BAB III
METODE BEDA HINGGA *CRANK-NICOLSON*

3.1 Metode Beda Hingga *Crank-Nicolson* (C-N)

Metode *Crank-Nicolson* dikembangkan oleh Crank John dan Phyllips Nicholson pada pertengahan abad ke-20, metode ini merupakan pengembangan dari FTCS dan BTCS. Kita telah mengetahui bahwa FTCS dan BTCS keduanya memiliki *local truncation* atau galat pemotongan $\mathcal{O}(k+h^2)$, dengan $\mathcal{O}(k)$ merupakan galat yang muncul dari aproksimasi turunan pertama pada diferensial maju atau diferensial mundur dalam waktu dan $\mathcal{O}(h^2)$ merupakan galat yang muncul dari aproksimasi turunan kedua dalam ruang (saham).

Metode *Crank-Nicolson* merupakan salah satu dari beberapa metode beda hingga yang memiliki kestabilan tanpa syarat dan nilai *error*-nya paling kecil dibandingkan metode-metode lainnya. Untuk kestabilan BTCS, sebenarnya sudah cukup baik karena stabil untuk semua $\lambda = 0$. Namun karena galat berorde $\mathcal{O}(k+h^2)$ masih dianggap cukup besar, metode *Crank-Nicolson* menggunakan suatu trik untuk mencapai aproksimasi turunan kedua dalam waktu tanpa menggunakan lebih dari dua tingkat waktu, maka akan dilakukan aproksimasi beda pusat untuk $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dengan menggunakan gagasan tingkat waktu pada $\left(j+\frac{1}{2}\right)$ atau aproksimasi rata-rata dari skema BTCS pada langkah ke-j dan skema FTCS pada langkah ke-$j+1$ dan aproksimasi beda pusat simetris $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dalam x, sehingga order galatnya akan menjadi $\mathcal{O}(k^2+h^2)$.

Pada skema FTCS, pendekatan solusi $u(x_i, t_{j+1})$ dihitung menggunakan jaringan titik $u\left(x_i, t_j\right)$, sedangkan pada skema BTCS pendekatan solusi $u(x_i, t_j)$ dihitung menggunakan jaringan titik (x_i, t_{j-1}). Pada skema *Crank-Nicolson* pendekatan solusi $u(x_i, t_{j+1})$ akan dihitung menggunakan jaringan titik (x_i, t_j) dan jaringan titik (x_i, t_{j-1}) yang artinya diferensial terhadap waktu ditulis pada $j+\frac{1}{2}$.

Sebagai contoh kasus penyelesaian metode *Crank-Nicolson* digunakan persamaan diferensial parsial (PDP) parabolik, sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

dengan syarat batas (SB):

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \;\; t > 0$$

dan syarat awal (SA):

$$u(x,0) = f(x), \;\; 0 \leq x \leq l$$

Skema *Crank-Nicolson* pada persamaan ruas kanan dari persamaan (3.1) adalah pada waktu $j + \frac{1}{2}$, yang artinya merupakan nilai rerata dari skema FTCS dan BTCS. Berdasarkan pada skema FTCS pada persamaan parabolik adalah persamaan (2.43) atau beda maju (*forward-difference*) pada langkah ke-j dalam t, sedangkan untuk skema BTCS pada persamaan parabolik adalah persamaan (2.52) tetapi pada metode *Crank-Nicolson* menggunakan beda mundur (*backward-difference*) pada langkah ke-$(j+1)$ dalam t.

1. *Forward-Difference* pada langkah ke – j, memberikan persamaan

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} \tag{3.2}$$

   dengan *local truncation error* $O(k + h^2)$

2. *Backward-Difference* pada langkah ke – (j+1)

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{h^2} \tag{3.3}$$

   dengan *local truncation error* $O(k + h^2)$

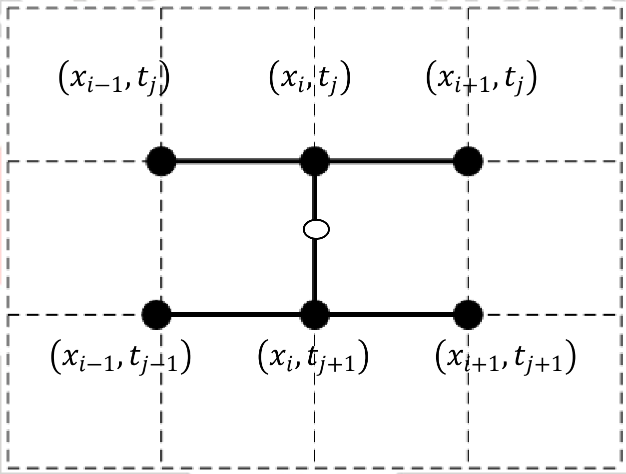
Sehingga skema *Crank-Nicolson* untuk persamaan beda pusat pada aproksimasi turunan kedua dalam x, digunakan rata-rata penjumlahan dari $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ pada FTCS dan BTCS, maka akan diperoleh:

$$\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j}}{k}=\frac{1}{2}\left[\alpha^2\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}\right.$$
$$\left.+\,\alpha^2\frac{w_{i+1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i-1,j+1}}{h^2}\right]$$

$$\frac{w_{i,j+1}-w_{i,j}}{k}=\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{h^2}+\frac{w_{i+1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i-1,j+1}}{h^2}\right] \tag{3.4}$$

dengan *local truncation error* $O(k^2+h^2)$

Penggambaran molekul pada titik-titik dalam *grid* adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1

Skema *Crank-Nicolson*

Jika persamaan (3.4) kedua ruasnya dikali dengan k, diperoleh:

$$w_{i,j+1}-w_{i,j}=\frac{\alpha^2 k}{2h^2}\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}+w_{i+1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i-1,j+1}\right)$$

Misalkan $\lambda=\alpha^2\frac{k}{h^2}$, maka diperoleh:

$$w_{i,j+1}-w_{i,j}=\frac{\lambda}{2}\left(w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}+w_{i+1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i-1,j+1}\right)$$

$$w_{i,j+1}-w_{i,j}=\frac{\lambda}{2}w_{i+1,j}-\lambda w_{i,j}+\frac{\lambda}{2}w_{i-1,j}+\frac{\lambda}{2}w_{i+1,j+1}-\lambda w_{i,j+1}+\frac{\lambda}{2}w_{i-1,j+1}$$

Selanjutnya melakukan pengelompokkan w yang mengandung $j+1$ dan w yang mengandung j, maka diperoleh:

$$w_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2} w_{i+1,j+1} + \lambda w_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2} w_{i-1,j+1} = \frac{\lambda}{2} w_{i+1,j} - \lambda w_{i,j} + \frac{\lambda}{2} w_{i-1,j} + w_{i,j}$$

$$(1+\lambda) w_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2} w_{i+1,j+1} - \frac{\lambda}{2} w_{i-1,j+1} = (1-\lambda) w_{i,j} + \frac{\lambda}{2} w_{i+1,j} + \frac{\lambda}{2} w_{i-1,j}$$

$$-\frac{\lambda}{2} w_{i-1,j+1} + (1+\lambda) w_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2} w_{i+1,j+1} = \frac{\lambda}{2} w_{i-1,j} + (1-\lambda) w_{i,j} + \frac{\lambda}{2} w_{i+1,j} \qquad (3.5)$$

untuk $i = 1,2,\dots,m-1$ dan $j = 1,2,\dots$

Dengan syarat awal $u(x,0) = f(x),\ \ 0 \le x \le l$, maka:

$$w_{i,0} = f(x_i)$$

sedangkan untuk syarat batas $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \ t > 0$, maka:

$$w_{0,1} = w_{m,1} = 0$$

Persamaan (3.5) dapat digunakan untuk menentukan nilai *interior point* $w_{i,1}\ \ \forall\, i = 1,2,\dots,m-1$, sebagai berikut:

$$-\frac{\lambda}{2} w_{0,1} + (1+\lambda) w_{1,1} - \frac{\lambda}{2} w_{2,1} = \frac{\lambda}{2} w_{0,0} + (1-\lambda) w_{1,0} + \frac{\lambda}{2} w_{2,0}$$

$$-\frac{\lambda}{2} w_{1,1} + (1+\lambda) w_{2,1} - \frac{\lambda}{2} w_{3,1} = \frac{\lambda}{2} w_{1,0} + (1-\lambda) w_{2,0} + \frac{\lambda}{2} w_{3,0}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{\lambda}{2} w_{m-3,1} + (1+\lambda) w_{m-2,1} - \frac{\lambda}{2} w_{m-1,1} = \frac{\lambda}{2} w_{m-3,0} + (1-\lambda) w_{m-2,0} + \frac{\lambda}{2} w_{m-1,0}$$

$$-\frac{\lambda}{2} w_{m-2,1} + (1+\lambda) w_{m-1,1} - \frac{\lambda}{2} w_{m,1} = \frac{\lambda}{2} w_{m-2,0} + (1-\lambda) w_{m-1,0} + \frac{\lambda}{2} w_{m,0}$$

atau dapat ditulis kembali dalam bentuk matriks, sebagai berikut:

$$A\vec{w}^{(1)} = B\vec{w}^{(0)}$$

dimana:

$$A=\begin{bmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{bmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{w}^{(1)}=\begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ \vdots \\ w_{m-2,1} \\ w_{m-1,1} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{w}^{(0)}=\begin{pmatrix} w_{1,0} \\ w_{2,0} \\ \vdots \\ w_{m-2,0} \\ w_{m-1,0} \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan iterasi yang sama, maka $w_{i,1}; w_{i,2}; \dots; w_{i,m-1}$ dapat ditentukan, sehingga dapat ditulis

$$A\overrightarrow{w}^{(j+1)} = B\overrightarrow{w}^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

dengan

$$\overrightarrow{w}^{(j+1)}=\begin{pmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{m-2,j+1} \\ w_{m-1,j+1} \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \overrightarrow{w}^{(j)}=\begin{pmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{m-2,j} \\ w_{m-1,j} \end{pmatrix}$$

3.2 Penentuan Harga Opsi dengan menggunakan Metode *Crank-Nicolson*

Model *Black-Scholes* merupakan model untuk menentukan harga opsi. Model ini memiliki bentuk berupa persamaan diferensial, sehingga kita dapat menentukan nilai opsi *call* Eropa dan opsi *put* Eropa secara numerik, dengan menggunakan metode beda hingga *Crank-Nicolson*. Sebelumnya tentukan syarat final dan syarat batas untuk harga opsi *call* Eropa dan opsi *put* Eropa. Syarat final untuk opsi *call* adalah:

$$C(S,0) = maks(S(0) - K, 0)$$

dan syarat final untuk harga opsi *put* Eropa adalah:

$$P(S,0) = maks(K - S(0), 0)$$

Sedangkan untuk syarat batas opsi *call* adalah:

$$C(0,\tau) = 0 \text{ dan } C(L,\tau) = L$$

dan untuk syarat batas opsi *put* adalah:

$$P(0,\tau) = Ke^{-r\tau} \text{ dan } P(L,\tau) = 0$$

Pada skema *Crank-Nicolson* dapat ditentukan dengan mencari rata-rata dari persamaan FTCS dan persamaan BTCS. Metode *Crank-Nicolson* untuk persamaan diferensial parsial (2.55) yaitu:

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S,t)}{\partial S^2} - rS\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} + rV(S,t) = 0$$

dengan aproksimasi beda pusat terhadap turunan pertama $\frac{\partial V}{\partial S}$, beda pusat tengah untuk $\frac{\partial V}{\partial \tau}$ dan beda pusat turunan kedua untuk $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$, akan disubtitusikan:

$S = ih$, $\quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{k}\left(V_{i,j+1} - V_{i,j}\right)$, $\quad \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{1}{4h}\left(V_{i+1,j} - V_{i-1,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i-1,j+1}\right)$,

$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{1}{2h^2}\left(V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}\right)$

(bukti dapat dilihat pada lampiran 10)

Maka persamaan (2.55), untuk skema *Crank-Nicolson* diperoleh:

$$\frac{1}{k}\left(V_{i,j+1}-V_{i,j}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2(ih)^2\frac{1}{2h^2}\left(V_{i+1,j}-2V_{i,j}+V_{i-1,j}+V_{i+1,j+1}-2V_{i,j+1}+V_{i-1,j+1}\right)$$
$$-r(ih)\frac{1}{4h}\left(V_{i+1,j}-V_{i-1,j}+V_{i+1,j+1}-V_{i-1,j+1}\right)+r\left(V_{i,j}+V_{i,j+1}\right)=0$$
$$\frac{1}{k}\left(V_{i,j+1}-V_{i,j}\right)-\frac{1}{4}\sigma^2 i^2\left(V_{i+1,j}-2V_{i,j}+V_{i-1,j}+V_{i+1,j+1}-2V_{i,j+1}+V_{i-1,j+1}\right)$$
$$-\frac{1}{4}ri\left(V_{i+1,j}-V_{i-1,j}+V_{i+1,j+1}-V_{i-1,j+1}\right)+r\left(V_{i,j}+V_{i,j+1}\right)=0$$

Selanjutnya persamaan di atas dikalikan dengan k, maka didapat:

$$\left(V_{i,j+1}-V_{i,j}\right)-\frac{1}{4}k\sigma^2 i^2\left(V_{i+1,j}-2V_{i,j}+V_{i-1,j}+V_{i+1,j+1}-2V_{i,j+1}+V_{i-1,j+1}\right)$$
$$-\frac{1}{4}kri\left(V_{i+1,j}-V_{i-1,j}+V_{i+1,j+1}-V_{i-1,j+1}\right)+rk\left(V_{i,j}+V_{i,j+1}\right)$$
$$=0$$

$$\begin{aligned}(1+rk)V_{i,j+1}&-\frac{1}{4}k\sigma^2 i^2\left(V_{i+1,j+1}-2V_{i,j+1}+V_{i-1,j+1}\right)\\&-\frac{1}{4}rki\left(V_{i+1,j+1}-V_{i-1,j+1}\right)\\&=(1-rk)V_{i,j}+\frac{1}{4}k\sigma^2 i^2\left(V_{i+1,j}-2V_{i,j}+V_{i-1,j}\right)\\&+\frac{1}{4}rki\left(V_{i+1,j}-V_{i-1,j}\right)\end{aligned} \quad (3.6)$$

Jadi, skema *Crank-Nicolson* pada persamaan (3.6) dapat dituliskan sebagai bentuk vektor berikut:

$$\frac{1}{2}(I+B)\vec{V}^{(j+1)}=\frac{1}{2}(I+F)\vec{V}^{(j)}+\frac{1}{2}\left(\vec{p}^{(j)}+\vec{q}^{(j)}\right) \quad (3.7)$$

dengan

$$B=(1+rk)I-\frac{1}{2}k\sigma^2 D_2T_2-\frac{1}{2}krD_1T_1$$

$$F=(1-rk)I+\frac{1}{2}k\sigma^2 D_2T_2+\frac{1}{2}krD_1T_1$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m-1 \end{bmatrix} \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 3^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (m-1)^2 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & -2 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3.3 Algoritma Penentuan Harga Opsi Eropa dengan Metode Beda Hingga

Dalam menentukan harga opsi Eropa dimulai dengan menentukan PDP *Black-Scholes*, syarat final dan syarat batas. Dilanjutkan dengan menghitung harga opsi menggunakan metode *Crank-Nicolson* yang akan dibandingkan dengan harga opsi dari FTCS dan BTCS. Dalam perhitungan diperlukan beberapa parameter, diantaranya harga saham awal/saat ini (S_0), harga pelaksanaan/*strike price* (K), tingkat suku bunga (r), waktu jatuh tempo/*maturity time* (T), banyak partisi saham (M), banyak partisi waktu (N) dan harga saham maksimum (L) dimana $0 \leq S \leq L$. Algoritma untuk menentukan solusi numerik PDP *Black-Scholes* untuk menentukan titik selang (*grid*), saham (S) dan waktu (t) serta syarat batas opsi *call* Eropa adalah sebagai berikut:

1. *Input* nilai $S_0, L, K, N, M, T, \sigma, r$
2. Kemudian tentukan nilai $k = \frac{T}{N}$ dan $h = \frac{L}{M}$
3. Hitung nilai t pada setiap j pada persamaan $t_j = (j-1)k$, dimana nilai $j = 1, 2, 3, \dots, m+1$

4. Tentukan syarat batas pada saat $t = T$ dengan persamaan $(S,T) = maks(S(T) - K, 0)$, dengan ketentuan jika harga saham lebih kecil dari *strike price* maka bernilai nol.
5. Hitung harga opsi dengan persamaan (3.7) dari masing-masing *grid.*
6. Hitung harga opsi untuk metode *Crank-Nicolson.*