# BAB III

# REGRESI GENERALIZED POISSON II

## 3.1 Model Regresi *Generalized* Poisson (GP)

Menurut Consul dan Famoye (dalam Ismail dan Zamani, 2013), fungsi kepadatan peluang dari distribusi *generalized* Poisson adalah:

$$P(Y_i = y_i) = \frac{\theta(\theta + v y_i)^{y_i - 1} \exp(-\theta - v y_i)}{y_i!} \qquad (3.1)$$

$y_i = 0,1,2, \ldots$

dimana $\theta > 0$ dan $\max\left(-1, -\frac{\theta}{4}\right) < v < 1$. Mean dan varians dari $Y_i$ adalah $E(Y_i) = \mu = (1 - v)^{-1}\theta$ dan $Var(Y_i) = (1 - v)^{-3}\theta = (1 - v)^{-2}\mu$, dimana $(1 - v)^{-2}$ dinotasikan sebagai faktor dispersi dan $v$ adalah parameter dispersi.

Berdasarkan (Ismail dan Zamani, 2013), dengan mensubstitusikan $v = 0$ pada persamaan (3.1) maka akan diperoleh fungsi kepadatan peluang (fkp) distribusi Poisson, dengan $v = a(1 + a)^{-1}$ dan $\theta_i = (1 + a)^{-1}\mu_i$ pada persamaan (3.1) maka diperoleh fkp *Generalized* Poisson I. Fkp *Generalized* Poisson II diperoleh dengan mensubstitusikan $v = a(1 + a\mu_i)^{-1}\mu_i$ dan $\theta_i = (1 + a\mu_i)^{-1}\mu_i$, dimana a dinotasikan sebagai parameter dispersi. Mean dari regresi *Generalized* Poisson (RGP) dapat diasumsikan mengikuti *link* logaritma, sehingga $\mu_i = \exp(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})$

## 3.2 Model Regresi *Generalized* Poisson I

Model regresi *Generalized* Poisson I merupakan perluasan dari model regresi Poisson dan kasus khusus dari model (3.1), dimana fkp Poisson diperoleh dengan mensubstitusikan $v = 0$ dan $\theta_i = \mu_i$ maka, diperoleh sebagai berikut:

$$f(y_i; \mu_i) = \frac{[\mu_i]^{y_i} \exp[-\mu_i]}{y_i!}$$

Untuk $y_i = 0,1,2,\ldots$ (3.2)

Sedangkan pada fkp *Generalized* Poisson I diperoleh dengan mensubstitusikan $v = a(1+a)^{-1}$ dan $\theta_i = (1+a)^{-1}\mu_i$ , diperoleh fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$f(y_i; \mu_i, a) = \left(\frac{\mu_i}{1+a}\right)\frac{(\mu_i + ay_i)^{y_i-1}}{(1+a)^{y_i-1}y_i!}exp\left(-\frac{(\mu_i + ay_i)}{1+a}\right)$$

Untuk $y_i = 0,1,2,\ldots$ (3.3)

dimana $a$ merupakan parameter dispersi. Dari (3.2) dan (3.3) terlihat bahwa fungsi kepadatan peluang dari *Generalized* Poisson I merupakan perluasan dari fungsi kepadatan peluang Poisson, dan persamaan (3.2) dan (3.3) merupakan kasus khusus dari persamaan (3.1).

## 3.3 Model Regresi *Generalized* Poisson II

Model regresi *Generalized* Poisson II merupakan suatu model regresi yang digunakan untuk menganalisis bentuk hubungan antara sebuah variabel respon yang berupa data *count* (berjenis diskrit) dengan satu atau lebih variabel prediktor. Model tersebut dapat digunakan baik dalam keadaan ekuidispersi, overdispersi ataupun underdispersi.

Model regresi *Generalized* Poisson II merupakan perluasan dari model regresi Poisson dan kasus khusus dari model (3.1), dengan mensubstitusikan $v = a(1+a\mu_i)^{-1}\mu_i$ dan $\theta_i = (1+a\mu_i)^{-1}\mu_i$, pada persamaan (3.1), diperoleh fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$f(y_i; \mu_i, a) = \left(\frac{\mu_i}{1+a\mu_i}\right)^{y_i}\frac{(1+ay_i)^{y_i-1}}{y_i!}exp\left(-\frac{\mu_i(1+ay_i}{1+a\mu_i}\right)$$

Untuk $y_i = 0,1,2,\ldots$ (3.4)

dimana $a$ merupakan parameter dispersi. Dari (3.2) dan (3.4) jelas terlihat bahwa fungsi kepadatan peluang dari *Generalized* Poisson II merupakan perluasan dari fungsi kepadatan peluang Poisson, dan persamaan (3.4) pun merupakan kasus khusus dari persamaan (3.1).

Mean dan variansi untuk *Generalized* Poisson II adalah:

a) $E(Y_i) = \mu_i$
b) $Var(Y_i) = \mu_i(1 + a\mu_i)^2$

Dari persamaan (3.4) diperoleh jika a = 0, maka fungsi kepadatan peluang *Generalized* Poisson II akan tereduksi menjadi fungsi kepadatan peluang Poisson dan akan menghasilkan mean yang sama dengan varians. Jika a > 0, maka variansi lebih besar dari mean (overdispersi). Jika a < 0, maka variansi lebih kecil dari mean (underdispersi), dibawah kondisi $1 + a\mu_i > 0$ dan $1 + ay_i > 0$.

Dengan mensubstitusi $\mu_i = exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)$ kedalam persamaan (3.4) maka diperoleh:

$$f(y_i | x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}; \mu_i, a)$$
$$= \left( \frac{exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji})}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right)^{y_i} \frac{(1 + ay_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left( - \frac{exp(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji})(1 + ay_i}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right)$$

Untuk $y_i = 0,1,2, \dots$ (3.5)

Dengan $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p]^T$ menyatakan vektor dari parameter-parameter yang tidak diketahui.

## 3.4 Penaksir Parameter Model Regresi *Generalized* Poisson II

Dalam model regresi *Generalized* Poisson II, parameter-parameter yang tidak diketahui yaitu $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, a$, sehingga parameter-parameter tersebut harus ditaksir. Untuk menaksir parameter-parameter tersebut digunakan metode kemungkinan maksimum.

Jika n buah pasang pengamatan $\{(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}, Y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ diasumsikan saling bebas, maka fungsi kemungkinan diperoleh dengan mengalikan semua fungsi kepadatan peluang dari $Y_i$ pada (3.5), yaitu:

$$L(\boldsymbol{\beta}^*) = \prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} f(y_i; \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, a)$$

$$= \prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right)^{y_i} \frac{(1+ay_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left(-\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right) \qquad (3.6)$$

Dimana: $\boldsymbol{\beta}^* = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, a]^T$

Untuk mempermudah perhitungan dalam mendapatkan penaksir yang memaksimumkan fungsi kemungkinan dari parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, a$, maka digunakan cara lain yaitu melalui perhitungan dalam mendapatkan taksiran yang memaksimumkan ln fungsi kemungkinan. Ln fungsi kemungkinan sebagai berikut:

$$l(\boldsymbol{\beta}^*) = ln\, L(\boldsymbol{\beta}^*)$$

$$= ln\left(\prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right)^{y_i} \frac{(1+ay_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left(-\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right)\right)$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \ln\left(\left(\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right)^{y_i} \frac{(1+ay_i)^{y_i - 1}}{y_i!} exp\left(-\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right)\right)$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(ln\left(\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right)^{y_i} + ln(1 + ay_i)^{y_i - 1} + ln\left(exp\left(-\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right)\right) - \ln(y!)\right)$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left(y_i ln\left(\frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}\right) + (y_i - 1) ln(1 + ay_i) - \frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} - \ln(y!)\right)$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left( y_i ln\left(exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) - y_i ln\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) + (y_i - 1) ln(1 + \quad ay_i) - \frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1 + ay_i)}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} - \ln(y!)\right)$$

$$= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \left( y_i\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right) - y_i ln\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) + (y_i - 1) ln(1 + ay_i) - \frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1 + ay_i)}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} - \ln(y!)\right)$$

(3.7)

Untuk menentukan penaksir kemungkinan maksimum $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p, \hat{a}$, ln fungsi kemungkinan $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ pada (3.7) diturunkan secara parsial terhadap parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, a$ dan disamakan dengan nol. Didapatkan persamaan-persamaan sebagai berikut:

- $$\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial \beta_0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( y_i - y_i \frac{a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right.$$

$$- \frac{(1 + ay_i) exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) - a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1 + ay_i)\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{j}\right.}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( y_i \left( 1 - \frac{a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) - \left( \frac{(1 + ay_i) exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \left( \frac{y_i}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) - \left( \frac{(1 + ay_i) exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{y_i \left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) - (1 + ay_i) exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{y_i - exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) = 0$$

- $\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial \beta_1}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( y_i x_{1i} - y_i x_{1i} \frac{a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} - \frac{(1 + ay_i) x_{1i}\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) - a x_{1i}\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1 + ay_i)\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( y_i x_{1i} \left( 1 - \frac{a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) - \left( \frac{(1 + ay_i) x_{1i}\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \left( \frac{y_i x_{1i}}{1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) - \left( \frac{(1 + ay_i) x_{1i}\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\ exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{y_i x_{1i} \left(1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) - (1 + a y_i) x_{1i}\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{x_{1i} \left(y_i - exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) = 0$$

$\vdots$

Dengan cara yang serupa maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial \beta_k} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{x_{ki} \left(y_i - exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) = 0$$

Untuk k = 2, 3, ..., p

- $\frac{\partial l(\beta^*)}{\partial a}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( - \frac{y_i\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} + \frac{y_i (y_i - 1)}{1 + a y_i} \right.$$

$$\left. - \frac{y_i\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right) \left(1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) - exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1 + a y_i)\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( - \frac{y_i\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} + \frac{y_i (y_i - 1)}{1 + a y_i} \right.$$

$$\left. - \frac{exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right) \left(y_i - exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1 + a\, exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right) = 0$$

Karena persamaan-persamaan tersebut tidak linear dalam parameter $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p, a$, maka untuk mencari $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_p, \hat{a}$ digunakan suatu metode numerik, yaitu metode *Newton-Raphson*. Prosedur metode *Newton-Raphson* adalah sebagai berikut:

1. Pilih taksiran dari $\boldsymbol{\beta}^*$, yaitu $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \\ \hat{a} \end{bmatrix}^{(0)}$
2. Tentukan taksiran dari $\beta^*$ pada iterasi ke- $r$ ($r = 1,2,\ldots$), yaitu $\hat{\beta}^{*(r)}$ menggunakan persamaan iterasi:

$$\hat{\beta}^{*(r)} = \hat{\beta}^{*(r-1)} - \left[\boldsymbol{H}\left(\hat{\beta}^{*(r-1)}\right)\right]^{-1} \boldsymbol{U}\left(\hat{\beta}^{*(r-1)}\right) \qquad r = 1,2,\ldots$$

Dengan:

$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}$ adalah taksiran dari $\boldsymbol{\beta}^*$ pada iterasi ke- $(r-1)$

$\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)})$ adalah matrix berukuran $(p+2)$ x $(p+2)$ yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial kedua dari $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ yang dihitung pada $\boldsymbol{\beta}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}$

$$\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_0}^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_p} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_p}^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_a} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a^2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\beta}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}}$$

$\boldsymbol{U}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)})$ adalah vektor berukuran $(p+2)$ x 1 yang elemen-elemennya merupakan turunan parsial pertama dari $l(\boldsymbol{\beta}^*)$ yang dihitung pada $\boldsymbol{\beta}^* = \hat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}$

$$\boldsymbol{U}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0}\\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p}\\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\beta}^*=\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}}$$

Atau dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai:

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \vdots\\ \hat{\beta}_p\\ \hat{a}\end{bmatrix}^{(r)}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \vdots\\ \hat{\beta}_p\\ \hat{a}\end{bmatrix}^{(r-1)}-\left[\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_0}^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_0}\\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_p} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_p}^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_p}\\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_a} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a^2}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\beta}^*=\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}}\right]^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0}\\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p}\\ \frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a}\end{bmatrix}_{\boldsymbol{\beta}^*=\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}}$$

3. Hentikan proses iteraasi jika $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r)}=\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\ \widehat{\beta}_1\\ \vdots\\ \widehat{\beta}_p\\ \widehat{a}\end{bmatrix}^{(r)}\approx\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}=\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\ \widehat{\beta}_1\\ \vdots\\ \widehat{\beta}_p\\ \widehat{a}\end{bmatrix}^{(r-1)}$ (misalkan $\left\|\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r)}-\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r-1)}\right\|<10^{-5}$), kemudian ambil $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*(r)}$ sebagai taksiran $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}=\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\ \widehat{\beta}_1\\ \vdots\\ \widehat{\beta}_p\\ \widehat{a}\end{bmatrix}$

untuk menyelesaikan persamaan iterasi tersebut perlu digunakan software, sehingga diperoleh penaksir kemungkinan maksimum $\widehat{\beta}_0,\widehat{\beta}_1,\widehat{\beta}_2,\ldots,\widehat{\beta}_p,\widehat{a}$.

Taksiran matriks variansi-kovariansi dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}=\begin{bmatrix}\widehat{\beta}_0\\ \widehat{\beta}_1\\ \vdots\\ \widehat{\beta}_p\\ \widehat{a}\end{bmatrix}$, dinyatakan dengan

$\widehat{\boldsymbol{V}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$, diberikan oleh:

$$\widehat{\boldsymbol{V}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right) \approx -\left[\boldsymbol{H}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)\right]^{-1} \approx -\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_0}^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_0} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_p} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_p} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial {\beta_p}^2} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_a \partial \beta_p} \\ \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_0 \partial \beta_a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_1 \partial \beta_a} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial \beta_p \partial \beta_a} & \frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta}^*)}{\partial a^2} \end{bmatrix}^{-1}$$

Dimana $\widehat{\boldsymbol{V}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$ adalah matriks yang berukuran (p+2) x (p+2). Elemen diagonal utama ke-j matriks $\widehat{\boldsymbol{V}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$ ( j = 1, 2, ..., p+1 ) menunjukkan taksiran variansi dari $\widehat{\beta}_{j-1}$ yang dinyatakan dengan $\widehat{V}\left(\widehat{\beta}_{j-1}\right)$. Sedangkan elemen diagonal utama ke-p+2 matriks $\widehat{\boldsymbol{V}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$ menunjukan taksiran variansi dari $\widehat{a}$. Dari matriks $\widehat{\boldsymbol{V}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{*}\right)$ dapat diperoleh taksiran standar error dari $\widehat{\beta}_j$, yaitu $\widehat{SE}\left(\widehat{\beta}_j\right) = \sqrt{\widehat{V}\left(\widehat{\beta}_j\right)}\,, j = 0,1, \ldots, p$. Nilai $\widehat{SE}\left(\widehat{\beta}_j\right)$ akan digunakan dalam pengujian signifikansi dari tiap parameter $\beta_j$ dalam model. Uji signifikansi untuk parameter $a$ akan dijelaskan terpisah.

## 3.5 Pengujian Signifikansi Model dan Parameter $\boldsymbol{\beta}$

### 3.5.1 Uji Signifikansi Model

Setelah taksiran parameter dari model regresi *Generalized* Poisson II diketahui, selanjutnya dilakukan pengujian signifikansi model. Karena parameter $\alpha$ merupakan parameter dispersi, maka pengujian parameter $\alpha$ dibahas secara terpisah. Dalam pengujian signifikansi model, parameter yang diuji hanya parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$. Pengujian yang dilakukan adalah uji rasio kemungkinan, dengan hipotesis:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \exists\ \beta_j \neq 0 \qquad ; j = 1,2, \dots, p$$

Statistik uji yang digunakan untuk pengujian tersebut adalah:

$$G = -2 \log \frac{\hat{L}_0}{\hat{L}_1}$$

$$= -2(\log \hat{L}_0 - \log \hat{L}_1)$$

$$= 2(\log \hat{L}_1 - \log \hat{L}_0)$$

Dengan $\hat{L}_1$ adalah nilai taksiran kemungkinan (*likelihood*) dari model $\ln(\mu_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi}$ dengan menggunakan model regresi *Generalized* Poisson II, dimana nilai tersebut diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai taksiran parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha$ kedalam fungsi kemungkinan pada persamaan (3.6), sedangkan $\hat{L}_0$ adalah nilai taksiran kemungkinan (*likelihood*) dari model $\ln(\mu_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})) = \beta_0$ dengan menggunakan model regresi *Generalized* Poisson II, dimana nilai tersebut diperoleh dengan mensubstitusikan nilai taksiran parameter $\beta_0$

Statistik uji $G$ mendekati distribusi Chi-Kuadrat $(\chi^2)$ dengan derajat kebebasan p. Kriteria ujinya adalah $H_0$ ditolak pada taraf nyata $\alpha$ jika $G > \chi^2_{\alpha,p}$. Penolakan $H_0$ pada taraf nyata $\alpha$ berarti bahwa terdapat paling sedikit satu parameter diantara $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ yang signifikan pada taraf nyata $\alpha$ atau dapat dikatakan bahwa model regresi tersebut cocok untuk menjelaskan hubungan antara variabel prediktor dengan variabel respon pada taraf nyata $\alpha$.

### 3.5.2 Uji Signifikansi Masing-masing Parameter dalam Model

Setelah dilakukan pengujian signifikansi model, selanjutnya dilakukan pengujian signifikansi masing-masing parameter dari model. Statistik uji yang digunakan adalah uji Wald atau dengan uji t, dengan hipotesis:

$$H_0: \beta_j = 0 \quad untuk\ j\ tertentu \qquad ; j = 1,2, \dots, p$$

$$H_1: \beta_j \neq 0$$

Statistik uji Wald adalah:

$$W_j = \left( \frac{\hat{\beta}_j}{\widehat{SE}\left(\hat{\beta}_j\right)} \right)^2$$

Statistik uji t adalah

$$t_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\widehat{SE}\left(\hat{\beta}_j\right)}$$

dengan $\hat{\beta}_j$ adalah nilai taksiran parameter $\beta_j$ dan $\widehat{SE}\left(\hat{\beta}_j\right)$ adalah taksiran kekeliruan baku dari $\hat{\beta}_j$ yang diperoleh dari matriks variansi-kovariansi $\hat{\beta}^*$ (matriks $\hat{\boldsymbol{V}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*\right)$).

Statistik uji Wald mendekati distribusi Chi-Kuadrat ($\chi^2$) dengan derajat kebebasan 1, sedangkan statistik uji t memiliki derajat kebebasan n-p-1. Kriteria uji pada uji Wald adalah $H_0$ ditolak pada taraf nyata $\alpha$ jika $W > \chi^2_{\alpha,1}$, sedanagkan kriteria uji pada uji t adalah $H_0$ ditolak pada taraf nyata $\alpha$ jika $|t| > t_{n-p-1;\frac{\alpha}{2}}$. Penolakan $H_0$ pada taraf nyata $\alpha$ berarti bahwa variabel prediktor $X_j$ untuk j tertentu ; j = 1, 2, ..., p, memiliki kontribusi terhadap variabel respon $Y$ pada taraf nyata $\alpha$.

### 3.6 Pengujian Signifikansi Parameter $a$

Pengujian signifikansi untuk parameter $a$ atau uji parameter dispersi dilakukan untuk menentukan apakah terjadi kesamaan antara mean dan variansi (ekuidispersi) atau tidak. Kondisi ekuidispersi akan terjadi jika nilai $a = 0$ terpenuhi, sehingga hipotesis yang digunakan dalam pengujian ini adalah:

$H_0: a = 0$

$H_1: a \neq 0$

Statistik uji yang digunakan untuk hipotesis di atas adalah uji t seperti pada pengujian parameter-parameter dalam model, atau dapat digunakan uji seperti berikut:

$$T = -2\log\frac{\hat{L}_P}{\hat{L}_{GPI}}$$

$$= -2(\log\hat{L}_P - \log\hat{L}_{GPI})$$

$$= 2(\log\hat{L}_{GPI} - \log\hat{L}_P)$$

dimana, $\hat{L}_{GPI}$ adalah nilai taksiran kemungkinan (*likelihood*) dari model regresi *Genereized* Poisson II yang diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai taksiran parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, a$ ke dalam fungsi kemungkinan (*likelihood*) pada persamaan (3.5) dan $\hat{L}_P$ adalah nilai taksiran kemungkinan (*likelihood*) dari model regresi Poisson yang diperoleh dengan mensubstitusikan nilai-nilai taksiran parameter $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ ke dalam fungsi kemungkinan (*likelihood*) pada persamaan (2.8).

Statistik uji $T$ mendekati distribusi Chi-Kuadrat $(\chi^2)$ dengan derajat kebebasan 1. Kriteria uji dalam pengujian hipotesisnya adalah $H_0$ ditolak pada taraf nyata $\alpha$ jika $T > \chi^2_{\alpha,1}$. Penolakan $H_0$ pada taraf nyata $\alpha$ berarti bahwa model regresi *Generalized* Poisson II lebih tepat untuk digunakan dibandingkan model regresi Poisson.

## 3.7 Kesesuaian Model Regresi *Generalized* Poisson II

Jika terdapat beberapa model regresi yang digunakan untuk suatu himpunan data, salah satu perbandingan yang dapat dilakukan untuk membandingkan model tersebut adalah dengan menggunakan ukuran kesesuaian model. Ada beberapa ukuran yang dapat digunakan untuk menguji kesesuaian model regresi *Generalized* Poisson II antara lain Akaike Information Criteria (AIC) yang didefinisikan dengan:

$$AIC = -2 \log \hat{L} + 2K$$

Dimana $\hat{L}$ adalah nilai taksiran log *likelihood* model dan $K$ adalah banyak parameter dalam model. Semakin kecil nilai AIC, maka model tersebut semakin baik.