

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Penelitian

Dalam sebuah buku yang disunting oleh Doran (1994) dan diterbitkan dalam rangka memperingati 50 tahun ditemukannya konsep aljabar- C^* , diceritakan bahwa istilah aljabar- C^* pertama kali muncul dengan nama ring- $*$ pada tahun 1943. Menurut Doran (1994), konsep aljabar- C^* dipublikasikan dalam *paper* yang berjudul *On the Imbedding of Normed Rings into the Rings of Operators in Hilbert Space* yang ditulis oleh I. M. Gelfand dan M. A. Naimark. Sejak tahun 1943, literatur yang berkaitan dengan aljabar- C^* semakin banyak bermunculan, hal ini dikarenakan ditemukannya hubungan antara aljabar- C^* dan ilmu matematika lainnya seperti teori representasi, teori operator, aljabar topologi, bahkan fisika kuantum. Barulah pada tahun 1947, istilah ring- $*$ tersebut diperkenalkan sebagai aljabar- C^* oleh Professor Irving Segal.

Pada tahun 1977, J. Cuntz mengembangkan konsep mengenai aljabar- C^* yang dibangun oleh isometri dalam *paper* yang berjudul *Simple C^* -Algebras Generated by Isometries* (Cuntz, 1977). Selanjutnya sejak saat itu, muncul kelas baru dari aljabar- C^* yaitu aljabar Cuntz \mathcal{O}_n dan aljabar Cuntz-Toeplitz \mathcal{E}_n .

Semigrup bebas \mathcal{F}_n merupakan himpunan *word* w dengan operasi *concatenation* $*$ di mana generator dari *word* w ini merupakan elemen-elemen dari sebarang himpunan A . Pada tahun 1999 dalam *paper* yang berjudul *Invariant Subspace and Hyper-Reflexivity for Free Semigroup Algebra*, Kenneth R. Davidson dan David R. Pitts memperkenalkan aljabar semigrup bebas di mana ini merupakan aljabar yang terkait semigrup bebas \mathcal{F}_n . Aljabar semigrup bebas dibangun oleh elemen-elemen dari semigrup bebas \mathcal{F}_n di mana generator untuk setiap elemennya dipetakan ke suatu isometri pada ruang Hilbert, sehingga aljabar semigrup bebas ini merupakan perkembangan dari aljabar Cuntz (Davidson & Pitts, 1999). Selanjutnya, mereka juga mengklasifikasikan representasi atomik, yaitu salah satu kelas representasi dari aljabar semigrup bebas, yang selanjutnya digunakan untuk mempelajari struktur dari aljabar semigrup bebas atomik.

Berdasarkan uraian di atas, penulis termotivasi untuk mengkaji tentang aljabar- C^* yang dibangun oleh semigrup bebas yaitu aljabar semigrup bebas, dan salah satu representasi dari semigrup bebas terkait aljabar- C^* \mathcal{F}_n yaitu representasi atomik dari semigrup bebas.

1.2 Rumusan Masalah Penelitian

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, pokok permasalahan yang akan dikaji yaitu:

1. Bagaimanakah konsep semigrup bebas \mathcal{F}_n ?
2. Bagaimanakah konsep aljabar semigrup bebas?
3. Bagaimanakah kaitan antara aljabar semigrup bebas dan aljabar- C^* ?
4. Bagaimanakah bentuk representasi atomik dari semigrup bebas \mathcal{F}_n ?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. memahami konsep semigrup dan semigrup bebas \mathcal{F}_n ;
2. memahami konsep aljabar semigrup bebas;
3. mengetahui kaitan antara aljabar semigrup bebas dan konsep aljabar- C^* ;
4. mengetahui bentuk representasi atomik dari semigrup bebas \mathcal{F}_n .

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini di antaranya:

1. Melalui konsep representasi dari semigrup bebas \mathcal{F}_n , diperoleh gambaran tentang kaitan antara semigrup bebas \mathcal{F}_n dengan aljabar operator.
2. Melalui konsep representasi atomik, diperoleh gambaran tentang kaitan antara representasi isometrik dengan representasi dari semigrup bebas \mathcal{F}_n .

1.5 Sistematika Penulisan

Penulisan kajian ini disusun dalam 5 bab. BAB I berisi penjelasan mengenai latar belakang penulisan kajian yang kemudian diikuti dengan perumusan

masalah. Selanjutnya bab ini juga berisikan tujuan serta manfaat dari penulisan kajian dan diakhiri dengan penjelasan mengenai kerangka penelitian.

Pada BAB II, yaitu kajian pustaka, dijelaskan ulasan singkat mengenai aljabar operator, dimulai dari ruang Hilbert, aljabar- C^* , topologi operator pada $B(H)$, sampai penjelasan semigrup dan konsep objek bebas.

Pada BAB III, yaitu metode penelitian, berisi uraian tentang tahapan pengerjaan yang dilakukan dalam pengerjaan kajian ini. Selanjutnya pada BAB IV, yaitu pembahasan, dijelaskan definisi dari semigrup bebas, aljabar semigrup bebas serta kaitannya dengan aljabar- C^* , representasi atomik dari semigrup bebas, dan pengklasifikasiannya. Kemudian pada BAB V, dijelaskan keseluruhan simpulan dan rekomendasi dari pengerjaan kajian ini.