BAB III
METODE *MULTISTAGE RANDOM SAMPLING*

3.1 Pengertian *Multistage Random Sampling*

Multistage random sampling merupakan pengembangan dari *simple cluster sampling*. Pada *simple cluster sampling*, letak keacakan tidak dilakukan langsung pada unit sampling, namum dilakukan pada gugus (*cluster*) dimana unit sampling tersebut berada. Proses penarikan sampel dengan menggunakan metode *simple cluster sampling* terdiri dari dua tahap. Tahap pertama yaitu tahap pemilihan *cluster* dari unit *sampling* dan tahap kedua yaitu tahap penarikan unit *sampling* dari *cluster* yang telah ditentukan pada tahap pertama. Apabila populasinya heterogen dan berukuran besar, maka penarikan sampel dengan menggunakan metode *simple cluster sampling* sampling akan menghasilkan sampel yang kurang representatif. Hal ini karena, apabila populasinya heterogen dan berukuran besar, sekalipun penarikan sampel dilakukan dalam dua tahap. Namun karena keheterogenannya akan mengakibatkan pada tahap pertama pun akan tetap menghasilkan *cluster* yang heterogen. Oleh karena itu, untuk populasi yang heterogen dan berukuran besar akan tepat apabila proses penarikan sampelnya dilakukan dalam beberapa tahap, sehingga dapat menghasilkan gugus-gugus (*cluster-cluster*) yang lebih homogen dibandingkan dengan gugus-gugus (*cluster-cluster*) yang dihasilkan pada simple cluster sampling. Pada populasi yang heterogen dan berukuran besar agar diperoleh sampel yang representatif, maka proses penarikan sampelnya dapat dilakukan dalam beberapa tahap dengan alurnya yaitu pada tiap tahapan yang dilakukan adalah pemilihan gugus-gugus (*cluster-cluster*) sampai tahap dimana diperoleh gugus (*cluster*) yang homogen. Apabila telah diperoleh gugus (*cluster*) yang homogen, pada tahap selanjutnya yang dilakukan yaitu penarikan unit *sampling* dari tiap gugus (*cluster*) yang homogen tersebut sehingga diperoleh sampel. Proses penarikan sampel dengan beberapa tahap seperti yang telah dikemukakan di atas dinamakan *multistage random sampling*.

Seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa *multistage random sampling* merupakan pengembangan dari *simple cluster sampling*, karena itu pada proses penurunan rumus merupakan pengembangan dari rumus-rumus pada *simple cluster sampling*. Pada skripsi ini pembahasan mengenai *multistage random sampling* ini dibatasi untuk 4 tahap.

3.2 Total Populasi

Secara umum pada *simple random sampling*, total populasi merupakan hasil kali antara banyaknya data populasi (N) dengan rata-rata populasi $(\bar{X})$ dan dinyatakan dengan perumusan berikut :

$$\bar{X} = \frac{X}{N}$$

Penaksir total populasi dan penaksir rata-rata berdasarkan pengertian umum ada dalam metode *simple random sampling*. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_N$ adalah populasi yang berukuran N dan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel yang berukuran n. Rata-rata populasi $(\bar{X})$ dan rata-rata sampel $(\bar{x})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Rata–rata sampel merupakan penaksir tak bias dari rata–rata populasi, dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\bar{X}} = \bar{x}$$

Pembuktian :

$$\begin{aligned} E(\bar{x}) &= E\left[\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\right] \\ &= \frac{1}{n}[E(x_1) + E(x_2) + \cdots + E(x_n)] \\ &= \frac{1}{n}(n\bar{X}) = \bar{X} \\ E(\bar{x}) &= \bar{X} \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan di atas, dapat diperoleh informasi bahwa total populasi merupakan penaksir tak bias untuk total populasi, dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{X} = X$$

Pembuktian :

$$E(\hat{X}) = E(N\bar{x})$$
$$= N[E(\bar{x})]$$
$$= N\bar{X}$$
$$E(\hat{X}) = X$$

Simple cluster sampling terdiri dari dua tahap yaitu pemilihan m kelompok dari M usu dan yang kedua yaitu pemilihan n_i (i = 1, 2, ..., m) dari N_i usk. Total populasi didefinisikan sebagai berikut:

$$X = \sum_{i=1}^{M} X_i$$

Three-stage cluster sampling terdiri dari tiga tahap yaitu pemilihan l kelompok dari L psu, kedua yaitu pemilihan m_i (i = 1, 2, ..., l) dari M_i ssu dan ketiga yaitu pemilihan n_{ij} (j = 1, 2, ..., m) dari N_{ij} tsu. Total populasi didefinisikan sebagai berikut:

$$X = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{M} X_{ij}$$

Four-stage cluster sampling terdiri dari empat tahap yaitu pemilihan t kelompok dari T psu, kedua yaitu pemilihan l_i (i = 1, 2, ..., t) dari l_i ssu, ketiga yaitu pemilihan m_{ij} (j = 1, 2, ..., l) dari M_{ij} tsu dan Keempat yaitu pemilihan n_{ijk} (j = 1, 2, ..., m) dari N_{ijk} fsu. Total populasi didefinisikan sebagai berikut:

$$X = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j=1}^{L} \sum_{k=1}^{M} X_{ijk}$$

Sehingga untuk multistage random sampling yang memiliki n tahap, maka total populasinya didefinisikan sebangai berikut :

$$X = \sum_{i=1}^{T} \cdots \sum_{(n-1)=1}^{N} X_{i,\dots,(n-1)}$$

dimana,

X = total populasi

T = kelompok

N = kelompok ke $n - 1$

n = banyak tahap

3.3 Penaksir Total Populasi

Pemilihan unit-unit sampling pada *simple cluster sampling* terdiri dari dua tahap. Pertama yaitu pemilihan m kelompok dari M psu dan yang kedua yaitu pemilihan n_i (i = 1, 2, ..., m) dari N_i ssu. Dengan kata lain, proses penaksiran jumlah total populasi dilakukan dalam dua langkah. Langkah pertama, menaksir total kelompok m yang dinotasikan dengan $\hat{x}$ dan langkah kedua dengan menggunakan hasil dari langkah pertama untuk menaksir total dari kelompok M yang dinotasikan dengan $\hat{X}$.

Total populasi dinotasikan dengan X dan didefinisikan dengan $X = \sum_{i=1}^{M} X_i$. Sedangkan penaksir total populasi dinotasikan dengan $\hat{X}$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \frac{M}{m}\hat{x} \\ &= \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_i \\ &= \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{m} N_i\bar{x}_i \\ &= \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{m} N_i \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n_i} \\ &= \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{N_i}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Pemilihan unit-unit sampling pada *three-stage cluster sampling* terdiri dari tiga tahap. Pertama yaitu pemilihan l kelompok dari L psu. Kedua yaitu pemilihan m_i (i = 1, 2, ..., l) dari M_i ssu. Ketiga yaitu pemilihan n_{ij} (j = 1, 2, ..., m) dari N_{ij} tsu. Dengan kata lain, proses penaksiran jumlah total populasi dilakukan dalam tiga langkah. Langkah pertama, menaksir total kelompok n yang dinotasikan dengan $\hat{x}_i$. Langkah kedua dengan menggunakan hasil dari langkah pertama untuk menaksir total kelompok m yang dinotasikan dengan $\hat{x}$. Langkah ketiga dengan menggunakan hasil dari langkah kedua untuk menaksir total dari kelompok L yang dinotasikan dengan $\hat{X}$.

Total populasi dinotasikan dengan X dan didefinisikan dengan $X = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{M} X_{ij}$

. Sedangkan penaksir total populasi dinotasikan dengan $\hat{X}$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= \frac{L}{l}\hat{x} \\
&= \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{l}\hat{X}_i \\
&= \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{l}M_i\hat{\hat{x}}_i \\
&= \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{l}M_i\frac{\sum_{j=1}^{m_i}\hat{X}_{ij}}{m_i} \\
&= \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\hat{X}_{ij} \\
&= \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}N_{ij}\bar{x}_{ij} \\
&= \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}N_{ij}\frac{\sum_{k=1}^{n_{ij}}x_{ijk}}{n_{ijk}} \\
&= \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{l}\frac{M_i}{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{N_{ij}}{n_{ij}}\sum_{k=1}^{n_{ij}}x_{ijk} \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Pemilihan unit-unit sampling pada *four-stage cluster sampling* terdiri dari empat tahap. Pertama yaitu pemilihan t kelompok dari T psu. Kedua yaitu pemilihan l_i (i = 1, 2, ..., t) dari l_i ssu. Ketiga yaitu pemilihan m_{ij} (j = 1, 2, ..., l) dari M_{ij} tsu. Keempat yaitu pemilihan n_{ijk} (j = 1, 2, ..., m) dari N_{ijk} fsu. Dengan kata lain, proses penaksiran jumlah total populasi dilakukan dalam empat langkah. Langkah pertama, menaksir total kelompok n yang dinotasikan dengan $\hat{x}_{ij}$. Langkah kedua dengan menggunakan hasil dari langkah pertama untuk menaksir total kelompok m yang dinotasikan dengan $\hat{x}_i$. Langkah ketiga dengan menggunakan hasil dari langkah kedua untuk menaksir total kelompok l yang dinotasikan dengan $\hat{x}$. Langkah keempat dengan menggunakan hasil dari langkah ketiga untuk menaksir total dari kelompok T yang dinotasikan dengan $\hat{X}$.

Total populasi dinotasikan dengan X dan didefinisikan dengan $X = \sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{M}X_{ijk}$. Sedangkan penaksir total populasi dinotasikan dengan $\hat{X}$ dan didefinisikan sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\hat{X} &= \frac{T}{t}\hat{x} \\
&= \frac{T}{t}\sum_{i=1}^{t}\hat{X}_i \\
&= \frac{T}{t}\sum_{i=1}^{t}L_i\hat{\hat{x}}_i
\end{aligned}
$$

$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} L_i \frac{\sum_{j=1}^{l_i} \hat{X}_{ij}}{l_i}$$
$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{L_i}{l_i} \sum_{j=1}^{l_i} \hat{X}_{ij}$$
$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{L_i}{l_i} \sum_{j=1}^{l_i} M_{ij} \hat{\bar{x}}_{ij}$$
$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{L_i}{l_i} \sum_{j=1}^{l_i} M_{ij} \frac{\sum_{k=1}^{m_{ij}} \hat{X}_{ijk}}{m_{ij}}$$
$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{L_i}{l_i} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{M_{ij}}{m_{ij}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \hat{X}_{ijk}$$
$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{L_i}{l_i} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{M_{ij}}{m_{ij}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} N_{ijk} \bar{x}_{ijk}$$
$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{L_i}{l_i} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{M_{ij}}{m_{ij}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} N_{ijk} \frac{\sum_{p=1}^{n_{ijk}} x_{ijkp}}{n_{ijk}}$$
$$= \frac{T}{t} \sum_{i=1}^{t} \frac{L_i}{l_i} \sum_{j=1}^{l_i} \frac{M_{ij}}{m_{ij}} \sum_{k=1}^{m_{ij}} \frac{N_{ijk}}{n_{ijk}} \sum_{p=1}^{n_{ijk}} x_{ijkp}$$

dimana $\hat{X}_i$ merupakan notasi dari penaksir jumlah total populasi dari masing-masing kelompok, $\bar{x}_i$ merupakan notasi dari rata-rata kelompok utama, x_i merupakan notasi dari jumlah elemen-elemen dalam kelompok utama, x_{ij} merupakan notasi dari jumlah elemen-elemen dalam kelompok utama, x_{ijk} merupakan notasi dari jumlah elemen-elemen dalam kelompok utama dan x_{ijkp} merupakan notasi dari elemen-elemen di kelompok utama.

Dari perumusan penaksir total populasi *simple cluster sampling*, *three-stage cluster sampling* dan *four-stage cluster sampling* dapat dilihat suatu pola untuk membuat rumusan penaksir total populasi untuk *multistage random sampling*, yaitu :

$$\hat{X} = \frac{P_1}{p_1} \sum_{i=1}^{p_1} \cdots \frac{P_n}{p_n} \sum_{n=1}^{p_n} x_{i,j \ldots n}$$

Keterangan :

$\hat{X}$ = penaksir total populasi

P = kelompok

p = sampel acak dari kelompok P

n = banyak tahap

$x_{i,j\dots n}$ = elemen-elemen di kelompok utama

3.4 Varians Penaksir Total Populasi

Setelah taksiran dari total populasi diperoleh, selanjutnya yaitu menghitung variansi dari $\hat{X}$ untuk menilai presisinya. Secara umum terdapat dua komponen dari variansi yaitu, variansi yang disebabkan oleh penarikan sampel dari primary sampling unit (psu) disebut variansi diantara psu dan variansi yang disebabkan oleh sampel acak yang dipilih dari psu disebut juga variansi dalam psu. Pada simple cluster sampling, variansi diantara psu disebut variansi yang diperoleh dari pemilihan m kelompok. Sedangkan variansi dalam psu merupakan variansi yang diperoleh dari pemilihan n_i dari psu ke-i. Sehingga dapat ditulis variansi dari $\hat{X}$ sebagai berikut :

V($\hat{X}$) = (varians diantara psu) + (varians di dalam psu)

atau secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$V(\hat{X}) = M^2 \frac{M-m}{M}\frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{M} N_i^2 \frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i} \qquad (3.4)$$

Pembuktian :

Berdasarkan definisi, variansi dari $\hat{X} = \frac{M}{m}\sum^m \hat{X}_i$ adalah

$$V(\hat{X}) = E(\hat{X} - X)^2 \qquad (3.5)$$

Perhatikan bahwa $(\hat{X} - X)^2$ dapat dirubah secara aljabar sebagai berikut :

$$(\hat{X} - X)^2 = \left[\frac{M}{m}\sum^m \hat{X}_i - X\right]^2$$

$$= \left[\left(\frac{M}{m}\sum^m \hat{X}_i - \frac{M}{m}\sum^m X_i\right) + \left(\frac{M}{m}\sum^m X_i - X\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{M}{m}\sum^m X_i - X\right)^2 + 2\left(\frac{M}{m}\sum^m X_i - X\right)\left(\frac{M}{m}\sum^m \hat{X}_i - \frac{M}{m}\sum^m X_i\right) + \left(\frac{M}{m}\sum^m \hat{X}_i - \frac{M}{m}\sum^m X_i\right)^2$$

$$= \left(\frac{M}{m}\sum^m X_i - X\right)^2 + 2\left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{M}{m}\sum^m X_i - X\right)\sum(\hat{X}_i - X_i) + \left(\frac{M}{m}\right)^2\left[\sum^m(\hat{X}_i - X_i)\right]^2$$

$$= \left(\frac{M}{m}\sum^{m} X_i - X\right)^2 + 2\left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{M}{m}\sum^{m} X_i - X\right)\sum\left(\hat{X}_i - X_i\right) + \left(\frac{M}{m}\right)^2 \sum^{m}\left(\hat{X}_i - X_i\right)^2 + \left(\frac{M}{m}\right)^2 \sum_{i\neq i'}^{m}\left(\hat{X}_i - X_i\right)\left(\hat{X}_{i'} - X_i\right)$$

= A + B + C + D

Kemudian menentukan nilai ekspektasi dari $\left(\hat{X} - X\right)^2$ dengan i (psu) konstan. Karena itulah mengapa pada penentuan nilai ekspektasi melibatkan ssu yang dinotasikan dengan j.

$$E_j\left(\hat{X} - X\right)^2 = E_j(A) + E_j(B) + E_j(C) + E_j(D)$$

- Penentuan $E_j(A)$

$$E_j\left(\frac{M}{m}\sum^{m} X_i - X\right)^2 = \left(\frac{M}{m}\sum^{m} X_i - X\right)^2$$

- Penentuan $E_j(B)$

$$E_j(B) = E_j\left[2\left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{M}{m}\sum^{m} X_i - X\right)\sum\left(\hat{X}_i - X_i\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{M}{m}\right)\left(\frac{M}{m}\sum^{m} X_i - X\right)E_j\sum^{m}\left(\hat{X}_i - X_i\right)$$

karena $\hat{X}_i$ adalah statistik yang diperoleh dari sampling acak pada ssu. Bagaimanapun, telah diketahui bahwa $E\left(\hat{X}_i\right) = X_i$ dan diketahui dari teori statistika bahwa:

$$E\sum X = \sum EX$$

Karena itu,

$$E_j\sum^{m}\left(\hat{X}_i - X_i\right) = \sum^{m} E_j\left(\hat{X}_i - X_i\right) = 0$$

Sehingga diperoleh $E_j(B) = 0$.

- Penentuan $E_j(D)$

Untuk, $E_j(D)$ sama dengan penentuan $E_j(B)$ diperoleh

$$E_j\left(\frac{M}{m}\right)^2 \sum_{i\neq i'}^{m}\left(\hat{X}_i - X_i\right)\left(\hat{X}_{i'} - X_i\right) = 0$$

- Penentuan $E_j(C)$

$$E_j\left[\left(\frac{M}{m}\right)^2\sum^m\left(\hat{X}_i-X_i\right)^2\right]=\left(\frac{M}{m}\right)^2 E_j\sum^m\left(\hat{X}_i-X_i\right)^2$$

$$=\left(\frac{M}{m}\right)^2\sum^m E_j\left(\hat{X}_i-X_i\right)^2$$

Dengan menggunakan sampling acak sederhana, diperoleh

$$E_j\left(\hat{X}_i-X_i\right)^2=N_i^2\frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i}$$

$$S_i^2=\frac{1}{N_i-1}\sum_j^{N_i}\left(X_{ij}-\bar{X}_i\right)^2$$

S_i^2 yang mana merupakan varians untuk X_{ij} ketika sampling acak sederhana digunakan.

Selanjutnya mensubstitusikan hasil dari penentuan $E_j(A)$ dengan penentuan $E_j(C)$ diperoleh:

$$E_j\left(\hat{X}-X\right)^2=\left(\frac{M}{m}\sum_i^m X_i-X\right)^2+\left(\frac{M}{m}\right)^2\sum^m N_i^2\frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i}$$

i pada $E_i\left(\hat{X}-X\right)^2$ tidak dianggap konstan dan $E_j\left(\hat{X}-X\right)^2=y_i$ menjadi variabel acak. Permasalahan selanjutnya terletak pada ekspektasi dari variabel acak tersebut yang diperlihatkan sebagai berikut:

$$E_i\left[E_j\left(\hat{X}-X\right)^2\right]=E_i\left[\frac{M}{m}\sum_i^m X_i-X\right]^2+E_i\left(\frac{M}{m}\right)^2\sum^m N_i^2\frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i} \qquad (3.6)$$

Misalkan bagian II pada ruas kanan dari persamaan (3.17) ditulis sebagai berikut:

$$E_i\left(\frac{M}{m}\right)^2\sum^m U_i$$

dimana

$$U_i=N_i^2\frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i}$$

Sebagaimana yang ditunjukkan di atas, U_i $(i = 1,2,3, \dots, M)$ adalah variabel acak dengan M nilai yang mungkin dimana masing-masing memiliki probabilitas $\frac{1}{M}$, karena masing-masing psu dipilih menggunakan sampling acak sederhana, maka:

$$E_i \left(\frac{M}{m}\right)^2 \sum^{m} U_i = \left(\frac{M}{m}\right)^2 \sum_{i}^{m} E_i U_i$$

$$= \left(\frac{M}{m}\right)^2 \sum_i^m \left[\sum_i^M \frac{1}{M} U_i\right]$$

$$= \left(\frac{M}{m}\right)^2 m \frac{1}{M} \sum^M N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i} \frac{S_i^2}{n_i} \qquad (3.7)$$

Seperti yang telah ditunjukkan di atas, persamaan (3.18) adalah variansi karena S_i^2 merupakan variansi dalam psu ke i. Selanjutnya untuk bagian I ruas kanan dari persamaan (3.17), diperoleh:

$$E_i \left[\frac{M}{m} \sum^{m} X_i - X\right]^2$$

dimana

$$\frac{M}{m} \sum^{m} X_i$$

dapat dipertimbangkan sebagai estimasi dari X berdasarkan pada sampling acak dari m psu. Kemudian, dengan menggunakan perumusan pada metode sampling acak sederhana, diperoleh:

$$E_i \left[\frac{M}{m} \sum^m X_i - X\right]^2 = M^2 E_i \left[\frac{1}{m} \sum^m X_i - \bar{X}\right]^2$$

$$= M^2 \frac{M-m}{M} \frac{1}{m} \frac{\sum (X_i - X)^2}{M-1} \qquad (3.8)$$

Berdasarkan persamaan (3.6), persamaan (3.7), dan persamaan (3.8), diperoleh varians dari $\hat{X}$ adalah :

$$V(\hat{X}) = M^2 \frac{M-m}{M} \frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^{M} N_i^2 \frac{N_i - n_i}{n_i} \frac{S_i^2}{n_i}$$

Pada *three-stage cluster sampling*, varians dari $\hat{X}$ diperoleh dari penggabungan dua varians simple cluster sampling yang prosesnya sebanyak dua tahap. Berikut penjelasan dengan skema :

- Kasus 2 tahap :

psu———ssu

dan berdasarkan skema di atas, $V(\hat{X})$ menjadi

V($\hat{X}$) = (varians diantara psu) + (varians di dalam psu)

Varians dari $\hat{X}$ telah diperoleh di atas yaitu :

$$V(\hat{X}) = M^2 \frac{M-m}{M}\frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{M} N_i^2 \frac{N_i-n_i}{n_i}\frac{S_i^2}{n_i}$$

- Kasus 3 tahap :

psu—————ssu (kasus kesatu)

ssu—————tsu (kasus kedua)

dimana ada kasus 2 tahap diantara psu dan ssu, dan kasus 2-stage lainnya antara ssu dan tsu.

Varians dari $\hat{X}$ pada kasus 2 tahap:

(1) $$V(\hat{X}) = M^2 \frac{M-m}{M}\frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m}\sum^{M} N_i^2 \frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i}$$

Dimana,

$$S_b^2 = \frac{1}{M-1}\sum_i^M (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_i^2 = \frac{1}{N-1}\sum_j^{N_i}\left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2$$

Ketika mensubstitusikan varians ke dalam psu dan ssu pada kasus 3-stage, akan didapatkan

(2) $$L^2 \frac{L-l}{L}\frac{S_b^2}{l} + \frac{L}{l}\sum_i^L M_i^2 \ \frac{(M_i-\bar{m})}{M_i}\ \frac{S_i^2}{\bar{m}}$$

dimana

$$S_b^2 = \frac{1}{L-1}\sum_i^L (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_i^2 = \frac{1}{M_i - 1} \sum_j^{M_i} \left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}_i \right)^2$$

Selanjutnya, substitusikan varians 2 tahap ke ssu dan tsu dari kasus 3-stage. Maka:

(3) $${M_i}^2 \frac{M_i - \bar{m}}{M_i} \frac{S_i^2}{\bar{m}} + \frac{M_i}{\bar{m}} \sum_j^{M_i} N_{ij}^2 \frac{N_{ij} - n_{ij}}{N_{ij}} \frac{S_{ij}^2}{n_{ij}}$$

dimana

$$S_{ij}^2 = \frac{1}{N_{ij} - 1} \sum_k^{N_{ij}} \left(X_{ijk} - \bar{\bar{X}}_{ij} \right)^2$$

$V(\hat{X})$ untuk kasus 3-stage bisa didapatkan dengan menggabungkan persamaan (2) dan (3)

(4) $$V(\hat{X}) = L^2 \frac{L-l}{L} \frac{S_b^2}{l} + \frac{L}{l} \sum_i^L M_i^2 \ \frac{(M_i - \bar{m})}{M_i} \frac{S_i^2}{\bar{m}} + {M_i}^2 \frac{M_i - \bar{m}}{M_i} \frac{S_i^2}{\bar{m}} + \frac{M_i}{\bar{m}} \sum_j^{M_i} N_{ij}^2 \frac{N_{ij} - n_{ij}}{N_{ij}} \frac{S_{ij}^2}{n_{ij}}$$

Karena ssu pada kasus kedua dapat dimasukkan kedalam persamaan ssu pada kasus kesatu sehingga,

$$V(\hat{X}) = L^2 \frac{L-l}{L} \frac{S_b^2}{l} + \frac{L}{l} \sum_i^L \left(M_i^2 \ \frac{M_i - \bar{m}}{M_i} \frac{S_i^2}{\bar{m}} + \frac{M_i}{\bar{m}} \sum_j^{M_i} N_{ij}^2 \frac{N_{ij} - n_{ij}}{N_{ij}} \frac{S_{ij}^2}{n_{ij}} \right)$$

$$= L^2 \frac{L-l}{L} \frac{S_b^2}{l} + \frac{L}{l} \sum_i^L M_i^2 \ \frac{M_i - \bar{m}}{M_i} \frac{S_i^2}{\bar{m}} + \frac{L}{l} \sum_i^L \frac{M_i}{\bar{m}} \sum_j^{M_i} N_{ij}^2 \ \frac{N_{ij} - n_{ij}}{N_{ij}} \frac{S_{ij}^2}{n_{ij}}$$

Sehingga pada *four-stage cluster sampling*, varians dari $\hat{X}$ diperoleh dari penggabungan tiga varians simple cluster sampling yang prosesnya sebanyak dua tahap. Berikut penjelasan dengan skema :

psu——————ssu (kasus kesatu)
ssu——————tsu (kasus kedua)
tsu——————fsu (kasus ketiga)

dimana ada kasus 2 tahap diantara psu dan ssu, kasus 2 tahap antara ssu dan tsu, dan kasus 2 tahap antara tsu dan fsu.

Varians dari $\hat{X}$ pada kasus 2 tahap:

$$V(\hat{X}) = M^2 \frac{M-m}{M} \frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum^M N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i} \frac{S_i^2}{n_i}$$

dimana

$$S_b^2 = \frac{1}{M-1}\sum_i^M (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_i^2 = \frac{1}{N-1}\sum_j^{N_i} \left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2$$

Ketika mensubstitusikan varians ke dalam psu dan ssu pada kasus 4-stage, akan dipereloh :

$$T^2 \frac{T-t}{T}\frac{S_b^2}{t} + \frac{T}{t}\sum_i^T L_i^2 \frac{L_i - \bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} \qquad (1)$$

Dimana,

$$S_b^2 = \frac{1}{T-1}\sum_i^T (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_i^2 = \frac{1}{L_i - 1}\sum_j^{L_i} \left(X_{ij} - \bar{\bar{X}}_i\right)^2$$

Ketika mensubstistusikan varians ke dalam ssu dan tsu dari kasus 4-stage, maka diperoleh :

$${L_i}^2 \frac{L_i - \bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}^2 \frac{M_{ij} - m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}} \qquad (2)$$

Dimana,

$$S_{ij}^2 = \frac{1}{M_{ij} - 1}\sum_k^{M_{ij}} \left(X_{ijk} - \bar{\bar{X}}_{ij}\right)^2$$

Selanjutnya, substitusikan varians 2 tahap ke dalam tsu dan fsu dari kasus 4-stage, sehingga diperoleh :

$$M_{ij}^2 \frac{M_{ij} - m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}} + \frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}^2 \frac{N_{ijk} - n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}} \qquad (3)$$

Dimana,

$$S_{ijk}^2 = \frac{1}{N_{ijk} - 1}\sum_r^{N_{ijk}} \left(X_{ijkr} - \bar{\bar{X}}_{ijk}\right)^2$$

$V(\hat{X})$ untuk kasus 4 tahap bisa diperoleh dengan menggabungkan terlebih dahulu persamaan (2) dan (3), baru setelah itu digabungkan dengan persamaan (1).

Penggabungan persamaan (2) dan (3) :

$${L_i}^2 \frac{L_i - \bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}^2 \frac{M_{ij} - m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}} + M_{ij}^2 \frac{M_{ij} - m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}} + \frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}^2 \frac{N_{ijk} - n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

Karena tsu pada kasus ketiga dapat dimasukkan kedalam persamaan tsu pada kasus kedua, sehingga diperoleh :

$$L_i{}^2 \frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\left(M_{ij}^2 \frac{M_{ij}-m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}} + \frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}^2 \frac{N_{ijk}-n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}}\right)$$

$$L_i{}^2 \frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}^2 \frac{M_{ij}-m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}} + \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}^2 \frac{N_{ijk}-n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}} \qquad (4)$$

$V(\hat{X})$ untuk kasus 4 tahap dipereloh dengan menggabungkan (1) dan (4), sehingga :

$$V(\hat{X}) = T^2 \frac{T-t}{T}\frac{S_b^2}{t} + \frac{T}{t}\sum_i^T L_i^2 \frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} + L_i{}^2 \frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}}$$

$$+ \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}^2 \frac{M_{ij}-m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}} + \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}^2 \frac{N_{ijk}-n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}} \qquad (5)$$

Karena ssu pada kasus keempat dapat dimasukkan kedalam persamaan ssu pada kasus pertama, sehingga diperoleh :

$$V(\hat{X}) = T^2 \frac{T-t}{T}\frac{S_b^2}{t} + \frac{T}{t}\sum_i^T (L_i{}^2 \frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}^2 \frac{M_{ij}-m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}}$$

$$+ \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}^2 \frac{N_{ijk}-n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}})$$

$$V(\hat{X}) = T^2 \frac{T-t}{T}\frac{S_b^2}{t} + \frac{T}{t}\sum_i^T L_i{}^2 \frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}^2 \frac{M_{ij}-m_{ij}}{M_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}}$$

$$+ \frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}^2 \frac{N_{ijk}-n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

Persamaan (5) dapat dibagi kedalam 4 komponen dengan asumsi bahwa T merupakan jumlah populasi yang sangat besar namun dapat dihitung dan $t \leq T$, yaitu :

$$V(\hat{X}): \frac{S_b^2}{t}\ \frac{S_i^2}{t\bar{l}}\ \frac{S_{ij}^2}{t\bar{l}m_{ij}}\ \frac{S_{ijk}^2}{t\bar{l}m_{ij}n_{ijk}}$$

Misalkan, $m_{ij} = \bar{m}$, $n_{ijk} = \bar{n}$, akan didapatkan $t\bar{l}\bar{m}\bar{n} = n$ sebagai total ukuran sampel. Selanjutnya, jika nilai n tetap, nilai t, $\bar{l}$ dan $\bar{m}$ akan meningkat seiring dengan nilai n yang makin kecil. Apabila nilai t, $\bar{l}$ dan $\bar{m}$ semakin besar, maka nilai $\frac{S_b^2}{t}$, $\frac{S_i^2}{t\bar{l}}$ dan $\frac{S_{ij}^2}{t\bar{l}m_{ij}}$ akan mengecil. Hal ini mengindikasikan bahwa biaya memilih psu, ssu, tsu dan rsu sama, sehingga bisa untuk mengecilkan ukuran $V(\hat{X})$ dengan cara memilih psu dibandingkan ssu, tsu dan fsu.

Dilihat dari rumusan varians dari $\hat{X}$ pada *simple cluster sampling*, *three-stage cluster sampling*, dapat dilihat suatu pola untuk memperoleh varians dari *multistage random sampling*, yaitu :

$$V(\hat{X}) = (varians\ di\ antara\ unit\ sampel + varians\ di\ dalam\ unit\ sampel)_1 + \cdots + (varians\ di\ antara\ unit\ sampel + varians\ di\ dalam\ unit\ sampel)_{n-1}$$

Dimana,

$V(\hat{X})$ = varians dari $\hat{X}$

n = banyak tahap

3.5 Penaksir dari $V(\hat{X})$

Pada populasi yang heterogen dan berukuran besar, sulit untuk menentukan $V(\hat{X})$ secara langsung, sehingga untuk penentuannya dapat dilakukan dengan menggunakan penaksirnya. Penaksir dari $V(\hat{X})$ dinotasikan dengan $\hat{V}(\hat{X})$. Secara umum, seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa $V(\hat{X})$ dibentuk dari dua komponen varians, varians diantara psu (S_b^2) dan varians dalam psu (S_i^2). Oleh karena itu, penaksir $V(\hat{X})$ pada simple cluster sampling dapat diperoleh dengan menggunakan penaksir-penaksir dari S_b^2 dan S_i^2. Berdasarkan penjelasan di atas, maka penaksir $V(\hat{X}\ )$ dirumuskan sebagai berikut:

$$\hat{V}(\hat{X}\ ) = M^2 \frac{M-m}{M}\frac{s_b^2}{m} + \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{m} N_i^2 \frac{(N_i - n_i)}{N_i}\frac{s_i^2}{n_i}$$

dimana

$$s_b^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\hat{X}_i - \hat{\hat{X}})^2$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

$\hat{X}_i = N_i\bar{x}_i$ merupakan penaksir total dari kelompok ke-i, $\bar{x}_i = \frac{x_i}{n_i}$ merupakan rata-rata sampel dari subsampel n_i, dan $\hat{\hat{X}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_i$ merupakan rata-rata sampel dari $\hat{X}_i, i = 1,2,..,m$.

Seperti telah diketahui bahwa s_i^2 merupakan varians dari x_{ij} dalam kelompok utama dari psu ke-i. Karena n_i adalah sampel acak dari N_i dan $\bar{x}_i$ adalah rata-rata sampel dari n_i, maka dapat diketahui bahwa s_i^2 adalah penaksir tak bias dari S_i^2 dan dinyatakan sebagai berikut:

$$E(s_i^2) = S_i^2$$

Varians antar psu (kelompok) dinotasikan dengan s_b^2, namun untuk s_b^2 ternyata bukan merupakan penaksir tak bias dari S_b^2. Hal ini dapat dilihat pada pembahasan dibawah ini.

$$E(s_b^2) = S_b^2 + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} N_i^2 \frac{(N_i - n_i)}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i}$$

Sebagaimana yang telah dikemukakan sebelumnya bahwa $E_j(s_i^2) = S_i^2$, namun $E_i(s_b^2) \neq S_b^2$, sehingga hal tersebut mengakibatkan S_b^2 tidak dapat ditaksir berdasarkan sampelnya yaitu s_b^2. s_b^2 didefinisikan sebagai berikut:

$$s_b^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{X}_i - \hat{\hat{X}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{X}_i - \frac{\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_i}{m}\right)^2$$

$$= \frac{1}{m-1}\cdot\frac{m}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{X}_i - \frac{1}{M}\frac{M}{m}\frac{\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_i}{m}\right)^2$$

$$s_b^2 = \frac{m}{m-1}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{X}_i - \frac{\hat{X}}{M}\right)^2 \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut:

$$\frac{m-1}{m}s_b^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\hat{X}_i - \frac{\hat{X}}{M}\right)^2$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\hat{X}_i^2 - 2\hat{X}_i\left(\frac{\hat{X}}{M}\right) + \left(\frac{\hat{X}}{M}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_i^2 - 2m\left(\frac{\hat{X}}{M}\right)^2 + m\left(\frac{\hat{X}}{M}\right)^2\right]$$

$$\frac{m-1}{m}s_b^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_i^2 - \left(\frac{\hat{X}}{M}\right)^2 \tag{3.10}$$

Selanjutnya menentukan nilai ekspektasi dari persamaan (3.10), diperoleh:

$$E\left(\frac{m-1}{m}s_b^2\right) = E_i\left(E_j\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{X}_i^2\right)\right) - E\left(\frac{\hat{X}}{M}\right)^2$$

$$= E_i\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}E_j\left(\hat{X}_i^2\right)\right) - \frac{E\left(\hat{X}^2\right)}{M^2}$$

$$= \frac{1}{m} . m . \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} E_j\left(\hat{X}_i^2\right) - \frac{E\left(\hat{X}^2\right)}{M^2}$$

$$E\left(\frac{m-1}{m} s_b^2\right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} E_j\left(\hat{X}_i^2\right) - \frac{E\left(\hat{X}^2\right)}{M^2}$$

Selanjutnya adalah menentukan $E_j\left(\hat{X}_i^2\right)$ dan $E\left(\hat{X}^2\right)$. Penentuan $E_j\left(\hat{X}_i^2\right)$ dan $E\left(\hat{X}^2\right)$ dapat dilakukan dengan menggunakan perumusan umum dari varians, yaitu:

$$E(\bar{x} - \bar{X})^2 = E(\bar{x}^2) - \bar{X}^2$$

$$E(\bar{x}^2) = E(\bar{x} - \bar{X})^2 + \bar{X}^2$$

Dengan menggunakan perumusan umum tersebut di atas, $E_j\left(\hat{X}_i^2\right)$ dapat dinyatakan dalam bentuk berikut ini.

$$\hat{X}_i = \hat{X}_i - X_i + X_i$$

$$\hat{X}_i^2 = \left(\hat{X}_i - X_i\right)^2 + X_i^2 + 2\left(\hat{X}_i - X_i\right)X_i$$

Pada ekspektasi bersyarat E_j sepanjang *j* dengan *i* dianggap konstan, akan diperoleh

$$E_j\left(\hat{X}_i^2\right) = E_j\left(\hat{X}_i - X_i\right)^2 + E_j(X_i^2) + 0$$

$$E_j\left(\hat{X}_i^2\right) = V_j\left(\hat{X}_i\right) + X_i^2$$

Namun $V_j\left(\hat{X}_i\right)$ tersebut merupakan varians untuk $\hat{X}_i$ pada kondisi sampling acak sederhana ketika *i* diasumsikan telah ditetapkan dan X_i konstan ketika diasumsikan nilai *i* telah ditetapkan. Oleh karena itu,

$$E_j\left(\hat{X}_i^2\right) = N_i^2 \frac{N_i - n_i}{N_i} \frac{S_i^2}{n_i} + X_i^2$$

Selanjutnya menentukan $E\left(\hat{X}^2\right)$ analog dengan $E_j\left(\hat{X}_i^2\right)$, akan diperoleh:

$$\hat{X} = \hat{X} - X + X$$

$$\hat{X}^2 = \left(\hat{X} - X\right)^2 + X^2 + 2(\hat{X} - X)X \qquad (3.11)$$

Selanjutnya menentukan ekspektasi pada kedua ruas persamaan (3.11) diperoleh

$$E\hat{X}^2 = E\left(\hat{X} - X\right)^2 + EX^2 + 0$$

$$= V\left(\hat{X}\right) + X^2$$

$$= M(M - m) \frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m} \sum_{i=1}^{M} N_i(N_i - n_i) \frac{S_i^2}{n_i} + X^2$$

Sehingga, pada akhirnya diperoleh bahwa

$$E\left(\frac{m-1}{m}s_b^2\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(N_i^2\,\frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i} + X_i^2\right)$$

$$-\left(\frac{1}{M}\right)^2\left[M(M-m)\frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{M}(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i} + X^2\right]$$

$$= \frac{1}{M}A + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i^2 - \left(\frac{1}{M}\right)^2\left[M(M-m)\frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m}A + X^2\right]$$

$$= \frac{1}{M}\left(1-\frac{1}{m}\right)A + \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}X_i^2 - \frac{X^2}{M^2}\right) - \frac{M-m}{M}\frac{S_b^2}{m}$$

$$= \frac{1}{M}\left(1-\frac{1}{m}\right)A + \left(\frac{M-1}{M}S_b^2\right) - \frac{M-m}{M}\frac{S_b^2}{m}$$

$$E\left(\frac{m-1}{m}s_b^2\right) = \frac{1}{M}\left(\frac{m-1}{m}\right)A + \frac{m-1}{m}S_b^2 \qquad (3.12)$$

dengan $A = \sum_{i=1}^{M} N_i^2\,\frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i}$.

Selanjutnya dengan mengeluarkan $\left(\frac{m-1}{m}\right)$ dari kedua ruas pada persamaan (3.12), akan diperoleh:

$$E(s_b^2) = \frac{1}{M}A + S_b^2$$

$$E(s_b^2) = S_b^2 + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} N_i^2\,\frac{N_i-n_i}{N_i}\frac{S_i^2}{n_i} \qquad (3.13)$$

Pembahasan selanjutnya yaitu mengenai pembuktian yang akan menunjukkan bahwa $\hat{V}(\hat{X})$ merupakan penaksir yang tak bias dari V($\hat{X}$). Seperti telah diketahui, bahwa $\hat{V}(\hat{X})$ harus merupakan penaksir tak bias dari $V(\hat{X})$, dengan kata lain harus memenuhi ketentuan berikut:

$$E\left[\hat{V}(\hat{X})\right] = V(\hat{X}) \qquad (3.14)$$

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa perumusan penaksir dari $V(\hat{X})$. Pada perumusan sebelumnya, penjumlahan bentuk kedua pada ruas kanan dijumlahkan sepanjang *m* bukan sepanjang *M*. Sebagaimana telah diketahui bahwa s_i^2 merupakan penaksir tak bias dari S_i^2, namun s_b^2 bukan merupakan penaksir tak bias dari S_b^2. Oleh karena itu, penaksir dari $V(\hat{X})$ tidak dapat diperoleh secara langsung dengan cara mengganti notasi-notasi dari S_b^2 dan S_i^2 dengan notasi-notasi s_b^2 dan s_i^2. Walaupun demikian, sebagaimana telah dikemukakan bahwa $\hat{V}(\hat{X})$ merupakan penaksir tak bias untuk $V(\hat{X})$. Oleh karena itu, harus dibuktikan bahwa $E\left(\hat{V}(\hat{X})\right) = V(\hat{X})$.

Ekspektasi dari $V(\hat{X})$ harus dipandang dalam dua tahapan yaitu ekspektasi yang berkaitan dengan tahapan pertama sampling dan ekspektasi bersyarat yang berkaitan dengan tahapan kedua sampling, dengan menganggap tahapan pertama psu konstan.

$$E\left(\hat{V}(\hat{X})\right) = M(M-m)\frac{E(s_b^2)}{m} + \frac{M}{m}E_i\left[E_j\left(\sum_{i=1}^{m} N_i(N_i-n_i)\frac{s_i^2}{n_i}\right)\right] \quad (3.15)$$

dengan E_j merupakan ekspektasi bersyarat sepanjang *j* dan menganggap psu ke-*i* konstan.

Untuk mempermudah pembuktian, ruas kanan persamaan (3.15) dibagi menjadi dua bagian, yaitu bagian I dan bagian II. Pertama-tama substitusikan persamaan sebelumnya pada bagian I ruas kanan persamaan (3.15), sehingga bagian I ruas kanan persamaan (3.15) menjadi:

$$M(M-m)\frac{1}{m}E(s_b^2) = M(M-m)\frac{1}{m}s_b^2 + (M-m)\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{M} N_i(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i} \quad (3.16)$$

Selanjutnya menentukan ekspektasi bersyarat dari sepanjang *j* dengan *i* dianggap konstan, dan kemudian ambil ekspektasi sepanjang *i* dari bagian II ruas kanan persamaan (3.15). Karena pemilihan ssu berasal dari sampel acak sederhana, dengan *i* dianggap konstan, maka $E_j(s_i^2)$ ekuivalen dengan penentuan ekspektasi untuk kasus sampel acak sederhana. Oleh karena itu, diketahui bahwa $E_j(s_i^2) = S_i^2$, sehingga bagian II ruas kanan dari persamaan (3.15) menjadi :

$$\frac{M}{m}E_i\left[E_j\left(\sum_{i=1}^{m} N_i(N_i-n_i)\frac{s_i^2}{n_i}\right)\right] = \frac{M}{m}m\,\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} N_i(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i}$$

$$\frac{M}{m}E_i\left[E_j\left(\sum_{i=1}^{m} N_i(N_i-n_i)\frac{s_i^2}{n_i}\right)\right] = \sum_{i=1}^{M} N_i(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i} \quad (3.17)$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (3.16) dan persamaan (3.17) pada persamaan (3.15), akan diperoleh:

$$E\left[\hat{V}(\hat{X})\right] = M(M-m)\frac{S_b^2}{m} + (M-m)\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{M} N_i(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i} + \sum_{i=1}^{M} N_i(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i}$$

$$= M(M-m)\frac{S_b^2}{m} + \frac{M}{m}\sum_{i=1}^{M} N_i(N_i-n_i)\frac{S_i^2}{n_i}$$

$E\left[\hat{V}\left(\hat{X}\right)\right] = V(\hat{X})$

Hal ini menunjukan bahwa $\hat{V}\left(\hat{X}\right)$ adalah penaksir tak bias dari $V\left(\hat{X}\right)$.

Sama halnya dengan *simple cluster sampling*, varians dari *three-satge cluster sampling* juga dibentuk dari dua komponen varians, yaitu varians diantara psu (S_b^2) dan varians dalam psu (S_i^2). Oleh karena itu, penaksir $V(\hat{X})$ *three-stage cluster sampling* dapat diperoleh dengan menggunakan penaksir-penaksir dari S_b^2, S_i^2 dan S_{ij}^2. Berdasarkan penjelasan di atas, maka penaksir $V(\hat{X})$ pada *three-stage sampling* dirumuskan sebagai berikut:

$$\hat{V}\left(\hat{X}\right) = L^2\ \frac{L-l}{L}\frac{s_b^2}{l} + \frac{L}{l}\sum_i^l M_i^2\ \frac{M_i-\bar{m}}{M_i}\frac{s_i^2}{\bar{m}} + \frac{L}{l}\sum_i^l \frac{M_i}{\bar{m}}\sum_j^{\bar{m}} N_{ij}^2\ \frac{N_{ij}-n_{ij}}{N_{ij}}\frac{s_{ij}^2}{n_{ij}}$$

$$s_b^2 = \frac{1}{l-1}\ \sum_i^l(\hat{X}_i - \hat{\hat{X}})^2$$

$$s_i^2 = \frac{1}{m_i-1}\sum_j^{m_i}\left(\hat{x}_{ij} - \bar{\bar{x}}_i\right)^2$$

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{n_{ij}-1}\sum_k^{n_{ij}}\left(x_{ijk} - \bar{\bar{\bar{x}}}_{ij}\right)^2$$

dimana,

x_{ijk} = merupakan sampel dari kelompok ke-k yang berada pada kelompok ke-j dan berada dalam kelompok ke-i

$\bar{\bar{\bar{x}}}_{ij}$ = $\frac{1}{n_{ij}}\sum_k^{n_{ij}} x_{ijk}$ merupakan rata-rata sampel dari $x_{ijk}, i = 1,2,\dots,l; j = 1,2,,\dots,\bar{m}\ dan\ k = 1,2,\dots,n_{ij}$

$\hat{X}_{ij}$ = $\frac{N_{ij}}{n_{ij}}\sum_j^{n_{ij}} x_{ijk}$=$N_{ij}\bar{\bar{\bar{x}}}_{ij}$ merupakan penaksir tak bias total dari kelompok ke-j yang berada dalam kelompok ke-i

$\hat{X}_i$ = $\frac{M_i}{\bar{m}}\sum_j^{\bar{m}} \hat{X}_{ij}$= $M_i\hat{\hat{\bar{X}}}_i$ merupakan penaksir tak bias total dari kelompok ke-i

$\hat{\hat{X}}_i$ = $\frac{1}{l}\sum_i^l \hat{X}_i$ merupakan rata-rata sampel dari $\hat{X}_i, i = 1,2,\dots,l$

$\hat{\hat{\bar{X}}}_i$ = $\frac{1}{\bar{m}}\ \sum_j^{\bar{m}} \hat{X}_{ij}$ merupakan rata-rata sampel dari $\hat{X}_{ij}, i = 1,2,\dots,l\ dan\ j = 1,2,\dots,\bar{m}$

Seperti telah diketahui bahwa s_i^2 merupakan varians dari x_{ij} dalam kelompok utama dari psu ke-i dan s_{ij}^2 merupakan varians dari x_{ijk} dalam kelompok dari psu ke-j yang berada dalam kelompok ke-i. Karena m_i adalah sampel acak dari M_i dan $\bar{\bar{x}}_i$ adalah rata-rata sampel dari m_i dan n_{ij} adalah sampel acak dari N_{ij} dan $\bar{\bar{\bar{x}}}_{ij}$ adalah rata- rata sampel dari n_{ij}, maka dapat diketahui bahwa s_i^2 dan s_{ij}^2 adalah penaksir tak bias dari S_i^2 dan S_{ij}^2 dinyatakan sebagai berikut:

$$E(s_i^2) = S_i^2$$

$$E(s_{ij}^2) = S_{ij}^2$$

Varians antar psu (kelompok) dinotasikan dengan s_b^2, namun untuk s_b^2 ternyata bukan merupakan penaksir tak bias dari S_b^2 sama halnya pada *simple cluster sampling*. Hal ini dapat dilihat pada pembahasan dibawah ini.

$$E(s_b^2) = S_b^2 + \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} M_i^2 \frac{(M_i - m_i)}{M_i}\frac{S_i^2}{m_i}$$

Seperti telah diketahui, bahwa $\hat{V}(\hat{X})$ harus merupakan penaksir tak bias dari $V(\hat{X})$, dengan kata lain harus memenuhi ketentuan berikut:

$$E\left[\hat{V}(\hat{X})\right] = V(\hat{X})$$

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa perumusan penaksir dari $V(\hat{X})$. Pada perumusan sebelumnya, penjumlahan bentuk kedua dan ketiga pada ruas kanan dijumlahkan sepanjang *l* dan *m* bukan sepanjang *L* dan *M*. Sebagaimana telah diketahui bahwa s_i^2 merupakan penaksir tak bias dari S_i^2, s_{ij}^2 merupakan penaksir tak bias dari S_{ij}^2namun s_b^2 bukan merupakan penaksir tak bias dari S_b^2. Oleh karena itu, penaksir dari $V(\hat{X})$ tidak dapat diperoleh secara langsung dengan cara mengganti notasi-notasi dari S_b^2, S_i^2 dan S_{ij}^2 dengan notasi-notasi s_b^2, s_i^2 dan s_{ij}^2.

Ekspektasi dari $V(\hat{X})$ harus dipandang dalam tiga tahapan yaitu ekspektasi yang berkaitan dengan tahapan pertama sampling, ekspektasi bersyarat yang berkaitan dengan tahapan kedua sampling dan ekspektasi bersyarat yang berkaitan dengan tahapan ketiga sampling dengan menganggap tahapan pertama psu konstan.

$$E\left(\hat{V}(\hat{X})\right) = L(L-l)\frac{E(s_b^2)}{l} + \frac{L}{l}E_i\left[E_j\left(\sum_i^l M_i^2 \frac{M_i-\bar{m}}{M_i}\frac{s_i^2}{\bar{m}}\right)\right] \quad (3.18)$$
$$+\frac{L}{l}E_i\left[E_j\left[E_k\left(\sum_i^l \frac{M_i}{\bar{m}}\sum_j^{\bar{m}} N_{ij}^2 \frac{N_{ij}-n_{ij}}{N_{ij}}\frac{s_{ij}^2}{n_{ij}}\right)\right]\right]$$

Dengan E_k merupakan ekspektasi bersyarat sepanjang k, E_j merupakan ekspektasi bersyarat sepanjang *j* dan menganggap psu ke-*i* konstan.

Untuk mempermudah pembuktian, ruas kanan persamaan (3.18) dibagi menjadi tiga bagian, yaitu bagian I, II dan bagian III. Pertama-tama substitusikan persamaan sebelumnya pada bagian I ruas kanan persamaan (3.18), sehingga bagian I ruas kanan persamaan (3.18) menjadi:

$$L(L-l)\frac{1}{l}E(s_b^2) = L(L-l)\frac{1}{l}S_b^2 + (L-l)\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{L} M_i^2 \frac{(M_i-m_i)}{M_i}\frac{S_i^2}{m_i} \quad (3.19)$$

Selanjutnya menentukan ekspektasi bersyarat dari sepanjang *j* dengan *i* dianggap konstan, dan kemudian ambil ekspektasi sepanjang *i* dari bagian II ruas kanan persamaan (3.37). Karena pemilihan ssu berasal dari sampel acak sederhana, dengan *i* dianggap konstan, maka $E_j(s_i^2)$ ekuivalen dengan penentuan ekspektasi untuk kasus sampel acak sederhana. Oleh karena itu, diketahui bahwa $E_j(s_i^2) = S_i^2$, sehingga bagian II ruas kanan dari persamaan (3.18) menjadi :

$$\frac{L}{l}E_i\left[E_j\left(\sum_i^l M_i\,(M_i-\bar{m})\frac{s_i^2}{\bar{m}}\right)\right] = \frac{L}{l}\,l\,\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} M_i(M_i-\bar{m})\frac{s_i^2}{\bar{m}}$$
$$\frac{L}{l}E_i\left[E_j\left(\sum_i^l M_i\,(M_i-\bar{m})\frac{s_i^2}{\bar{m}}\right)\right] = \sum_{i=1}^{L} M_i(M_i-\bar{m})\frac{S_i^2}{\bar{m}} \quad (3.19)$$

Selanjutnya menentukan ekspektasi bersyarat dari sepanjang *k* dengan *i*, *j* dianggap konstan, dan kemudian ambil ekspektasi sepanjang *i* dari bagian III ruas kanan persamaan (3.18). Karena pemilihan ssu berasal dari sampel acak sederhana, dengan *i* dianggap konstan, maka $E_k(s_{ij}^2)$ ekuivalen dengan penentuan ekspektasi untuk kasus sampel acak sederhana. Oleh karena itu, diketahui bahwa $E_k(s_{ij}^2) = S_{ij}^2$, sehingga bagian III ruas kanan dari persamaan (3.18) menjadi :

$$\frac{L}{l}E_i\left[E_j\left[E_k\left(\sum_i^l \frac{M_i}{\bar{m}}\sum_j^{\bar{m}} N_{ij}^2 \frac{N_{ij}-n_{ij}}{N_{ij}}\frac{s_{ij}^2}{n_{ij}}\right)\right]\right] = \frac{L}{l}\sum_i^L \frac{M_i}{\bar{m}}\sum_j^{\bar{m}} N_{ij}^2 \frac{N_{ij}-n_{ij}}{N_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{n_{ij}}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (3.18) dan persamaan (3.19) pada persamaan (3.18), akan diperoleh:

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{X}\right)\right] = L(L-l)\frac{1}{l}S_b^2 + (L-l)\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{L} M_i^2 \frac{(M_i-m_i)}{M_i}\frac{S_i^2}{m_i} + \sum_{i=1}^{L} M_i(M_i-\bar{m})\frac{S_i^2}{\bar{m}}$$

$$+\frac{L}{l}\sum_i^L \frac{M_i}{\bar{m}}\sum_j^{\bar{m}} N_{ij}^2 \frac{N_{ij}-n_{ij}}{N_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{n_{ij}}$$

$$= L(L-l)\frac{1}{l}S_b^2 + \frac{L}{l}\sum_{i=1}^{L} M_i(M_i-m_i)\frac{S_i^2}{m_i} + \frac{L}{l}\sum_i^L \frac{M_i}{\bar{m}}\sum_j^{\bar{m}} N_{ij}^2 \frac{N_{ij}-n_{ij}}{N_{ij}}\frac{S_{ij}^2}{n_{ij}}$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{X}\right)\right] = V(\hat{X})$$

Hal ini menunjukan bahwa $\hat{V}\left(\hat{X}\right)$ adalah penaksir tak bias dari $V\left(\hat{X}\right)$.

Sama halnya dengan *simple cluster sampling* dan *three-stage cluster sampling*, varians dari *four-stage cluster sampling* juga dibentuk dari dua komponen varians, yaitu varians diantara psu (S_b^2) dan varians dalam psu (S_i^2). Oleh karena itu, penaksir $V(\hat{X})$ *four-stage cluster sampling* dapat diperoleh dengan menggunakan penaksir-penaksir dari S_b^2, S_i^2, S_{ij}^2 dan S_{ijk}^2. Berdasarkan penjelasan di atas, maka penaksir $V(\hat{X})$ pada *four-stage sampling* dirumuskan sebagai berikut:

$$\hat{V}\left(\hat{X}\right) = T^2\frac{T-t}{T}\frac{s_b^2}{t} + \frac{T}{t}\sum_i^t L_i{}^2\frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{s_i^2}{\bar{l}} + \frac{T}{t}\sum_i^t \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}} M_{ij}^2\frac{M_{ij}-m_{ij}}{M_{ij}}\frac{s_{ij}^2}{m_{ij}}$$

$$+\frac{T}{t}\sum_i^t \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{m_{ij}} N_{ijk}^2\frac{N_{ijk}-n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{s_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

dimana,

$$s_b^2 = \frac{1}{t-1}\sum_i^t\left(\hat{X}_i - \hat{\bar{\bar{X}}}\right)^2$$

$$s_i^2 = \frac{1}{\bar{l}-1}\sum_j^{\bar{l}}\left(\hat{X}_{ij} - \hat{\bar{\bar{X}}}_i\right)^2$$

$$s_{ij}^2 = \frac{1}{m_{ij}-1}\sum_k^{m_{ij}}\left(\hat{X}_{ijk} - \hat{\bar{\bar{\bar{X}}}}_{ij}\right)^2$$

$$s_{ijk}^2 = \frac{1}{n_{ijk}-1}\sum_r^{n_{ijk}}\left(x_{ijkr} - \bar{\bar{\bar{x}}}_{ijk}\right)^2$$

Keterangan :

$x_{ijkr} =$ banyaknya sampel dari kelompok ke-r pada kelompok ke-k yang berapada dalam kelompok ke-j yang berada dalam kelompok ke-i

$\bar{\bar{\bar{x}}}_{ijk} = \frac{1}{n_{ijk}} \sum_{r}^{n_{ijk}} x_{ijkr}$ merupakan rata-rata sampel dari $x_{ijkr}, i = 1,2, \dots, t; j = 1,2, \dots, \bar{l}; k = 1,2, \dots, m_{ij}\ dan\ r = 1,2, \dots, n_{ijk}$

$\hat{X}_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{n_{ijk}} \sum_{r}^{n_{ijk}} x_{ijkr} = N_{ijk} \bar{\bar{\bar{x}}}_{ijk}$ merupakan penaksir tak bias total dari kelompok ke-k pada kelompok ke-j yang berada pada kelompok ke-i

$\hat{\bar{\bar{\bar{X}}}}_{ij} = \frac{1}{m_{ij}} \sum_{k}^{m_{ij}} \hat{X}_{ijk}$ merupakan rata-rata sampel dari $\hat{X}_{ijk}, i = 1,2, \dots, t; j = 1,2, \dots, \bar{l}\ dan\ k = 1,2, \dots, m_{ij}$

$\hat{X}_{ij} = \frac{M_{ij}}{m_{ij}} \sum_{k}^{m_{ij}} \hat{X}_{ijk} = M_{ij} \hat{\bar{\bar{\bar{X}}}}_{ij}$ merupakan penaksir tak bias total kelompok ke-j yang berada pada kelompok ke-i

$\hat{\bar{\bar{\bar{X}}}}_{i} = \frac{1}{\bar{l}} \sum_{j}^{\bar{l}} \hat{X}_{ij}$ merupakan rata-rata sampel dari $\hat{X}_{ij}, i = 1,2, \dots, t\ dan\ j = 1,2, \dots, \bar{l}$

$\hat{X}_{i} = \frac{L_i}{\bar{l}} \sum_{j}^{\bar{l}} \hat{X}_{ij} = L_i \hat{\bar{\bar{\bar{X}}}}_{i}$ merupakan penaksir tak bias total dari kelompok ke-i

Seperti telah diketahui bahwa s_i^2 merupakan varians dari x_{ij} dalam kelompok utama dari psu ke-*i*, s_{ij}^2 merupakan varians dari x_{ijk} dan s_{ijk}^2 merupakan varians dari x_{ijkr} dalam kelompok dari psu ke-k pada kelompok ke-*j* yang berada dalam kelompok ke-i. Karena $\bar{l}$ adalah sampel acak dari L_i dan $\bar{\bar{x}}_i$ adalah rata-rata sampel dari $\bar{l}$, m_{ij} adalah sampel acak dari M_{ij} dan $\bar{\bar{\bar{x}}}_{ij}$ adalah rata-rata sampel dari m_{ij} dan n_{ijk} adalah sampel acak dari N_{ijk} dan $\bar{\bar{\bar{x}}}_{ijk}$ adalah rata- rata sampel dari n_{ijk}, maka dapat diketahui bahwa s_i^2, s_{ij}^2 dan s_{ijk}^2 adalah penaksir tak bias dari S_i^2, S_{ij}^2 dan S_{ijk}^2 dinyatakan sebagai berikut:

$$E(s_i^2) = S_i^2$$
$$E(s_{ij}^2) = S_{ij}^2$$
$$E(s_{ijk}^2) = S_{ijk}^2$$

Varians antar psu (kelompok) dinotasikan dengan s_b^2, namun untuk s_b^2 ternyata bukan merupakan penaksir tak bias dari S_b^2 sama halnya pada *simple cluster* *sampling* dan *three-stage cluster sampling*. Hal ini dapat dilihat pada pembahasan dibawah ini.

$$E(s_b^2) = S_b^2 + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} L_i^2 \frac{(L_i-\bar{l})}{L_i}\frac{S_i^2}{\bar{l}}$$

Seperti telah diketahui, bahwa $\hat{V}(\hat{X})$ harus merupakan penaksir tak bias dari $V(\hat{X})$, dengan kata lain harus memenuhi ketentuan berikut:

$$E\left[\hat{V}(\hat{X})\right] = V(\hat{X})$$

Pada pembahasan sebelumnya telah diketahui bahwa perumusan penaksir dari $V(\hat{X})$. Pada perumusan sebelumnya, penjumlahan bentuk kedua, ketiga dan keempat pada ruas kanan dijumlahkan sepanjang *l, m* dan *n* bukan sepanjang *L, M* dan *N*. Sebagaimana telah diketahui bahwa s_i^2 merupakan penaksir tak bias dari S_i^2, s_{ij}^2 merupakan penaksir tak bias dari S_{ij}^2, s_{ijk}^2 merupakan penaksir tak bias dari S_{ijk}^2 namun s_b^2 bukan merupakan penaksir tak bias dari S_b^2. Oleh karena itu, penaksir dari $V(\hat{X})$ tidak dapat diperoleh secara langsung dengan cara mengganti notasi-notasi dari S_b^2, S_i^2, S_{ij}^2 dan S_{ijk}^2 dengan notasi-notasi s_b^2, s_i^2, s_{ij}^2 dan s_{ijk}^2.

Ekspektasi dari $V(\hat{X})$ harus dipandang dalam empat tahapan yaitu ekspektasi yang berkaitan dengan tahapan pertama sampling, ekspektasi bersyarat yang berkaitan dengan tahapan kedua sampling, ekspektasi bersyarat yang berkaitan dengan tahapan ketiga sampling dan ekspektasi bersyarat yang berkaitan dengan tahapan keempat sampling dengan menganggap tahapan pertama psu konstan.

$$\hat{V}(\hat{X}) = T^2\frac{T-t}{T}\frac{s_b^2}{t} + \frac{T}{t}\sum_i^t L_i{}^2\frac{L_i-\bar{l}}{L_i}\frac{s_i^2}{\bar{l}} + \frac{T}{t}\sum_i^t\frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}} M_{ij}^2\frac{M_{ij}-m_{ij}}{M_{ij}}\frac{s_{ij}^2}{m_{ij}}$$
$$+\frac{T}{t}\sum_i^t\frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{m_{ij}} N_{ijk}^2\frac{N_{ijk}-n_{ijk}}{N_{ijk}}\frac{s_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

$$E\left(\hat{V}(\hat{X})\right) = T(T-t)\frac{E(s_b^2)}{t} + \frac{T}{t}E_i\left[E_j\left(\sum_i^t L_i(L_i-\bar{l})\frac{s_i^2}{\bar{l}}\right)\right]$$
$$+\frac{T}{t}E_i\left[E_j\left[E_k\left(\sum_i^t\frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}} M_{ij}(M_{ij}-m_{ij})\frac{s_{ij}^2}{m_{ij}}\right)\right]\right]$$
$$+\frac{T}{t}E_i\left[E_j\left[E_k\left[E_r\left(\sum_i^t\frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{m_{ij}} N_{ijk}(N_{ijk}-n_{ijk})\frac{s_{ijk}^2}{n_{ijk}}\right)\right]\right]\right]$$

(3.20)

Dengan E_r merupakan ekspektasi bersyarat sepanjang *r*, E_k merupakan ekspektasi bersyarat sepanjang *k*, E_j merupakan ekspektasi bersyarat sepanjang *j* dan menganggap psu ke-*i* konstan.

Untuk mempermudah pembuktian, ruas kanan persamaan (3.20) dibagi menjadi empat bagian, yaitu bagian I, II, III dan bagian IV. Pertama-tama substitusikan persamaan sebelumnya pada bagian I ruas kanan persamaan (3.20), sehingga bagian I ruas kanan persamaan (3.20) menjadi:

$$T(T-t)\frac{1}{t}E(s_b^2) = T(T-t)\frac{1}{t}S_b^2 + T(T-t)\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{T} L_i\big(L_i-\bar{l}\big)\frac{S_i^2}{\bar{l}} \qquad (3.21)$$

Selanjutnya menentukan ekspektasi bersyarat dari sepanjang *j* dengan *i* dianggap konstan, dan kemudian ambil ekspektasi sepanjang *i* dari bagian II ruas kanan persamaan (3.20). Karena pemilihan ssu berasal dari sampel acak sederhana, dengan *i* dianggap konstan, maka $E_j(s_i^2)$ ekuivalen dengan penentuan ekspektasi untuk kasus sampel acak sederhana. Oleh karena itu, diketahui bahwa $E_j(s_i^2) = S_i^2$, sehingga bagian II ruas kanan dari persamaan (3.20) menjadi :

$$\frac{T}{t}E_i\left[E_j\left(\sum_i^t L_i\left(l_i-\bar{l}\right)\frac{s_i^2}{\bar{l}}\right)\right] = \frac{T}{t}\,t\,\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} L_i\big(L_i-\bar{l}\big)\frac{s_i^2}{\bar{l}}$$

$$\frac{T}{t}E_i\left[E_j\left(\sum_i^t L_i\left(l_i-\bar{l}\right)\frac{s_i^2}{\bar{l}}\right)\right] = \sum_{i=1}^{T} L_i\big(L_i-\bar{l}\big)\frac{s_i^2}{\bar{l}} \qquad (3.22)$$

Selanjutnya menentukan ekspektasi bersyarat dari sepanjang *k* dengan *i*, *j* dianggap konstan, dan kemudian ambil ekspektasi sepanjang *i* dari bagian III ruas kanan persamaan (3.20). Karena pemilihan ssu berasal dari sampel acak sederhana, dengan *i* dianggap konstan, maka $E_k\big(s_{ij}^2\big)$ ekuivalen dengan penentuan ekspektasi untuk kasus sampel acak sederhana. Oleh karena itu, diketahui bahwa $E_k\big(s_{ij}^2\big) = S_{ij}^2$, sehingga bagian III ruas kanan dari persamaan (3.20) menjadi :

$$\frac{T}{t}E_i\left[E_j\left[E_k\left(\sum_i^t \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}} M_{ij}\big(M_{ij}-m_{ij}\big)\frac{s_{ij}^2}{m_{ij}}\right)\right]\right] = \frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}\big(M_{ij}-m_{ij}\big)\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}}$$

Selanjutnya menentukan ekspektasi bersyarat dari sepanjang *r* dengan *i*, *j*,*k* dianggap konstan, dan kemudian ambil ekspektasi sepanjang *i* dari bagian IV ruas kanan persamaan (3.20). Karena pemilihan ssu berasal dari sampel acak sederhana, dengan *i* dianggap konstan, maka $E_r\big(s_{ijk}^2\big)$ ekuivalen dengan penentuan ekspektasi untuk kasus sampel acak sederhana. Oleh karena itu, diketahui bahwa $E_r\left(s_{ijk}^2\right) = S_{ijk}^2$, sehingga bagian IV ruas kanan dari persamaan (3.20) menjadi :

$$\frac{T}{t}E_i\left[E_j\left[E_k\left[E_r\left(\sum_i^t \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{\bar{l}}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{m_{ij}} N_{ijk}\left(N_{ijk}-n_{ijk}\right)\frac{s_{ijk}^2}{n_{ijk}}\right)\right]\right]\right]$$

$$= \frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}\left(N_{ijk}-n_{ijk}\right)\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (3.21) dan persamaan (3.22) pada persamaan (3.20), akan diperoleh:

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{X}\right)\right] = T(T-t)\frac{1}{t}S_b^2 + T(T-t)\frac{1}{t}\sum_{i=1}^T L_i\left(L_i-\bar{l}\right)\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \sum_{i=1}^T L_i\left(L_i-\bar{l}\right)\frac{S_i^2}{\bar{l}}$$

$$+\frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}\left(M_{ij}-m_{ij}\right)\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}}$$

$$+\frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}\left(N_{ijk}-n_{ijk}\right)\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

$$= T(T-t)\frac{1}{t}S_b^2 + \frac{T}{t}\sum_{i=1}^L L_i\left(L_i-\bar{l}\right)\frac{S_i^2}{\bar{l}} + \frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i} M_{ij}\left(M_{ij}-m_{ij}\right)\frac{S_{ij}^2}{m_{ij}}$$

$$+\frac{T}{t}\sum_i^T \frac{L_i}{\bar{l}}\sum_j^{L_i}\frac{M_{ij}}{m_{ij}}\sum_k^{M_{ij}} N_{ijk}\left(N_{ijk}-n_{ijk}\right)\frac{S_{ijk}^2}{n_{ijk}}$$

$$E\left[\hat{V}\left(\hat{X}\right)\right] = V(\hat{X})$$

Hal ini menunjukan bahwa $\hat{V}\left(\hat{X}\right)$ adalah penaksir tak bias dari $V\left(\hat{X}\right)$.

Sebelumnya telah didapat rumusan penaksir $V\left(\hat{X}\right)$ dari *simple cluster sampling, three-stage cluster sampling* dan *four-stage cluster sampling*. Untuk rumusan penaksir $V\left(\hat{X}\right)$ dari multistage random sampling dapat dilihat dari langkah-langkah yang sama dengan *simple cluster sampling*, *three-stage cluster sampling* dan *four-stage cluster sampling* juga. Varians dari *multistage random sampling* juga dibentuk dari dua komponen varians, yaitu varians diantara psu (S_b^2) dan varians dalam psu (S_i^2). Oleh karena itu, penaksir $V(\hat{X})$ *multistage random sampling* dapat diperoleh dengan menggunakan penaksir-penaksir dari S_b^2, S_i^2, S_{ij}^2, S_{ijk}^2,..., $S_{ij\dots n}^2$.