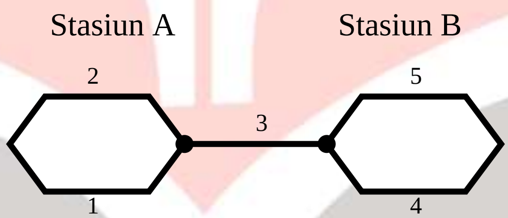
BAB III
DESKRIPSI DAN FORMULASI PERMASALAHAN

3.1 Deskripsi Permasalahan

Perjalanan kereta api didefinisikan sebagai kereta api yang bergerak dari stasiun asal ke stasiun tujuan melewati sejumlah rel. Setiap perjalanan diberikan waktu kedatangan awal. Selain itu, setiap perjalanan mempunyai waktu tinggal minimal dan maksimal di setiap rel yang digunakan. Untuk rel yang berada di stasiun, waktu tinggal merupakan waktu untuk menghentikan perjalanan kereta api di stasiun itu. Sedangkan, untuk rel yang tidak berada di stasiun, waktu tinggal adalah waktu tempuh kereta api di rel tersebut. Berdasarkan banyaknya kereta api yang ditugaskan dan kapasitas jalur yang tersedia, akan dibuat sebuah penjadwalan kereta api yang meminimalkan waktu keterlambatan.



Gambar 3.1 Contoh jalur kereta api antara Stasiun A dan Stasiun B (1, 2, 3, 4, dan 5 adalah rel yang terdapat sepanjang jalur antara Stasiun A dan Stasiun B)

3.2 Asumsi

Pada skripsi ini digunakan asumsi-asumsi berikut:

1. Jenis kereta api yang digunakan ada empat yaitu kereta kereta api lokal ekonomi, kereta api lokal patas, kereta api ekspres jarak jauh, dan kereta api ekonomi jarak jauh. Kecepatan masing-masing kereta api tergantung kepada jenis kereta api dan dianggap konstan, ini menyebabkan waktu tinggal di setiap rel berbeda-beda, baik di rel yang berada di dalam stasiun maupun di luar stasiun.
2. Jadwal perjalanan kereta api yang akan ditentukan adalah jadwal perjalanan untuk satu hari.

3. Tidak ada prioritas kereta api.

3.3 Model Matematika

Sebelum memodelkan permasalahan penjadwalan kereta api ini diperlukan beberapa definisi dari himpunan, parameter, dan variabel yang diperlukan. Model matematika yang digunakan dalam skripsi ini merupakan kajian dari Transportation research part B, 43:837-851 karangan Yusin Lee dan Chuen-Yih Chen pada tahun 2009.

3.3.1 Himpunan, Parameter, dan Variabel

a. Himpunan

K	:	Himpunan kereta api
B	:	Himpunan rel
S	:	Himpunan stasiun
B_k	:	Himpunan dari semua rel yang dilewati oleh kereta api *k*
B_s	:	Himpunan rel yang berada di stasiun
$B_k \backslash B_s$	:	Himpunan rel yang berada di luar stasiun

b. Parameter

$Trip_k$	:	Waktu minimal yang diperlukan oleh kereta api *k* untuk menyelesaikan perjalanan
T_{ik}^{min}	:	Waktu tinggal minimal untuk kereta api *k* pada rel *i*
T_{ik}^{max}	:	Waktu tinggal maksimal untuk kereta api *k* pada rel *i*
B_k^0	:	Rel pertama yang digunakan oleh kereta api *k*
B_k^F	:	Rel terakhir yang digunakan oleh kereta api *k*
B_{ik}^-	:	Rel yang digunakan oleh kereta api *k* sebelum menggunakan rel *i*
C_{ikl}	:	Selisih minimum antara kereta api *k* dan *l* saat menggunakan rel *i* secara berurutan

c. Variabel

$delay_k$: Total waktu keterlambatan untuk kereta api *k* (menit)

a_{ik} : Waktu ketika kereta api *k* memasuki rel *i* (menit)

d_{ik} : Waktu ketika kereta api *k* meninggalkan rel *i* (menit)

y_{ik} : Waktu keterlambatan kereta api *k* pada rel *i* (menit)

3.3.2 Fungsi Tujuan

Fungsi tujuan permasalahan ini adalah untuk meminimumkan waktu keterlambatan seluruh kereta api, sehingga dapat dirumuskan dalam fungsi berikut:

$$\text{Minimumkan } \sum_{k \in K} delay_k \tag{3.1}$$

3.3.3 Kendala – kendala

Adapun kendala-kendala yang harus dipenuhi terdiri dari:

1. Setiap kereta api *k* menempati rel *i* paling sedikit selama T_{ik}^{min}.

$$d_{ik} \geq a_{ik} + T_{ik}^{min} \qquad \forall i \in B_k, \forall k \in K \tag{3.2}$$

2. Jika kereta api *k* menggunakan rel *i* lebih dari T_{ik}^{max} kelebihan waktu tersebut dianggap sebagai keterlambatan.

$$d_{ik} \leq a_{ik} + y_{ik} + T_{ik}^{max} \qquad \forall i \in B_k, \forall k \in K \tag{3.3}$$

3. Aturan penggunaan satu rel oleh dua kereta pada saat yang bersamaan, sehingga harus ada selisih minimum waktu agar kedua kereta tidak bertabrakan.

$$a_{ik} - d_{il} \geq C_{ikl} \qquad \forall i \in B_k \backslash B_s,\ \forall\, k, l \in K \tag{3.4}$$

4. Waktu kereta api *k* meninggalkan rel yang telah digunakannya tepat sebelum memasuki rel *i* sama dengan waktu kereta api *k* memasuki rel *i*.

$$d_{B_{ik}^{-}k} = a_{ik} \qquad \forall i \in B_k, \forall k \in K \tag{3.5}$$

5. Waktu saat kereta api *k* meninggalkan jalur terakhir dikurangi waktu saat kereta api *k* memasuki jalur pertama sama dengan total keterlambatan kereta api *k* ditambah dengan waktu minimal yang diperlukan kereta api *k* untuk menyelesaikan perjalanan.

$$d_{B_k^F k} - a_{B_k^0 k} = delay_k + Trip_k \qquad \forall k \in K \tag{3.6}$$

6. Variabel bernilai non-negatif dan integer.

$$\begin{aligned} &a_{ik} \geq 0 \text{ dan integer} && \forall i \in B_j, \forall k \in K \\ &d_{ik} \geq 0 \text{ dan integer} && \forall i \in B_j, \forall k \in K \\ &y_{ik} \geq 0 \text{ dan integer} && \forall i \in B_j, \forall k \in K \\ &delay_k \geq 0 \text{ dan integer} && \forall k \in K \end{aligned} \tag{3.7}$$

Selengkapnya, model matematika dari masalah penjadwalan kereta api dirumuskan dalam model *integer programming* sebagai berikut:

Minimumkan $z = \sum_{k \in K} delay_k$

berdasar

$$\begin{aligned} &d_{ik} \geq a_{ik} + T_{ik}^{min} && \forall i \in B_k, \forall k \in K \\ &d_{ik} \leq a_{ik} + y_{ik} + T_{ik}^{max} && \forall i \in B_k, \forall k \in K \\ &a_{ik} - d_{il} \geq C_{ikl} && \forall i \in B_k \backslash B_s, \forall k, l \in K \\ &d_{B_{ik}^{-} k} = a_{ik} && \forall i \in B_k, \forall k \in K \\ &d_{B_k^F k} - a_{B_k^0 k} = delay_k + Trip_k && \forall k \in K \\ &a_{ik} \geq 0 \text{ dan integer} && \forall i \in B_j, \forall k \in K \\ &d_{ik} \geq 0 \text{ dan integer} && \forall i \in B_j, \forall k \in K \\ &y_{ik} \geq 0 \text{ dan integer} && \forall i \in B_j, \forall k \in K \\ &delay_k \geq 0 \text{ dan integer} && \forall k \in K \end{aligned}$$

3.4 Teknik Penyelesaian

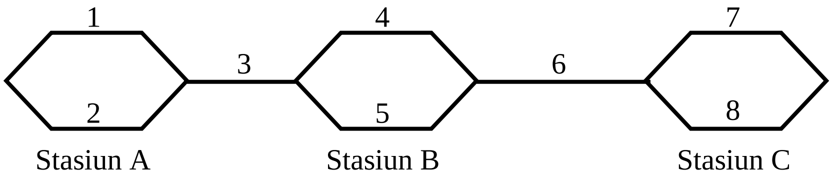
Teknik penyelesaian yang digunakan untuk menyelesaikan model *integer programming* di atas adalah menggunakan algoritma *branch and bound*. Pada bab sebelumnya telah dipaparkan mengenai algoritma *branch and bound*, berikut merupakan langkah-langkah algoritma *branch and bound* menurut Hartanto :

1. Selesaikan *integer programming* dengan metode simpleks biasa tanpa pembatasan bilangan bulat.

2. Teliti solusi optimumnya. Jika variabel basis yang diharapkan bulat, solusi optimum bulat telah tercapai. Jika satu atau lebih variabel basis yang diharapkan bulat ternyata tidak bulat, lanjutkan ke langkah 3.
3. Nilai solusi pecah yang layak dicabangkan ke dalam sub-sub masalah. Tujuannya adalah untuk menghilangkan solusi kontinyu yang tidak memenuhi persyaratan bulat dalam masalah itu. Pencabangan itu dilakukan melalui kendala-kendala *mutually exclusive* yang perlu untuk memenuhi persyaratan bulat dengan jaminan tidak ada solusi bulat layak yang tidak diikut sertakan.
4. Untuk setiap sub-masalah, nilai solusi optimum fungsi tujuan ditetapkan sebagai batas atas. Solusi bulat terbaik menjadi batas bawah (pada awalnya, ini adalah solusi kontinyu yang dibulatkan ke bawah). Sub-sub masalah yang memiliki batas atas kurang dari batas bawah yang ada, tidak diikut sertakan pada analisa selanjutnya. Suatu solusi bulat layak adalah sama baik atau lebih baik dari batas atas untuk setiap sub masalah yang dicari. Jika solusi yang demikian terjadi, suatu sub masalah dengan batas atas terbaik dipilih untuk dicabangkan.
5. Kembali ke langkah 3.

3.5 Contoh Kasus Sederhana

Berikut ini disajikan contoh kasus dalam masalah penjadwalan kereta api. Misalkan terdapat tiga stasiun yaitu Stasiun A, Stasiun B, dan Stasiun C. Masing-masing stasiun memiliki kapasitas dua rel dan antar stasiun dihubungkan oleh satu rel seperti disajikan dalam gambar berikut.



Gambar 3.2 Lintasan Kereta Api Stasiun A – Stasiun C

Dalam masalah penjadwalan ini terdapat dua jenis kereta yaitu kereta patas dan kereta ekonomi, kereta patas hanya berhenti di Stasiun A dan Stasiun C, sedangkan kereta ekonomi berhenti di Stasiun A, Stasiun B, dan Stasiun C. Terdapat 2 rangkaian kereta patas yaitu kereta 1 dan 2, dan terdapat 2 rangkaian kereta ekonomi yaitu kereta 3 dan 4. Kecepatan masing-masing kereta diasumsikan sama.

Sebelum memodelkan masalah penjadwalan kereta api ini ke dalam model matematika, perlu didefinisikan mengenai himpunan dan parameter dari permasalahan ini.

a. Himpunan

K	:	{1, 2, 3, 4}
B	:	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
S	:	{Stasiun A, Stasiun B, Stasiun C}
B_1	:	{1, 3, 4, 6, 7}
B_2	:	{7, 6, 4, 3, 1}
B_3	:	{2, 3, 5, 6, 8}
B_4	:	{8, 6, 5, 3, 2}
B_s	:	{1, 2, 4, 5, 7, 8}
$B_k \backslash B_s$	:	{3, 6}
K	:	{1, 2, 3, 4}
B	:	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
$Trip_1$	:	24
$Trip_2$	:	24
$Trip_3$	:	27
$Trip_4$	:	27
T_{ik}^{min}	:	Waktu tinggal minimal untuk kereta api *k* pada rel *i*
T_{ik}^{max}	:	Waktu tinggal maksimal untuk kereta api *k* pada rel *i*

Tabel 3.1 Waktu tinggal minimal untuk masing-masing kereta api pada setiap rel

Kereta \ Rel	1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	0	5	3	0	4	6	0
2	6	0	5	3	0	4	6	0
3	0	6	5	0	6	4	0	6
4	0	6	5	0	6	4	0	6

Tabel 3.2 waktu tinggal maksimal untuk masing-masing kereta api pada setiap rel

Kereta \ Rel	1	2	3	4	5	6	7	8
1	8	0	8	5	0	7	8	0
2	8	0	8	5	0	7	8	0
3	0	8	8	0	8	7	0	8
4	0	8	8	0	8	7	0	8

B_1^0 : $\{1\}$

B_2^0 : $\{7\}$

B_3^0 : $\{2\}$

B_4^0 : $\{8\}$

B_1^F : $\{7\}$

B_2^F : $\{1\}$

B_3^F : $\{8\}$

B_4^F : $\{2\}$

C_{ikl} : 5, $\forall i$ = 3 dan 4, $\forall i$ = 6

Model penjadwalan ini selanjutnya dapat diformulasikan ke dalam bentuk *integer programming* sebagai berikut.

Minimumkan $\sum_{k=1}^{4} delay_k$

Dengan kendala

1. $d_{ik} \geq a_{ik} + T_{ik}^{min} \qquad \forall i \in B_k, \forall k \in K$
    - Untuk kereta 1

      $d_{11} \geq a_{11} + 6$

      $d_{31} \geq a_{31} + 5$

      $d_{41} \geq a_{41} + 3$

      $d_{61} \geq a_{61} + 4$

      $d_{71} \geq a_{71} + 6$
    - Untuk kereta 2

      $d_{72} \geq a_{72} + 6$

      $d_{62} \geq a_{62} + 5$

      $d_{42} \geq a_{42} + 3$

      $d_{32} \geq a_{32} + 4$

      $d_{12} \geq a_{12} + 6$
    - Untuk kereta 3

      $d_{23} \geq a_{23} + 6$

      $d_{33} \geq a_{33} + 5$

      $d_{53} \geq a_{53} + 6$

      $d_{63} \geq a_{63} + 4$

      $d_{83} \geq a_{83} + 6$
    - Untuk kereta 4

      $d_{84} \geq a_{84} + 6$

      $d_{64} \geq a_{64} + 5$

      $d_{54} \geq a_{54} + 6$

      $d_{34} \geq a_{34} + 4$

      $d_{24} \geq a_{24} + 6$

2. $d_{ik} \leq a_{ik} + y_{ik} + T_{ik}^{max} \qquad \forall i \in B_k, \forall k \in K$
    - Untuk kereta 1

      $d_{11} \leq a_{11} + y_{11} + 8$

      $d_{31} \leq a_{31} + y_{31} + 8$

      $d_{41} \leq a_{41} + y_{41} + 5$

      $d_{61} \leq a_{61} + y_{61} + 7$

      $d_{71} \leq a_{71} + y_{71} + 8$
    - Untuk kereta 2

      $d_{72} \leq a_{72} + y_{72} + 8$

      $d_{62} \leq a_{62} + y_{62} + 8$

      $d_{42} \leq a_{42} + y_{42} + 5$

      $d_{32} \leq a_{32} + y_{32} + 7$

      $d_{12} \leq a_{12} + y_{12} + 8$
    - Untuk kereta 3

      $d_{23} \leq a_{23} + y_{23} + 8$

      $d_{33} \leq a_{33} + y_{33} + 8$

      $d_{53} \leq a_{53} + y_{53} + 8$

      $d_{63} \leq a_{63} + y_{63} + 7$

      $d_{83} \leq a_{83} + y_{83} + 8$
    - Untuk kereta 4

      $d_{84} \leq a_{84} + y_{84} + 8$

      $d_{64} \leq a_{64} + y_{64} + 8$

      $d_{54} \leq a_{54} + y_{54} + 8$

      $d_{34} \leq a_{34} + y_{34} + 7$

      $d_{24} \leq a_{24} + y_{24} + 8$

3. $a_{ik} - d_{il} \geq C_{ikl} \qquad \forall i \in B_k \backslash B_s, \forall k, l \in K$

- Untuk rel 3

$a_{34} - d_{33} \geq 5$

$a_{34} - d_{32} \geq 5$

$a_{34} - d_{31} \geq 5$

$a_{33} - d_{31} \geq 5$

$a_{32} - d_{33} \geq 5$

$a_{32} - d_{31} \geq 5$

- Untuk rel 6

$a_{63} - d_{61} \geq 4$

$a_{63} - d_{64} \geq 4$

$a_{63} - d_{62} \geq 4$

$a_{61} - d_{64} \geq 4$

$a_{61} - d_{62} \geq 4$

$a_{64} - d_{62} \geq 4$

4. $d_{B_{ik}^{-}k} = a_{ik} \qquad \forall i \in B_k, \forall k \in K$

- Untuk kereta 1

$d_{11} = a_{31}$

$d_{31} = a_{41}$

$d_{41} = a_{61}$

$d_{61} = a_{71}$

- Untuk kereta 2

$d_{72} = a_{62}$

$d_{62} = a_{42}$

$d_{42} = a_{32}$

$d_{32} = a_{12}$

- Untuk kereta 3

$d_{23} = a_{33}$

$d_{33} = a_{53}$

$d_{53} = a_{63}$

$d_{63} = a_{83}$

- Untuk kereta 4

$d_{84} = a_{64}$

$d_{64} = a_{54}$

$d_{54} = a_{34}$

$d_{34} = a_{24}$

5. $d_{B_k^F k} - a_{B_k^0 k} = delay_k + Trip_k \qquad \forall k \in K$

$d_{71} - a_{11} = delay_1 + 24$

$d_{12} - a_{72} = delay_2 + 24$

$d_{83} - a_{23} = delay_3 + 27$

$d_{24} - a_{11} = delay_4 + 27$

6. $a_{ik}, d_{ik}, y_{ik}, delay_k \geq 0$ dan integer $\quad \forall i \in B_j, \forall k \in K$

Model matematika di atas diselesaikan menggunakan *software* LINGO 10 dan menghasilkan fungsi objektif sebesar 44, ini berarti total keterlambatan seluruh kereta api adalah 44 menit. Kereta api 1 mengalami keterlambatan 8 menit, kereta api 2 terlambat 13 menit, kereta api 3 terlambat 8 menit, dan kereta api 4 terlambat 15 menit.

Berikut ini merupakan jadwal yang diperoleh menggunakan *software* LINGO 10:

Tabel 3.3 Jadwal Keberangkatan dari Stasiun A menuju Stasiun C

	A		**B**		**C**	
	Dat	**Ber**	**Dat**	**Ber**	**Dat**	**Ber**
	Menit ke-					
Patas 1	5	11	16	27	31	37
Ekonomi 1	10	21	26	35	39	45

Tabel 3.4 Jadwal Keberangkatan dari Stasiun C menuju Stasiun A

	C		**B**		**A**	
	Dat	**Ber**	**Dat**	**Ber**	**Dat**	**Ber**
	Menit ke-					
Patas 2	5	11	15	31	36	42
Ekonomi 2	10	19	23	41	46	52