BAB III
METODE WEIGHTED LEAST SQUARE

3.1 Uji White

Salah satu asumsi dari model regresi linear klasik adalah varian error ε_i pada setiap nilai variabel bebas adalah sama (konstan). Asumsi ini disebut juga sebagai asumsi homoskedastisitas atau homogenitas varian yang disimbolkan dengan:

$$\text{Var}\ (\varepsilon_i|X_i) = \sigma^2 \quad \text{i} = 1,2,3,\ \dots\ ,\ \text{n}$$

Apabila asumsi ini tidak dipenuhi dalam analisis regresi liniar, maka didapat keadaan bahwa varian tidak bersifat konstan. Keadaan ini disebut mengalami heteroskedastisitas atau disimbolkan dengan:

$$\text{Var}\ (\varepsilon_i|X_i) = \sigma_i^2 \quad \text{i} = 1,2,3,\ \dots\ ,\ \text{n}$$

Jika terjadi heteroskedastisitas, maka nilai parameter yang diperoleh tetap tidak bias karena sebagai penaksir tidak bias tidak memerlukan asumsi bahwa varian error harus konstan, tetapi varian penaksir yang diperoleh akan menjadi tidak efisien, artinya penduga tersebut tidak memiliki varian terkecil diantara penaksir-penaksir tidak bias lainnya. Artinya kecenderungan semakin membesarnya varian tersebut akan mengakibatkan uji hipotesis yang dilakukan tidak akan memberikan hasil yang baik (tidak valid). Sehingga jika varian penaksir model tidak memenuhi asumsi homoskedastisitas, maka prediksi mengenai koefisien – koefisien populasinya akan keliru.

Ada beberapa cara formal untuk menguji apakah error terdistribusi secara homoskedastisitas atau tidak. Dalam hal ini yang akan dibahas adalah uji White. Adapun Langkah-langkah uji White adalah sebagai berikut:

a. Estimasi persamaan dibawah dengan OLS dan ε_i

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

b. Selanjutnya regresikan model dibawah

$$\varepsilon_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{1i}^2 + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{1i} X_{2i} + \mu_i \qquad \dots(3.1)$$

c. Perumusan hipotesis

H_0 : tidak terdapat heteroskedastisitas pada model

H_1 : terdapat heteroskedastisitas pada model

d. Statistik Uji

Hitung nR^2 dengan n jumlah observasi dan R^2 koefisien determinasi dari model (3.1).

e. Kriteria Pengujian

Dengan mengambil taraf nyata α, maka H_0 ditolak, jika $nR^2 > \chi^2_{\alpha;k}$ dengan $\chi^2_{\alpha;k}$ diperoleh dari Tabel Distribusi Chi-Kuadrat dengan peluang = α dan dk = k

f. kesimpulan

penafsiran dari H_0 diterima atau ditolak.

3.2 Metode Weighted Least Square (WLS)

Jika pada model terdapat heteroskedastisitas atau ketika melakukan uji White diperoleh hasil H_0 ditolak, maka diperlukan metode alternatif lain untuk mengatasi masalah tersebut. Ada beberapa alternatif untuk mengatasi heteroskedastisitas, diantaranya metode *Weighted Least Square*, transformasi dengan $\frac{1}{x_j}$, transformasi dengan logaritma, dan transformasi dengan E(Y_i). Menurut (Montgomery *et al*, 2012: 176) mengatakan untuk mengatasi model regresi dengan varian error tidak konstan dapat dilakukan dengan Metode Kuadrat Terkecil Tertimbang (*Weighted Least Square Method).* Alternatif model taksiran yang baik untuk heteroskedastisitas adalah metode *Weighted Least Square*. Hal ini dikarenakan WLS memiliki kemampuan untuk menetralisasi akibat dari pelanggaran asumsi heteroskedatisitas dan dapat menghilangkan sifat ketidakbiasan dan konsistensi dari model taksiran OLS. Metode WLS ini merupakan kasus khusus dari *Generalized Least Square.* Disebut *Weighted Least Square* karena pada metode ini digunakan *"weight"* atau pembobot yang proporsional terhadap *inverse*(kebalikan) dari varians variabel respon sehingga diperoleh error baru yang memiliki sifat seperti pada regresi dengan OLS.

Seperti sudah diketahui bahwa model regresi linear umum dalam matrik berbentuk :

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad \ldots(3.2)$$

Apabila untuk membuat model regresi ini digunakan n observasi, maka model untuk setiap observasi ialah :

$$Y_i = X_i\,\beta + \varepsilon_i$$

atau

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$$

Untuk mendapatkan sifat BLUE pada model regresi, maka distribusi error pada model tersebut harus memenuhi $\varepsilon_i \sim iidn(0, \sigma^2)$, artinya :

a. Untuk setiap ε_i berdistribusi identik, dinotasikan $var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ untuk setiap i.
b. ε_i independen, dinotasikan $cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0$ untuk $i \neq j$, akibatnya $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = E(\varepsilon_i)\, E(\varepsilon_j)$
c. $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $E(\varepsilon_i) = 0$ untuk setiap i dan $var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ untuk setiap i. Karena ε_i juga bersifat independen, maka $E(\varepsilon_i\varepsilon_j) = E(\varepsilon_i)\, E(\varepsilon_j) = 0$

Maka matriks varcovar ε dinotasikan var(ε), adalah sebagai berikut **:**

$$\mathrm{var}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\varepsilon_1) & \mathrm{cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & \mathrm{var}(\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{cov}(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \mathrm{cov}(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{var}(\varepsilon_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = I\sigma^2$$

Penaksir parameter koefisien regresi dan variansinya didapat dari persamaan (2.6) dan (2.8) dengan rumus berikut :

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = (X^TX)^{-1}\, X^TY \quad \text{dan}$$

$$\mathrm{var(b)} = \begin{bmatrix} var(b_1) & covar(b_1b_2) & covar(b_1b_3) & \cdots & covar(b_1b_k) \\ covar(b_1b_2) & var(b_2) & covar(b_2b_3) & \cdots & covar(b_2b_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ covar(b_1k_3) & covar(b_2b_k) & covar(b_3b_k) & \ldots & var(b_k) \end{bmatrix}$$

$$= (X'X)^{-1}\sigma^2$$

Penaksir nilai respon, yaitu, pada nilai prediktor ditentukan X, beserta variansinya adalah sebagai berikut :

$$\hat{Y} = Xb$$

$$\mathrm{var}(\hat{Y}) = var\ (Xb) = X'Xvar(b) = X'X(\mathrm{X'X})^{-1}\sigma^2$$

3.2.1 Regresi WLS

Error tidak identik mengakibatkan var(ε_i) tidak sama untuk setiap i, dinotasikan var(ε_i) = σ_i^2 yang disebut heteroskedastistisitas. Heteroskedastistisitas sering terjadi pada data *cross sectional* dan pada data *time series*, karena pada *cross sectional*, data pengamatan dapat bervariasi pada nilai sehingga menyebabkan beberapa pengamatan bernilai relatif besar atau kecil. Namun pada *time series*. Data pengamatan bernilai sama dari waktu ke waktu shingga nilai pengamatan bernilai sama.

Ketika model regresi Y = Xβ + ε dengan var(ε_i) = Wσ^2. Jika W matriks diagonal dengan elemen diagonal bernilai tidak sama, maka Y pengamatan tidak berkorelasi tetapi memiliki varians tidak sama dengan elemn non-diagonalnya bernilai 0.

Agar ε_i memenuhi asumsi identik, maka dilakukan transformasi. Adapun langkah-langkah transformasi agar memenuhi OLS dengan menggunakan metode OLS. Wσ^2 merupakan matriks varcovar dengan W matriks diagonal (n x n) definit positif dan nonsingular. Sehingga W dapat difaktorisasi sebagai berikut:

$$W = C\,\Lambda\,C'$$

Dengan C_{nxn} kolom-kolomnya eigen vektor dari W dan Λ_{nxn} matriks diagonal dengan unsur diagonal eigen value dari W.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Didefinisikan T = $C\,\Lambda^{1/2}$ dengan $\Lambda^{1/2}$ merupakan matriks diagonal yang entri pada diagonal ke-i adalah $\sqrt{\lambda_i}$ sehingga W= T' . Misalkan $P = C\,\Lambda^{-1/2}$ dimana $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ matriks diagonal yang entri pada diagonal ke-i nya adalah $\sqrt{\lambda_i}$

$$PP' = C\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(C\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$= C\Lambda^{\frac{1}{2}}\left(\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)' C'$$

$$= C\ \Lambda^{\frac{1}{2}}\ \Lambda^{\frac{1}{2}}\ C'$$

$$= C\Lambda\ C'$$

$$= W$$

Selanjutnya ubah vektor error ε menjadi

$$f = P^{-1}\ \varepsilon$$

Bertujuan agar

$$E(f) = E(P^{-1}\ \varepsilon) = P^{-1}E(\varepsilon) = 0$$

Dan

$$var(f) = E(ff')$$

$$= E[\ (P^{-1}\ \varepsilon)\ (P^{-1}\varepsilon)']$$

$$= E[\ (P^{-1}\ \varepsilon)\ \varepsilon'\ (P')^{-1}]$$

$$= P^{-1}E\ (\varepsilon\ \varepsilon')\ P'$$

$$= I\sigma^2$$

Oleh karena itu vektor Y dikalikan dengan P^{-1} menjadi:

$$P^{-1}Y = P^{-1}X\beta + P^{-1}\varepsilon$$

Atau

$$Z = V\beta + f \qquad \ldots(3.3)$$

Sehingga terdapat notasi baru:

- variabel respon Z = $P^{-1}Y$,

- variabel prediktor $\mathbf{V}_0$ dan $\mathbf{V}_1$, yang terhimpun di dalam matrik $V = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$,
- residual $f = \mathrm{P}^{-1}\varepsilon$

Persamaan (3.2) memenuhi asumsi OLS, sehingga persamaan menjadi:

$Z = Vb$

$V'Z = V'Vb$

$V'(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}) = V'(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X})b$

$(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X})'(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y}) = (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X})'(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X})b$

$$X'(\mathrm{P}^{-1})'\,\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Y} = \mathrm{X}'\,(\mathrm{P}^{-1})'\,\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}\,\mathrm{b} \qquad \ldots(3.4)$$

Diketahui bahwa $PP = PP' = W$, sehingga

$(\mathrm{PP}')^{-1} = W^{-1}$

$(\mathrm{P}')^{-1}\mathrm{P}^{-1} = W^{-1}$
$(\mathrm{P}^{-1})'\mathrm{P}^{-1} = W^{-1}$

Maka persamaan (3.4) menjadi

$$X'W^{-1}Y = X'W^{-1}Xb \qquad \ldots(3.5)$$

$$(X'W^{-1}X)^{-1}X'W^{-1}Y = Ib \qquad \ldots(3.6)$$

Persamaan (3.6) menghasilkan nilai penduga b metode kuadrat terkecil. Sehingga jika $\varepsilon \sim N(0, W\sigma^2)$, maka distribusi error menjadi $f \sim N(0, I\sigma^2)$ dan persamaan regresi berubah menjadi persamaan (3.3).

3.2.2 Penaksir Parameter Koefisien Regresi WLS dan Variannya

Ketika error ε tidak berkorelasi tetapi varians tidak identik, mengakibatkan matriks varcovar menjadi

$$\sigma^2 V = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{w_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{w_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{w_n} \end{bmatrix}$$

Misalkan $V = W^{-1}$ dimana W adalah matrik diagonal, maka V matriks diagonal dengan elemen diagonalnya $w_1, w_2, \ldots, w_n$ disebut pembobot. Pada persamaan (3.5) dan (3.6) diadapat persamaan normal estimasi *Weighted Least Square*, maka persamaan normal *Weighted Least Square* adalah

$$X'VY = X'VXb$$

Dan

$$(X'VX)^{-1}X'VY = Ib$$

Adalah estimasi *Weighted Least Square.* Adapun varians b sebagai berikut:

$$var\ (b) = \mathrm{E}(b'b) = E\{(b - \beta)(b - \beta)'\}$$

Diketahui bahwa

$$b = (X'VX)^{-1}X'VY = (X'VX)^{-1}X'V(X\beta + \varepsilon)$$
$$= (X'VX)^{-1}(X'VX)\beta + (X'VX)^{-1}X'V\varepsilon$$
$$= \mathrm{I}\beta + (X'VX)^{-1}X'V\varepsilon$$

Sehingga

Var (b) $= \mathrm{E}\{[(X'VX)^{-1}X'V\varepsilon]\ [(X'VX)^{-1}X'V\varepsilon]'\}$

$= \mathrm{E}\{[(X'VX)^{-1}X'V\varepsilon]\ [((X'VX)')^{-1}XV'\varepsilon']\}$

$= \mathrm{E}\{[(X'VX)^{-1}X'V\varepsilon]\ \ [(X'V'X)^{-1}XV'\varepsilon']\}$

$= \mathrm{E}\{[(X'VX)^{-1}(X'VX)(\varepsilon\varepsilon')\ (X'V'X)^{-1}V'\}$

$= \mathrm{E}(\varepsilon\varepsilon')\ (X'VX)^{-1}(X'VX)\ (X'V'X)^{-1}V'\}$

$= \sigma^2 W\ \ I\ (X'X)^{-1}\ (V')^{-1}V'$

$= \sigma^2 V^{-1}\ \ I\ (X'X)^{-1}\ I$

Var (b) $= \sigma^2(X'VX)^{-1}$

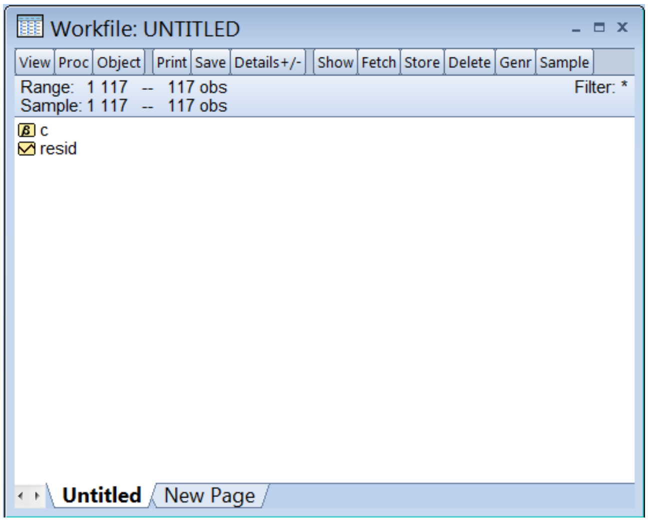
3.3 Langkah-Langkah Pengolahan Data Menggunakan Eviews

Untuk melakukan Uji White dan metode *Wighted Least Square* dapat dilakukan dengan software Eviews. Berikut langkah- langkah uji White srta metode Wighted Least Square menggunakan Eviews (Caraka, 2014: 17) :

1. Untuk membuat suatu workfile, dari menu utama dipilih option **File > New >Workfile**. Pada kotak Frequency, dipilih salah satu frekuensi workfile yang akan digunakan yaitu **undate**

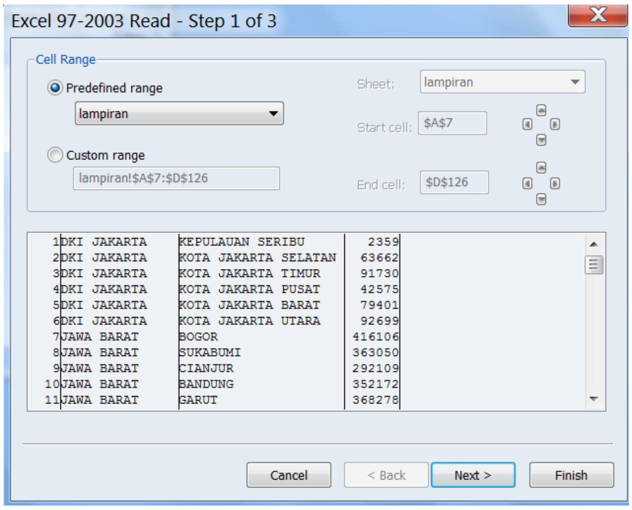
Gambar 3.1 Worfile Create

2. Isi observation sesuai dengan banyak data yang akan diolah



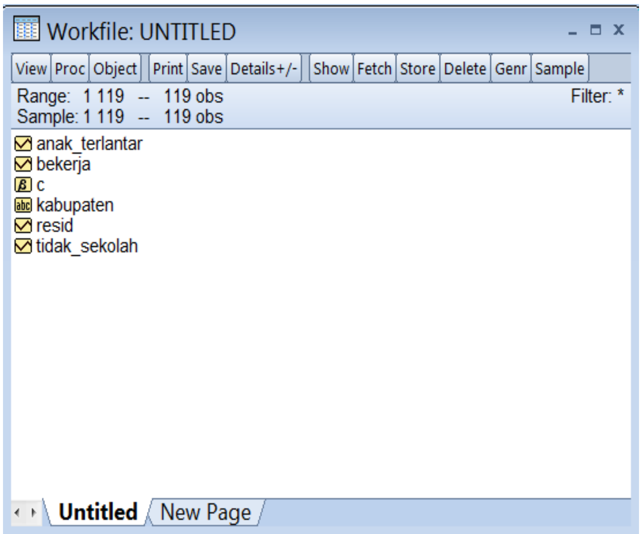
Gambar 3.2 Workfile:UNTITLED

3. Lakukan import data dari microsoft excel dengan klik **File** > **Import** > **Import from file**



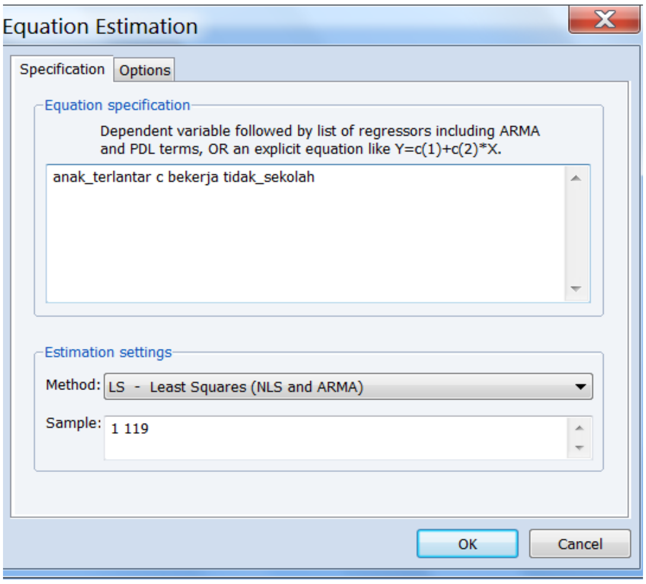
Gambar 3.3 Import Data

Klik **next** hingga **finish.** Maka muncul



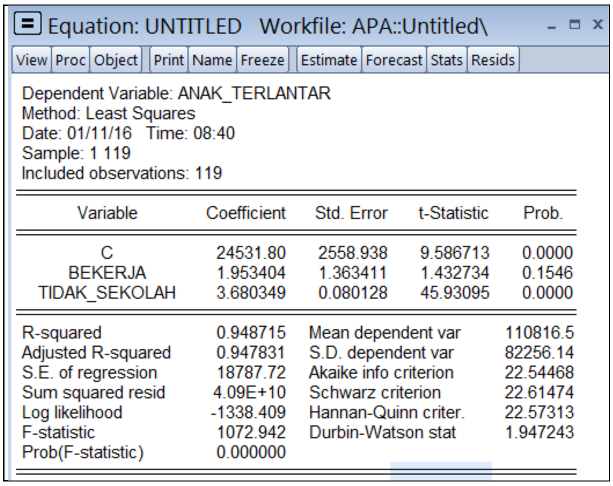
Gambar 3.4 Workfile Data yang Telah Diimport

4. Lakukan estimasi model regresi dengan klik **Quick > Estimation Equation**



Gambar 3.5 Estimation Equation

5. Selanjutnya cek pada output apakah terdapat heteroskedasisitas dengan uji white. Dari jendela output model regresi pilih **option** > **View Residual > Test WhiteHeteroscedasticity**


Equation: UNTITLED Workfile: APA::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: ANAK_TERLANTAR
Method: Least Squares
Date: 01/11/16 Time: 08:40
Sample: 1 119
Included observations: 119

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	24531.80	2558.938	9.586713	0.0000
BEKERJA	1.953404	1.363411	1.432734	0.1546
TIDAK_SEKOLAH	3.680349	0.080128	45.93095	0.0000

R-squared	0.948715	Mean dependent var	110816.5
Adjusted R-squared	0.947831	S.D. dependent var	82256.14
S.E. of regression	18787.72	Akaike info criterion	22.54468
Sum squared resid	4.09E+10	Schwarz criterion	22.61474
Log likelihood	-1338.409	Hannan-Quinn criter.	22.57313
F-statistic	1072.942	Durbin-Watson stat	1.947243
Prob(F-statistic)	0.000000		

Gambar 3.6 koefisien Model Regresi

6. Jika terjadi heteroskedastisitas, lakukan metode Pada menu option, klik Weighted LS/TSLS. Kemudian isikan variabel WT kedalam kolom isian kanan Weight Klik tombol OK dan selanjutnya klik tombol OK sekali lagi