama dengan  $N^{\frac{1}{2}}$  atau setara dengan rata-rata  $X$ .

Untuk membangun wavelet dari  $X$  yang memiliki sifat ortonormalitas, maka

$$X = W^J W = \sum_{j=1}^J W_j^T W_j + V_j^T V_j \quad 3.2.2.2$$

Berdasarkan persamaan (3.2.2.2) diketahui bahwa pendefinisian detail  $D_j$  dan aproksimasi  $S_j$  dinyatakan dengan  $D_j = W_j^T W_j$  dan  $S_j = V_j^T V_j$ , sehingga persamaan (3.2.2.2) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$X = \sum_{j=1}^J D_j + S_j \quad 3.2.2.3$$

### 3.2.2.1 Persamaan Wavelet dan Persamaan Skala

Persamaan skala atau persamaan dilatasi menunjukkan fungsi skala ( $\phi$ ) yang mengalami peregangan, dinyatakan dengan perumusan berikut :

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} g_1 \phi(2t - 1) \quad 3.2.2.1.1$$

dengan  $\phi(2t - 1)$  adalah fungsi skala  $\phi(t)$  yang mengalami pergeseran sepanjang sumbu waktu dengan langkah 1 dengan koefisien filter skala  $g_1$

Fungsi wavelet didefinisikan sebagai berikut :

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{l=0}^{L-1} (-1)^l g_1 \phi\left(2t + l - \frac{L}{2} + 1\right) \quad 3.2.2.1.2$$

dimana koefisien  $g_1$  harus memenuhi kondisi

1.  $\sum_{l=0}^{L-1} g_1 = \sqrt{2}$
2.  $\sum_{l=0}^{L-1} (-1)^l g_1 l^m = 0$

untuk  $m = 0, 1, \dots, \frac{L}{2} - 1$  dan diperoleh :

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l g_{l+2m} = 0, m \neq 0$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = 1$$

Hubungan antara koefisien  $h_1$  dan  $g_1$  dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$h_1 = (-1)^l g_{L-1-P}$$

atau dinyatakan pula dalam bentuk:

$$g_1 = (-1)^{l+1} h_{L-1-P}$$

### 3.2.2.2 Filter Wavelet

Filter Wavelet merupakan deret bernilai real  $\{h_t; t = 0, \dots, L - 1\}$  dengan  $L$  menyatakan lebar filter yang merupakan bilangan bulat. Karena  $L$  menyatakan lebar filter  $\{h_t\}$  maka terdapat  $h_0 \neq 0$  dengan  $h_{L-1} \neq 0$ . Sebuah filter wavelet seharusnya memenuhi tiga kondisi dasar sebagai berikut :

1.  $\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0$
2.  $\sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = 1$
3.  $\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2m} = 0$

Untuk mendapatkan koefisien wavelet terkait perubahan pada setiap skala atau level, filter dari runtun waktu  $X_t; t = 0, \dots, N - 1$  disirkulasi dengan  $h_l$ , dimana  $N \equiv 2^j$  untuk bilangan bulat positif  $J$ . Hasil dari filterisasi sirkuler  $X_t$  oleh  $h_l$  dinyatakan dalam perumusan berikut:

$$W_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l V_{j-1, 2t+1-l \bmod N}$$

$$N_{j-1} = \sum h_{j,l} X_{2^j(t+1)-1-P \bmod N}$$

Nilai koefisien DWT mengikuti perubahan tiap level, hal ini ditunjukkan oleh batas indeks  $t$ . Koefisien filter wavelet level ke-1 diperoleh dengan menggunakan perumusan berikut:

$$W_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l^0 X_{2t+1-l \bmod N}$$



Dimana  $h_1^0 : 1 = 0, 1, \dots, N - 1$  adalah  $\{h_1\}$  yang terperiodisasi ke panjang  $N$  serta  $W$  adalah matriks filter wavelet. Untuk  $0 \leq t \leq \left(\frac{N}{2}\right) - 1$  baris ke- $t$   $W_t^T$  pada  $\mathcal{W}$  diperoleh:

$$W_{1,t} = W_1^0 \cdot X = \sum_{l=0}^{L-1} h_1^0 X_{2t+1-l \bmod N} = \sum_{l=0}^{N-1} h_{2t+1-l \bmod N}^0 X_l$$

berdasarkan hal tersebut susunan filter wavelet di level ke-1 baris pertama atau pada saat  $t = 0$  adalah sebagai berikut:

$$W_1^0 = [h_1^0 \quad h_0^0 \quad h_{N-1}^0 \quad \dots \quad h_2^0]$$

Untuk membuktikan bahwa baris  $W_1$  merupakan sebuah vektor ortonormal berukuran  $\frac{N}{2}$ , maka sistem periodisasi untuk filter wavelet adalah sebagai berikut :

$$h_1^0 \begin{cases} h_1, 0 \leq l \leq L - 1 \\ h_0, L - 1 \leq l \leq N - 1 \end{cases}$$

berdasarkan hal tersebut susunan baris pertama matriks  $W_1$  adalah sebagai berikut:

$$W_1 = [h_1, h_0, h_{L-1}, \dots, h_2]$$

untuk sifat ortonormalitas filter wavelet, dapat dinyatakan dengan perumusan berikut:

$$\langle W_{t'}, W_t \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} h_l^2 = 1$$

untuk  $t' \neq t$  maka

$$\langle W_{t'}, W_t \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} h_l h_{l+2n} = 0$$

$W$  mempunyai invers yang sama dengan transposenya, yaitu  $W^t$ , dimana  $W = I_N$ . Sifat ortonormalitas pada matriks  $W$  dapat diketahui dengan pembuktian hasil kali antara 2 vektor dan energi unit untuk sebuah vektor.  $W_1^0$  adalah baris ke- $j$  pada  $W$  dengan  $W_j$  adalah sebuah vektor kolom  $W_{j,l}$  menotasikan elemen dari  $W$  pada baris ke- $j$  dan kolom ke- $l$  merupakan elemen ke- $l$  dari  $W_j$  dan untuk dua vektor berbeda  $W_j$  dan  $W_k$  maka sistem ortonormalitas dari sebuah matriks filter wavelet sebagai berikut:

$$\langle W_{t'}, W_t \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} W_{j,l} W_{k,l} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

### 3.2.2.3 Filter Skala

Pada pembahasan sebelumnya, diketahui bahwa filter wavelet  $\{h_l\}$  dipergunakan untuk membangun baris  $\frac{N}{2}$  pertama dari matriks DWT. W dalam pengolahan untuk membangun baris  $\frac{N}{2}$  terakhir dari W dilakukan dengan menggunakan algoritma piramid. Pada algoritma piramid ini, hal pertama yang dilakukan yaitu mendefinisikan filter kedua yang akan dipergunakan untuk membangun matriks V berukuran  $\frac{N}{2} \times N$ . Filter kedua yang dibutuhkan adalah *quadrature mirror filter* (QMF)  $\{V_1\}$  yang sesuai dengan  $\{h_l\}$  berikut :

$$g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-p} \quad 3.2.2.3.1$$

Filter  $\{g_l\}$  pada persamaan (3.2.2.6) dikenal dengan filter skala yang diasumsikan memenuhi kondisi:

1.  $\sum_{l=0}^{L-1} g_l = 0$
2.  $\sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = 1$
3.  $\sum_{l=0}^{L-1} g_l g_{l+2n} = 0$
4.  $\sum_{l=0}^{L-1} g_l h_{l+2n} = 0$

Sifat ortonormal dari  $\{h_l\}$  diperlukan untuk pembentukan  $W_l$  sedangkan  $\{g_l\}$  diperlukan untuk pembentukan  $V_l$  yang pada dasarnya hampir sama dengan penggunaan  $\{h_l\}$ , sehingga setiap baris  $V_l$  ortonormal. Hasil filterisasi sirkuler  $\{X_t\}$  oleh  $\{g_l\}$  dinyatakan sebagai berikut :

$$V_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{j-1, 2t+1-l \bmod N}$$

$$N_{j-1} = \sum g_{j,l} X_{2^j(t+1)-1-P \bmod N}$$

untuk  $t = 0, \dots, \frac{N}{2^j} - 1$ , dimana  $\{g_1^0\}$  adalah  $g_1$  yang terperiodisasi pada panjang  $N$ ,  $V_1$  adalah vektor dengan panjang  $\frac{N}{2}$  dimana elemen ke- $t$  adalah  $V_{1,t}$ , serta  $V_1$

adalah matriks berukuran  $\frac{N}{2} \times N$  yang mana baris pertamanya adalah sebagai berikut:

$$V_1^0 = [g_1^0 \ g_0^0 \ g_{N-1}^0 \ \dots \ g_2^0]$$

sedangkan untuk baris  $\frac{N}{2} - 1$  selebihnya dapat diekspresikan sebagai hasil pergeseran sirkuler  $\{V_0^T\}$ , yaitu  $[T^{2t} V_0]^T$ ,  $t = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$  sebagaimana filter wavelet sebelumnya. Selanjutnya  $V_1 = V_1 X$  dan baris  $V_1$  merupakan sekumpulan vektor ortonormal  $\frac{N}{2}$ .

Secara simultan baris pada  $V_1$  dan baris pada  $W_1$  merupakan sekumpulan vektor ortonormal  $N$ . Untuk baris ke- $t$  dari  $V_t$  dan  $W_t$  secara berturut-turut dinyatakan dengan  $[T^{2t} V_0]^T$  dan  $[T^{2t} W_0]^T$ , sehingga perlu diperlihatkan bahwa:

$$\langle [T^{2t} V_0]^T, [T^{2t} W_0]^T \rangle = 0$$

Ketika  $n = t' - t$ , maka untuk  $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$  akan diperoleh

$$\langle [T^{2t} V_0]^T, [T^{2t} W_0]^T \rangle = V_0^T T^{-2t} T^{2t} W_0 = V_0^T T^{2n} W_0 = \sum_{l=0}^{N-1} g_l h_{l+2 \bmod N}$$

ketika  $L \leq N$  maka  $g_l^0 = g_1$  dan  $h_l^0 = h_1$ , dengan melakukan reduksi diperoleh:

$$\langle [T^{2t} V_0]^T, [T^{2t} W_0]^T \rangle = \sum_{l=0}^{N-1} g_1 h_{1+2n} = 0 \quad 3.2.2.3.2$$

Persamaan (3.2.2.3.1) menyatakan filter skala dan wavelet untuk setiap pergeserannya ortogonal terhadap lainnya. Fakta tambahan bahwa filter skala adalah ortogonal untuk filter wavelet dan semua pergeseran menyatakan bahwa  $\mathcal{V}_1$  dan  $\mathcal{W}_1$  ortonogonal, dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{V}_1 \mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_1 V_1^T = V_1 \mathcal{W}_1^T = 0_{N/2}$$

Dimana  $0_{N/2}$  merupakan sebuah matriks  $\frac{N}{2}$  dan seluruhnya bernilai nol. Selanjutnya diketahui informasi bahwa  $\mathcal{W}_1 \mathcal{W}_1^T = I_{N/2}$  dan  $\mathcal{V}_1 \mathcal{V}_1^T = I_{N/2}$ , dengan  $I_{N/2}$  adalah matriks identitas berordo  $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ , sehingga  $\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{bmatrix}$  ortonormal, karena

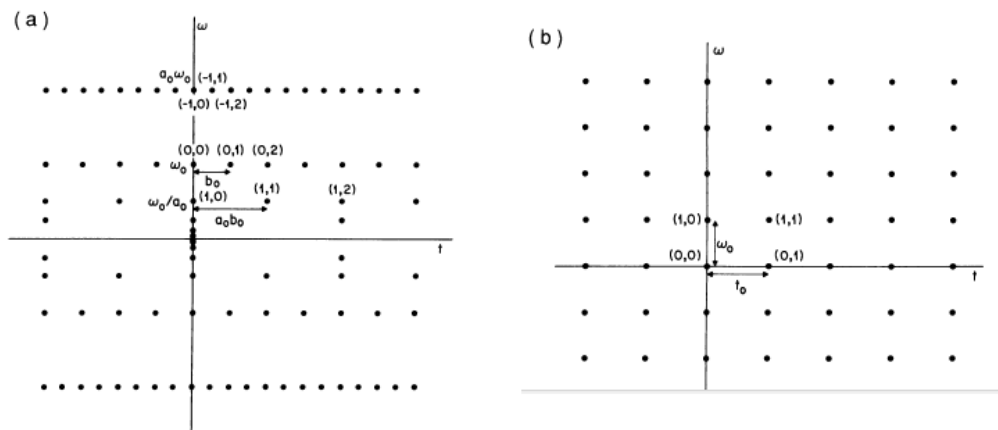
$$\mathcal{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{bmatrix} \cdot [\mathcal{W}_1^T \quad \mathcal{V}_1^T] = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \mathcal{W}_1^T & \mathcal{W}_1 \mathcal{V}_1^T \\ \mathcal{V}_1 \mathcal{W}_1^T & \mathcal{V}_1 \mathcal{V}_1^T \end{bmatrix} = I_N$$

Pada kasus *Redundant Discrete System* atau yang lebih dikenal dengan MODWT (*Maximum Overlap Discret Wavelet Transformation*), hasil dilatasi parameter  $a$  dan translasi dari  $a$  dan  $b$  hanya diambil nilai diskritnya. Untuk  $a$  dipilih suatu nilai pangkat integer yang lebih besar dari 1,  $a_0 > 1$  dan ( $a = a_0^m$ ).

Perbedaan dari nilai  $m$  bersesuaian dengan lebar dari waveletnya. Hal ini menunjukkan bahwa diskritisasi dari translasi  $b$  seharusnya bergantung pula pada  $m$ . Karena lebar dari  $\psi(a_0^{-m}x)$  bergantung pada  $a_0^m$ , maka dipilih diskritisasi  $b$  dengan  $b = nb_0 a_0^m$ , dimana  $b_0 > 0$  tetap, dan  $n \in \mathbb{Z}$ , sehingga

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}(x - nb_0 a_0^m)) \quad 3.2.2.5$$

$$\psi_{m,n}(x) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}x - nb_0) \quad 3.2.2.6$$



Gambar 3. 2 latris dari wavelet

Berdasarkan Gambar 3.2 dapat diketahui informasi mengenai latris yang sistematis dari pusat lokalisasi waktu-frekuensi yang berkorespondansi dengan  $\psi_{m,n}$

Pada *Maximum Overlap Discrete Wavelet Transformation* (MODWT), misalkan  $x$  merupakan vektor sebarang yang mempunyai panjang  $N$ , dan vektor koefisien  $\tilde{w}$  mempunyai panjang  $(J + 1)N$  yang didapat melalui,

$$\tilde{w} = \tilde{W}x$$

Dimana  $\tilde{W}$  adalah  $(J + 1)N \times N$  matriks yang mendefinisikan MODWT. Oleh karena itu vektor koefisien MODWT dapat diubah ke dalam bentuk  $(J + 1)$  vektor dengan melalui

$$\tilde{w} = [\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_j]^T$$

Contoh dari Discreet Wavelet Transfromation, adalah Haar Wavelet, dan Daubechies Wavelet. Pada kasus Haar wavelet, pandang fungsi skala 3.1.1 dimana  $j = 1$ , untuk fungsi skala pada Haar wavelet adalah

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x + 1)$$

atau dapat dituliskan menjadi

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x + 1)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x + 0) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x + 1) \quad 3.2.2.7$$

Berdasarkan persamaan (3.2.2.7), dan persamaan (3.1.1), maka didapatkan nilai untuk  $h_0$  dan  $h_1$  adalah sebagai berikut:

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sedangkan pada Daubechies Wavelet, cara yang mudah untuk menggambarkan atau mendefinisikan Daubechies Wavelet Filter melalui

$$G(f) = 2\cos^L(\pi f) \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \sin^{2l}(\pi f)$$

Dimana panjang  $L$  dari filter bernilai positif dan genap. Saat  $L = 2$ , maka akan menghasilkan koefisien Haar Wavelet.

*Discreet Wavelet Transformation* (DWT) dan *Maximum Overlap Discreet Wavelet Transformation* mempunyai karakteristik yang penting yaitu kemampuan untuk mendekomposisi variansi dari proses stokastik. Oleh karena itu *Discreet Wavelet Transformation* dan *Maximum Overlap Discreet Wavelet Transformation* sangat cocok untuk digunakan dalam menganalisis pertumbuhan ekonomi, dalam

analisisnya co-movement dan analisa ekonominya akan digunakan wavelet varians, wavelet kovarians, wavelet cross-kovarians, wavelet korelasi, dan wavelet cross-korelasi. Selanjutnya akan dilakukan peramalan untuk melihat proyeksi selanjutnya dalam pertumbuhan ekonomi dengan menggunakan *Wavelet Recurrent Neural Network*.

### 3.3 Dekomposisi dan Rekontruksi

Dekomposisi merupakan proses wavelet menggunakan fungsi skala dan fungsi wavelet yang bertujuan untuk menghasilkan aproksimasi dan detail, sedangkan rekontruksi merupakan proses untuk mengembalikan hasil dekomposisi pada keadaan semula. Dekomposisi dari fungsi skala ditentukan dengan menggunakan perumusan berikut ini:

$$f_j(t) = \sum a_k^j \psi(2^j t - k) \in V_j$$

Pada proses penentuan dekomposisi fungsi skala diperlukan relasi wavelet dengan fungsi skala. Relasi wavelet dengan fungsi skala dinyatakan sebagai berikut:

$$\psi(2t) = \frac{(\phi(t) + \psi(t))}{2} \quad 3.3.1$$

$$\psi(2t - 1) = \frac{(\psi(t) - \phi(t))}{2} \quad 3.3.2$$

Selanjutnya dengan mengganti  $t$  dengan  $2^{j-1}t$  pada persamaan (3.3.1) dan persamaan (3.3.2) hal ini dilakukan karena merupakan dyadic, maka diperoleh persamaan (3.3.1) menjadi:

$$\begin{aligned} \psi(2(2^{j-1}t)) &= \frac{(\phi(2^{j-1}t) + \psi(2^{j-1}t))}{2} \\ \psi(2^j t) &= \frac{(\psi(2^{j-1}t) - \phi(2^{j-1}t))}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad 3.3.3$$

Dan persamaan (3.3.2) menjadi

$$\begin{aligned} (2(2^{j-1}t) - 1) &= \frac{(\psi(2^{j-1}t) + \phi(2^{j-1}t))}{2} \\ \psi(2^j t - 1) &= \frac{(\phi(2^{j-1}t) - \psi(2^{j-1}t))}{2}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad 3.3.4$$

#### Teorema Dekomposisi Haar

Ahmad Fikri, 2016

**ANALISIS PERTUMBUHAN EKONOMI DAN VOLATILITAS DENGAN MENGGUNAKAN METODE WAVELET.**

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu | perpustakaan.upi.edu

Diberikan  $f_j \in V_j$  :

$$f_j(t) = \sum a_k^j \phi(2^j t - k) \in V_j$$

Maka  $f_j$  dapat didekomposisi sebagai  $f_j = w_{j-1} + f_{j-1}$ , dimana

$$w_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j-1} \phi(2^{j-1} t - k) \in W_{j-1}$$

$$f_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{j-1} \psi(2^{j-1} t - k) \in V_{j-1}$$

Dengan  $b_k^{j-1} = \frac{(a_{2k}^j - a_{2k+1}^j)}{2}$  dan  $a_k^{j-1} = a_{2k}^j - a_{2k+1}^j$

**Bukti:**

Untuk membuktikan teorema dekomposisi Haar, maka akan dibuktikan pada  $f \in V_1$ .

Mis  $f \in V_1$ , maka

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \quad 3.3.5$$

Dengan memandang

$$\phi(2x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2} \psi(x)$$

$$\phi(2x - 1) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2} \psi(x)$$

Substitusi nilai  $x$  dengan nilai  $x - k$ , sehingga :

$$\phi(2(x - k)) = \frac{1}{2} \phi(2(x - k)) + \frac{1}{2} \psi(2(x - k)) \quad 3.3.6$$

$$\phi(2(x - k) - 1) = \frac{1}{2} \phi(2(x - k)) - \frac{1}{2} \psi(2(x - k)) \quad 3.3.7$$

Berdasarkan Persamaan (3.3.6) dan Persamaan (3.3.7), maka dapat disimpulkan bahwa Persamaan (3.3.6) merupakan persamaan untuk domain genap, dan Persamaan (3.3.7) merupakan persamaan untuk domain ganjil. Sehingga Persamaan (3.3.5) dapat ditulis menjadi

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \phi(2(x - k)) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} \phi(2(x - k) - 1)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \left( \frac{1}{2} \phi(x-k) + \frac{1}{2} \psi(x-k) \right) \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} \left( \frac{1}{2} \phi(x-k) - \frac{1}{2} \psi(x-k) \right) \\
f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \right) \phi(x-k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{2} \right) \psi(x-k)
\end{aligned}$$

dengan memandang  $\left( \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \right)$  sebagai  $c_k$ , dan  $\left( \frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{2} \right)$  sebagai  $d_k$ , maka teorema dekomposisi haar terbukti.

Berdasarkan hasil dekomposisi untuk mendapatkan nilai dari fungsi awal atau data awal, dilakukan rekontruksi dengan menggunakan teorema dekomposisi haar, misalkan diketahui

$$f_j = f_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_{j-1}, w_j \in W_j$$

dengan

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(t-k) \in V_0 \\
w_{j'}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j'} \psi(2^{j'} t - k) \in W_{j'}
\end{aligned}$$

untuk  $0 \leq j' < j$ , maka  $f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \psi(2^j t - k) \in V_j$ . Serta apabila dinyatakan dengan  $a_l^j$  secara berurutan menyatakan  $j' = 1, j' = 2$ , dan seterusnya sampai dengan  $j' = j$ , secara algoritma dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
a_l^2 &= a_k^{j'} + b_k^{j'} \quad , l = 2k \text{ (genap)} \\
&= a_k^{j'} - b_k^{j'} \quad , l = 2k + 1 \text{ (ganjil)}
\end{aligned}$$

### 3.4 Wavelet Varians

Wavelet varians merupakan varians dengan mempertimbangkan koefisien wavelet. Misalkan diketahui panjang dyadic  $N = 2^J$  dan  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  dalam proses stokastik  $x_t$  serta menggunakan *Maximum Overlap Discret*



*Wavelet Transformation* (MODWT) dengan  $J_p \leq j$  untuk menghasilkan vektor panjang  $N$  dari koefisien wavelet  $w$ , maka estimator tak bias dari wavelet varians berdasarkan MODWT (Gencay, Selcuk, & Whitcher, 2002) didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{\sigma}_x^2(\lambda_j) = \frac{1}{\hat{N}_j} \sum_{t=L_j-1}^{N-1} \tilde{w}_{j,t}^2 \quad 3.4.1$$

dimana  $L'_j = [(L-2)(1-2^{-j})]$  adalah bilangan dari koefisien yang dimasukan dengan batasan dan  $\hat{N}_j = \frac{N}{2^{j-L_j}}$  adalah bilangan dari wavelet koefisien pada skala  $\lambda_j$  tanpa pengaruh batasannya.

### 3.5 Wavelet Covarians

Wavelet Covarians adalah Covarians antara skala wavelet koefisien  $\lambda_j$  dari runtun waktu bivariat (Gencay, Selcuk, & Whitcher, 2002). Misalkan  $X = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1}) = (x_{1,0}, x_{2,0}), (x_{1,1}, x_{2,1}), \dots, (x_{1,N-1}, x_{2,N-1})$  dengan panjang  $N$  yang terealisasi dari proses stokastik bivariat  $X_t$  serta dengan menggunakan *Maximum Overlap Discreet Wavelet Transformation* (MODWT) dari  $J_p < \log_p(T)$  untuk setiap proses univariat  $x_{1,t}$  dan  $x_{2,t}$ , maka koefisien wavelet yang diperoleh dari MODWT sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_j &= (\hat{W}_{j,0}, \hat{W}_{j,1}, \dots, \hat{W}_{j,N-1}) \\ &= \left( (\hat{w}_{1,j,0}, \hat{w}_{2,j,0}), (\hat{w}_{1,j,1}, \hat{w}_{2,j,1}), \dots, (\hat{w}_{1,j,N-1}, \hat{w}_{2,j,N-1}) \right) \end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut diatas, maka wavelet covarians menurut *Maximum Overlap Discreet Wavelet Transformation* (MODWT) adalah

$$\bar{\gamma}_X(\lambda_j) = \frac{1}{\hat{N}_j} \sum_{l=L_j-1}^{N-1} \tilde{w}_{1,j,l} \tilde{w}_{2,j,l} \quad 3.5.1$$

dimana  $\hat{N}_j = N - L_j + 1$ .

### 3.6 Wavelet Cross-Covarians

Wavelet cross-covarians merupakan wavelet covarians yang mengandung lag  $\tau$  antara 2 data time seriesnya. Misalkan diketahui  $S_X(f)$  sebagai cross spektrum diantara  $x_{1,t}$  dan  $x_{2,t}$  dan didefinisikan dengan:

$$S_X(f) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_{X,\tau} e^{-2\pi i f \tau} \quad \text{untuk } |f| \leq \frac{1}{2} \quad 3.6.1$$

Berdasarkan persamaan (3.6.1) wavelet covarians akan menangkap lebih kecil dari spektrum ataupun *cross* spektrum saat  $\lambda_j$  meningkat ( $f \rightarrow 0$ ) maka untuk menanggulangi nilai wavelet covarians yang menangkap lebih kecil dari *cross* spektrum tersebut, sehingga terdapat lag  $\tau$  antara  $w_{1,j,t}$  dan  $w_{2,j,t}$ , dengan *wavelet cross covarians*

$$\gamma_{X,\tau}(\lambda_j) = \begin{cases} \hat{N}_j^{-1} \sum_{l=L_j-1}^{N-\tau-1} \tilde{w}_{1,j,t} \tilde{w}_{2,j,t+\tau} & \tau = 0, \dots, \tilde{N}_j - 1 \\ \hat{N}_j^{-1} \sum_{l=L_j-1-\tau}^{N-1} \tilde{w}_{1,j,t} \tilde{w}_{2,j,t+\tau} & \tau = -1, \dots, -(\tilde{N}_j - 1) \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad 3.6.2$$

### 3.7 Wavelet Korelasi

Wavelet Korelasi berguna untuk menganalisis hubungan antara dua fungsi gelombang/spektral. Analisis dari wavelet korelasi berguna untuk mengetahui pola – pola yang terjadi diantara dua gelombang, apabila ternyata tidak ada korelasi, maka hal ini mempunyai makna bahwa tidak ada pola terhadap perubahan antara 2 data. Dengan kata lain pergerakan dari data yang terlihat pada pola bergerak secara random

Wavelet korelasi dibentuk oleh pembagian dari wavelet covarians untuk  $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t})$  dan wavelet varians untuk  $x_{1,t}$  dan  $x_{2,t}$ , yang dengan menggunakan MODWT, diperoleh:

$$\tilde{\rho}_X(\lambda_j) = \frac{\tilde{\gamma}_X(\lambda_j)}{\tilde{\sigma}_1(\lambda_j)\tilde{\sigma}_2(\lambda_j)} \quad 3.7.1$$

dimana  $\tilde{\gamma}_X(\lambda_j)$  merupakan covarians yang didefinisikan pada persamaan (3.5.1) dan  $\tilde{\sigma}_1(\lambda_j)$ ,  $\tilde{\sigma}_2(\lambda_j)$  merupakan varians dari  $(x_{1,t})$  dan  $(x_{2,t})$  yang didefinisikan pada persamaan (3.4.1)

Interval kepercayaan untuk wavelet korelasi dirumuskan sebagai berikut:

$$\tanh \left\{ h[\tilde{\rho}_X(\lambda_j)] \pm \xi_{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{1}{\tilde{N}_j - 3} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

dengan

$$h[\tilde{\rho}_X(\lambda_j)] = \tanh^{-1}(\tilde{\rho}_X(\lambda_j))$$

dimana  $\hat{N}_j$  menyatakan jumlah koefisien MODWT yang berasosiasi dengan skala  $\lambda_j$ . Pengujian wavelet korelasi dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan software Matlab 2015b, dengan perumusan hipotesis sebagai berikut

$H_0$  : Tidak terdapat korelasi wavelet

$H_1$  : Terdapat korelasi wavelet.

serta dengan kriteria pengujian Tolak  $H_0$ , apabila nilai  $P_{\text{value}} < \alpha$

### 3.8 Wavelet Cross-Korelasi

Wavelet Cross-Korelasi biasanya dipergunakan untuk menentukan hubungan lead/lag antara 2 proses atau gelombang, dan didefinisikan sebagai berikut

$$\tilde{\rho}_X(\lambda_j) = \frac{\tilde{\gamma}_{X,\tau}(\lambda_j)}{\tilde{\sigma}_1(\lambda_j)\tilde{\sigma}_2(\lambda_j)} \quad 3.8.1$$

Interval kepercayaan untuk wavelet cross-korelasi dirumuskan sebagai berikut (Gencay, Selcuk, & Whitcher, 2002)

$$\tanh \left\{ h[\tilde{\gamma}_{X,\tau}(\lambda_j)] \pm \xi_{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{1}{\hat{N}_j - 3} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

dimana,

$$h[\tilde{\rho}_X(\lambda_j)] = \tanh^{-1}(\tilde{\gamma}_{X,\tau}(\lambda_j))$$

dimana  $\hat{N}_j$  menyatakan jumlah koefisien MODWT yang berasosiasi dengan skala  $\lambda_j$ . Pengujian wavelet cross-korelasi dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan software Matlab 2015b, dengan perumusan hipotesis sebagai berikut

$H_0$  : Tidak terdapat korelasi wavelet

$H_1$  : Terdapat korelasi wavelet.

serta dengan kriteria pengujian Tolak  $H_0$ , apabila nilai  $P_{\text{value}} < \alpha$

### 3.9 Wavelet Recurrent Neural Network

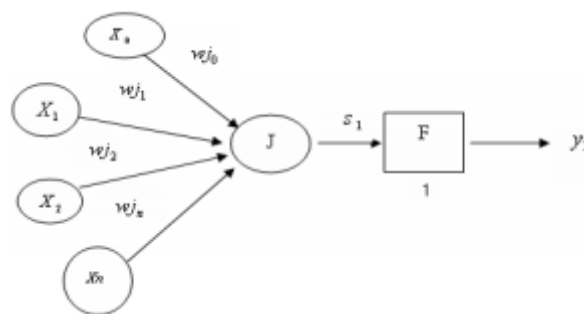
Pada subbab ini akan dibahas mengenai implementasi dari Neural Network yang terkhusus pada Recurrent Neural Network dan Wavelet, yang selanjutnya akan digunakan untuk melakukan forecasting

### 3.9.1 Analisis Neural Network

*Artificial Neural Network* sering disebut dengan *Neural Network* atau yang sering dikenal dengan Jaringan Syaraf Tiruan (JST) pada dasarnya mengambil ide dari cara kerja jaringan syaraf biologis. Salah satu pengambilan ide atau cara kerja dari jaringan syaraf biologis adalah adanya elemen-elemen pemrosesan pada jaringan syaraf tiruan yang saling terhubung dan beroperasi secara paralel.

Menurut (Gencay, Selcuk, & Whitcher, 2002), *Neural Network* merupakan pendistribusian model statistika paralel, yang membuat proses unit simple data yang memproses informasi data yang ada dan mengeneralisasi untuk peramalan, dan dapat digunakan untuk data time series ataupun cross-section.

Seperti jaringan syaraf manusia, *Neural Network* juga terdiri dari neuron dan keterhubungan diantara neuron-neuron tersebut. Pada *Neural Network* istilah untuk menggantikan hubungan adalah bobot. Informasi berupa sinyal atau data disimulasikan sebagai harga yang spesifik pada bobot. Dengan cara mengubah-ubah harga bobot artinya mengubah strukturhubungan antara *neuron*.



**Gambar 3.3 Struktur dasar Neural Network**

Gambar 3.3 menunjukkan struktur dasar dari *Neural Network* satu neuron yang menganalogikan sel syaraf biologis dengan asumsi sebagai berikut :

1. *Cell Body* dinyatakan dengan *node*
2. *Axon* dinyatakan dengan *path*
3. Dendrit merupakan *input*
4. *Axon* yang menuju *cell body* yang lain sebagai output

Pada beberapa buku ada yang menyebut *input* dan *output* sebagai regressor dan regresan.

Model dari Neural Network pada umumnya terdiri dari :

1. Masukan ( $x_n$ ) yang berfungsi sebagai penerima sinyal.
2. Bobot koneksi ( $w_j$ ) untuk menyimpan informasi.
3. Bias ( $w_0$ ) yang berfungsi mengatur daerah nilai ambang.
4. Elemen pemroses ( $j$ ) dan fungsi aktivasi ( $F_1$ ) untuk memproses informasi.
5. Keluaran ( $y_1$ ) sebagai keluaran yang akan menyampaikan hasil pemrosesan informasi.

Persamaan berikut merupakan representatif dari Gambar 3.3

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^n w_{ji}x_i + w_0x_0$$

$$y_j(x) = f(s_j(x))$$

Pada *Neural Network* terdapat dua tipe metode yang digunakan yaitu *Feed-Forward* dan *Recurrent Neural Network*. *Recurrent Neural Network* merupakan metode yang lebih baik dibandingkan *Feed-Forward* karena *Recurrent Neural Network* menghasilkan prediksi yang mempunyai ketepatan yang mendekati nilai aslinya.

### 3.9.2 Fungsi Aktifasi

Proses unit simple data (simple data processing unit) dikenal pula sebagai aktifasi fungsi (Gencay, Selcuk, & Whitcher, 2002). Fungsi Aktifasi dapat berupa fungsi linear ataupun nonlinear. Pada model *Neural Network* fungsi aktifasi yang dipergunakan adalah fungsi nonlinear. Fungsi aktifasi menentukan bagaimana suatu neuron menanggapi sinyal-sinyal masukan, sehingga terjadi aktivitas satu neuron. Apabila aktivitas neuron kuat, maka neuron akan menghasilkan sinyal keluaran yang dapat dihubungkan ke neuron lain.

Beberapa jenis fungsi aktifasi yang sering dipergunakan untuk mengaktifkan neuron diantaranya adalah sebagai berikut (Dunne, 2007):

1. Fungsi Sigmoid Biner

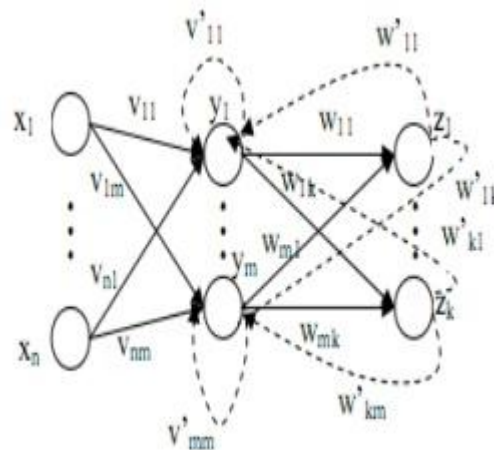
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-\sigma x}}$$

## 2. Fungsi Sigmoid Bipolar

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

### 3.9.3 Recurrent Neural Network

*Recurrent Neural Network* adalah jaringan yang mengakomodasi output jaringan untuk menjadi input pada jaringan yang sama, dalam rangka menghasilkan output jaringan berikutnya (Hu & Balasubramaniam, 2008). Hal yang membedakan *Recurrent Neural Network* dari jenis jaringan lainnya adalah adanya *loop feedback* yang memungkinkan untuk menggunakan informasi dari pada sebelumnya bersama dengan inputan, atau dengan kata lain subjek dari *recurrent neural network* bukan hanya data input baru tetapi yang terdahulu juga, termasuk data *noise* (Gencay, Selcuk, & Whitcher, 2002). *Recurrent Neural Network* mempunyai kemampuan untuk menjadi data lampau dari input filternya sebagai informasi tambahan.



Gambar 3. 4 Recurrent Neural Network

Berdasarkan Gambar 3.4 diperoleh informasi bahwa *Recurrent Neural Network* yang terdiri dari 3 layer dengan komposisi :

1. Layer input terdiri dari n *neuron*
2. Layer *hidden* terdiri dari m *neuron*

Model untuk *Hidden-Recurrent* direpresentasikan dengan

$$y_t = s \left( \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i h_{i,t} \right) + \varepsilon_t$$

Dan

$$h_{i,t} = g \left( \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{j,t} + \sum_{l=1}^m \delta_{il} h_{l,t-1} \right)$$

3. Layer Output terdiri dari k neuron

Model untuk *Output-Recurrent* direpresentasikan dengan

$$y_t = s \left( \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i h_{i,t} \right) + \varepsilon_t$$

Dan

$$h_{i,t} = g \left( \alpha_{i0} + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_{j,t} + \sum_{l=1}^k \delta_{il} h_{l,t-1} \right)$$

Untuk melakukan Recurrent Neural Network, dilakukan secara detail dengan menggunakan algoritma *Real Time Recurrent Learning*. Algoritma *Real Time Recurrent Learning* adalah sebagai berikut:

➤ Langkah 0:

Inisialisasi bobot dari neuron input  $i$  ke neuron *hidden*  $j$  ( $w_{ij}$ ), bobot dari neuron *hidden*  $j$  ke neuron output  $k$  ( $v_{jk}$ ), bobot *recurrent* adalah bobot yang diperoleh dari neuron ( $u_j$ ) ke neuron *hidden*  $j$  ( $u_j$ ), output neuron *hidden*  $j$  ( $y_j$ ), parameter yang digunakan adalah *learning rate* ( $\eta$ ), dan momentum atau alpha ( $\alpha$ ). Selain itu, hal yang dilakukan lainnya adalah mensetting  $\Delta v_{jk} = \Delta u_j = \Delta w_{ij} = 0$

➤ Langkah 1:

Mengulangi langkah 2 hingga langkah 7 sampai kondisi akhir iterasi terpenuhi

➤ Langkah 2:

Melakukan langkah 3 hingga langkah 8 untuk masing masing pasangan data pelatihan (*Training Fase-Forward*)

➤ Langkah 3:

Masing-masing neuron input ( $x_i, i = 1, 2, 3, \dots, p$ ), menerima sinyal masukan dari  $x_i$  dan sinyal tersebut disebarkan ke neuron pada layer selanjutnya (*hidden layer*)

➤ Langkah 4:

Masing-masing neuron *hidden* akan menjumlahkan sinyal inputnya, diperoleh:

$$S_j(x) = u_j y_j + \sum_{k=1}^p w_{kj} x_k(t), \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, N.$$

Selanjutnya menghitung nilai output neuron *hidden* sesuai dengan fungsi aktivasi yang digunakan, dengan perumusan berikut:

$$y_j(t) = f(S_j(t)) = f\left(u_j y_j(t-1) + \sum_{k=1}^p w_{kj} x_k(t)\right)$$

Kemudian output dari *hidden layer* dikirim ke neuron pada layer selanjutnya

➤ Langkah 5:

Apabila neuron selanjutnya adalah neuron *output* maka masing-masing neuron *output* akan menjumlahkan bobot sinyal masukan berdasarkan fungsi aktivasi yang digunakan sehingga diperoleh *output* jaringan sebagai berikut:

$$z_k(t) = \sum_{j=1}^N v_{jk} y_j(t), \text{ untuk } k = 1, 2, \dots, M$$

➤ Langkah 6:

Menghitung *error* jaringan dari masing-masing neuron output ( $z_k, k = 1, 2, \dots, M$ ) dengan cara membandingkan output jaringan dengan target yang diinginkan menggunakan perumusan berikut:

$$E_k(t) = d_k(t) - z_k(t)$$

Selanjutnya menghitung *cost function*:

$$e(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M E_k(t)^2$$

➤ Langkah 7:



Pada langkah 7 ini yang dilakukan adalah mengupdate bobot dengan menggunakan perumusan :

$$v_{ij}(t + 1) = v_{ij}(t) + \Delta v_{ij}(t)$$

$$w_{ij}(t + 1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}(t)$$

$$u_{ij}(t + 1) = u_{ij}(t) + \Delta u_{ij}(t)$$

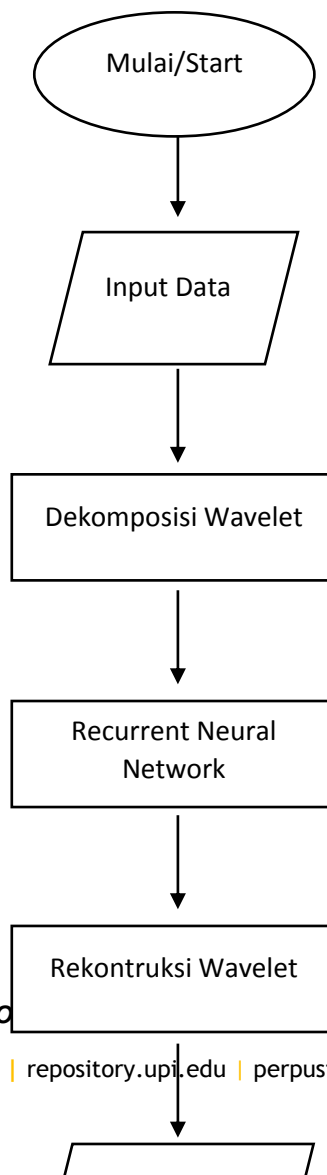
➤ Langkah 8:

Pada langkah 8, hal selanjutnya yang dikerjakan adalah melakukan uji *stop condition*, untuk menghentikan pekerjaan algoritma *Real Time Recurrent Learning* pada suatu keadaan tertentu, yaitu dengan cara :

1. Membatasi jumlah iterasi yang dilakukan, yaitu membatasi perulangan dari langkah 3 sampai dengan langkah 7.
2. Membatasi *Error*

### 3.9.4 Wavelet Recurrent Neural Network

*Wavelet Recurrent Neural Network* merupakan metode perkembangan dari *Recurrent Neural Network*, dimana terjadi pendekomposisian dan perekonstruksian wavelet didalamnya. Metode ini direpresentasikan melalui *flowchart* berikut :



**Gambar 3. 5 flowcart WRNN**