BAB III

Seemingly Unrelated Regression (SUR) Spasial

3.1. *Seemingly Unrelated Regression (SUR)*

Seemingly Unrelated Regression (SUR) merupakan sebuah pengembangan dari model regresi linear yang terdiri dari beberapa persamaan regresi yang berhubungan karena galat antara persamaan yang berbeda saling berkorelasi. Setiap persamaan memiliki variabel dependen yang berbeda dan dimungkinkan memiliki himpunan variabel independen yang berbeda-beda. Model *Seemingly Unrelated Regression* (SUR) dengan $\boldsymbol{M}$ variabel dependen adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y_i} = \boldsymbol{X_i}\boldsymbol{\beta_i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}}\,; \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{M} \qquad (3.1)$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_M \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

dimana $\boldsymbol{M}$ menyatakan banyaknya variabel dependen, $\boldsymbol{N}$ menyatakan banyaknya observasi, $\boldsymbol{Y}$ menyatakan vektor pengamatan variabel dependen berukuran $(MN \times 1)$, $\boldsymbol{X}$ menyatakan matriks variabel independen berukuran $(MN \times k)$, $\boldsymbol{\beta}$ menyatakan vektor koefisien variabel independen berukuran $(k \times 1)$, dan ε menyatakan vektor galat berukuran $(MN \times 1)$.

3.1.1.Korelasi Kesebayaan (*contemporaneous correlation*)

Korelasi kesebayaan (*contemporaneous correlation*) merupakan ukuran hubungan antara galat dari $\boldsymbol{M}$ persamaan yang berbeda pada waktu yang sama (Dofour 2002, hlm 2). Uji SUR dapat dilakukan jika galat antara persamaan yang berbeda saling berkorelasi atau dengan kata lain terdapat korelasi kesebayaan (*contemporaneous correlation*) antara komponen $\boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{i}}$.

Pengujian korelasi kesebayaan dapat dilakukan dengan menggunakan statistik uji *lagrange multiplier*, sebagai berikut

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   H_0 : Tidak terdapat *contemporaneous correlation*

   H_1 : Terdapat *contemporaneous correlation*

2. STATISTIK UJI

$$\lambda = n \sum_{i=2}^{M} \sum_{j=1}^{i-1} R^2{}_{ij} \qquad (3.3)$$

Dimana n adalah jumlah observasi dan $R^2{}_{ij}$ adalah korelasi antar persamaan ke-i dan persamaan ke-j

3. KRITERIA PENGUJIAN

Menolak H_0 dan jika $\lambda > \chi^2$ $(df = m(m-1)$ dimana m adalah jumlah persamaan.

Menerima H_0 dan jika $\lambda < \chi^2$ $(df = m(m-1))$

3.2. Analisis Spasial

Analisis spasial adalah analisis yang digunakan untuk mendapatkan informasi pengamatan yang dipengaruhi efek ruang atau lokasi. Pengaruh efek lokasi atau spasial itu disajikan dalam bentuk koordinat lokasi atau pembobotan.

Berdasarkan tipe pembobotannya, analisis spasial dapat dibedakan menjadi analisis dengan pendekatan titik dan pendekatan area. Pendekatan titik adalah metode yang menggunakan informasi jarak (distance) sebagai pembobotnya. Sedangkan pendekatan area adalah menggunakan persinggungan antar lokasi yang berdekatan. Ukuran kedekatan bergantung pada pengetahuan tentang ukuran dan bentuk observasi unit yang digambarkan pada peta. (LeSage, 1999).

Jenis pemodelan spasial dengan pendekatan titik diantaranya adalah *Geographically Weighted Regression* (GWR), *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR), *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR), *Space-Time Autoregressive* (STAR), dan *Generalized Space Time Autregressive* (GSTAR). Menurut LeSage (2011), jenis pemodelan spasial dengan pendekatan area diantaranya adalah *Mixed Regressive-Autoregressive* atau *Spatial Autoregressive Models* (SAR), *Spatial Error Models* (SEM), *Spatial Durbin Model* (SDM), *Conditional Autoregressive Models* (CAR), *Spatial Autoregressive Moving Average* (SARMA), dan panel data.

3.2.1.Regresi Spasial

Regresi spasial merupakan suatu penggabungan metode regresi dengan memperhatikan efek spasial yang direpresentasikan dalam matriks pembobot spasial yang elemennya menunjukan adanya persinggungan wilayah ataupun kedekatan wilayah.

Persamaan umum regresi spasial adalah sebagai berikut

$$y = \rho \boldsymbol{W_1 y} + \boldsymbol{\beta X} + \boldsymbol{u} \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W_2 u} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.5}$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

Dengan $\boldsymbol{Y}$ merupakan vektor variabel dependen berukuran $N \times 1$, $\boldsymbol{X}$ merupakan matriks variabel independen dengan ukuran $N \times k$, $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor koefesien parameter regresi dengan ukuran $k \times 1$, $\boldsymbol{\rho}$ merupakan parameter koefesien spasial lag variabel dependen, λ merupakan parameter koefesien spasial lag pada *error*, $\boldsymbol{u}$ merupakan vektor *error* persamaan 3.4 berukuran $N \times 1$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan vektor *error* dari persamaan (3.5) berukuran $N \times 1$, $\boldsymbol{W}$ merupakan matriks pembobot dengan ukuran $N \times N$, n merupakan banyaknya pengamatan atau lokasi ($i = 1, 2, 3, \ldots, N$), k merupakan jumlah variabel independen, $\boldsymbol{I}$ merupakan matriks identitas dengan ukuran $N \times N$.

3.2.1.1.*Spatial Autoregressive Model (SAR)*

Menurut Anselin (1988), model *spatial autoregresive* atau juga biasa disebut dengan *spatial lag model* (SLM) adalah model yang mengkombinasikan model regresi sederhana dengan lag spasial pada variabel dependen dengan menggunakan data *cross section*. SLM terbentuk apabila $\boldsymbol{W_2} = 0$ dan $\lambda = 0$, sehingga model ini mengasumsikan bahwa proses *autoregressive* hanya pada variabel respon (Lee dan Yu, 2010).

Model umum *spatial lag model* (SLM) adalah sebagai berikut :

$$y = \rho \boldsymbol{W_1 y} + \boldsymbol{\beta X} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.6}$$

Dimana $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$.

Model pada persamaan (3.6) mengasumsikan bahwa proses *autoregressive* hanya pada variabel dependen. Pada persamaan (3.6) tersebut, variabel dependen y dimodelkan sebagai kombinasi linier dari daerah sekitarnya atau daerah yang berimpitan dengan y, tanpa adanya eksplanatori variabel yang lain.

3.2.1.2. *Spatial Error Model (SEM)*

Apabila nilai $\lambda \neq 0$ dan $\rho = 0$, maka model regresi spasial akan menjadi *spatial error model* (SEM) dengan bentuk persamaannya sebagai berikut:

$$y = \boldsymbol{\beta X} + \lambda \boldsymbol{W_2 y} + \boldsymbol{u} \quad (3.7)$$

dimana $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$.

$\lambda \boldsymbol{W_2 u}$ menunjukkan spasial terstruktur $\lambda \boldsymbol{W_2}$ pada *spasially dependent erro*r (ε). SEM merupakan model regresi linear yang pada peubah galatnya terdapat korelasi spasial.

3.2.2. Dependensi spasial

Dependensi spasial menggambarkan adanya hubungan fungsional apa yang terjadi pada suatu titik dalam ruang dan apa yang terjadi di tempat lain (Anselin, 1988). Dependensi spasial terjadi akibat adanya dependensi dalam data wilayah. Tobler I (1979) menyatakan bahwa segala sesuatu yang berhubungan dengan hal yang lain tetapi sesuatu yang lebih dekat mempunyai hubungan yang lebih besar. Penyelesaian yang dilakukan jika ada efek dependensi spasial adalah dengan pendekatan area.

Anselin (1988) menyatakan bahwa uji untuk mengetahui dependensi spasial dalam *error* suatu model adalah dengan menggunakan Morans'I dan *Langrange Multiplier* (LM).

3.2.2.1. Moran's *I*

Moran's I digunakan untuk melihat nilai autokorelasi spasial, yang mana digunakan untuk mengidentifikasi suatu lokasi dari pengelompokan spasial atau autokorelasi spasial. Menurut Lembo (2006) dalam Kartika (2007) autokorelasi spasial adalah korelasi antara variabel dengan dirinya sendiri berdasarkan ruang.

1. PENGUJIAN HIPOTESIS

   H_0 : $I_j = 0$ (tidak terdapat dependensi spasial)

   H_1 : $I_j \neq 0$ (terdapat dependensi spasial)

2. STATISTIK UJI (Clif dan Ord (1981) dalam Anselin (1988))

$$Z = \frac{I_j - E(I_j)}{\sqrt{Var(I_j)}} \tag{3.9}$$

dimana

$$I = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}} \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}(x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{3.10}$$

$$E(I) = I_0 = \frac{1}{n-1} \tag{3.11}$$

$$Var(I_j) = \frac{n^2 S_1 - nS_2 + 3S^2{}_0}{(n^2-1)S^2{}_0} \tag{3.12}$$

dimana

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}^{n}(W_{ji} + W_{ij})^2$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n}(W_{i0} + W_{0i})^2$$

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_{ij}$$

$$W_{i0} = \sum_{j=1}^{n} W_{ij}$$

$$W_{0i} = \sum_{j=1}^{n} W_{ji}$$

dengan x_i merupakan data variabel lokasi ke-i ($i = 1,2,\dots,n$); x_j merupakan data variabel lokasi ke-j ($j = 1,2,\dots,n$); $\bar{x}$ merupakan rata-rata data, $Var\ (I)$ merupakan varians moran's I, $E(I)$ merupakan nilai ekspetasi moran's I.

3. KRITERIA PENGUJIAN

Menolak H_0 jika $|Z_{hitung}| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$. nilai dari indeks I adalah antara -1 dan 1. Apabila $I > E(I_j)$, maka hal ini berarti nilai autokorelasi bernilai positif. hal ini mempunyai makna bahwa pola data berbentuk kelompok (*cluster)*. Apabila $I < E(I_j)$, maka hal ini berarti nilai autokorelasi bernilai negatif. hal ini mempunyai makna bahwa pola data menyebar, dan apabila $I = E(I_j)$, maka hal ini berarti tidak terdapat autokorelasi spasial.

3.2.2.2.*UJI Lagrange Multiplier* (LM)

Uji *lagrange multiplier* (LM) digunakan sebagai dasar untuk memilih model regresi spasial yang sesuai (LeSage, 2009: 156). Tahapan pertama pada uji LM ini adalah melakukan pembuatan model regresi sederhana melalui *ordinary least square* (OLS). Tahapan selanjutnya yaitu melakukan identifikasi keberadaan model spasial dengan menggunakan uji LM. apabila LM_{SEM} signifikan, maka hal ini mempunyai makna bahwa model yang sesuai adalah SEM *(spatial error model)*, dan apabila LM_{SLM} signifikan, hal ini mempunyai makna bahwa model yang sesuai adalah SLM *(spasial lag model).* apabila LM_{SEM} dan LM_{SLM} keduanya signifikan, maka hal ini mempunyai makna bahwa model yang sesuai adalah *spatial autoregressive moving average* (SARMA). Apabila LM_{error} dan LM_{lag} keduanya signifikan, proses selanjutnya yaitu melakukan uji *Robust Lagrange Multiplier*.

Berikut ini adalah pengujian *lagrange multiplier lag* (LM_{SLM})

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   $H_0 : \rho = 0$ (tidak ada dependensi spasial lag)

   $H_1 : \rho \neq 0$ (ada dependensi spasial lag)

2. STATISTIK UJI

$$LM_{SLM}: LM = \frac{\left(\frac{\varepsilon^T \boldsymbol{W_1 y}}{\sigma^2}\right)^2}{\left((\boldsymbol{W_1 X\beta})^T \boldsymbol{M}(\boldsymbol{W_1 X\beta})\boldsymbol{TS^2}\right)} \tag{3.13}$$

   dimana

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X^T X})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X^T}$$

$$T = tr\left[(\boldsymbol{W}_1 + \boldsymbol{W_1}^T)\boldsymbol{W_1}\right]$$

$$S^2 = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{n}$$

3. KRITERIA PENGUJIAN

   Menolak H_0, apabila $LM_{SLM} > \chi^2{}_{(\alpha,1)}$ atau $p - value < \alpha$. dimana matriks $\boldsymbol{W}_1$ adalah matriks pembobot pada persamaan (3.4).

   Seperti telah dikemukakan sebelumnya bahwa uji *lagrange multiplier error* (LM_{SEM}) digunakan untuk mengidentifikasi model SEM. Berikut ini adalah pengujian *lagrange multiplier lag* (LM_{SLM})

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   $H_0 : \lambda = 0$ (tidak ada dependensi spasial error)

   $H_1 : \lambda \neq 0$ (ada dependensi spasial error)

2. STATISTIK UJI

$$LM_{SEM}: LM = \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{\varepsilon^T \boldsymbol{W_2 y}}{\sigma^2}\right) \sim \chi^2 \tag{3.14}$$

dimana matriks $\boldsymbol{W}_2$ adalah matriks pembobot pada persamaan (3.5), $T \; = tr\left[(\boldsymbol{W}_2 + \boldsymbol{W_2}^T) * \boldsymbol{W_2}\right]$, dan $\sigma^2 = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{n}$.

3. KRITERIA PENGUJIAN

Menolak H_0 apabila $LM_{SLM} > \chi^2{}_{(\alpha,1)}$ atau $p - value < \alpha$.

3.2.3. Heterogenitas Spasial (*Spatial Heterogenity*)

Efek heterogenitas adalah efek yang menunjukkan adanya keragaman antar lokasi. Oleh karena itu, setiap lokasi mempunyai struktur dan parameter hubungan yang berbeda. pengujian efek heterogenitas spasial dapat diketahui dengan menggunakan uji *breusch-pagan* (BP *test*). Perumusan hipotesis pada uji *breusch-pagan* (BP *test*) adalah sebagai berikut:

H_0 : $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = \cdots = \sigma_n{}^2$ (Homokedastisitas)

H_1 : paling tidak ada satu $\sigma_i{}^2 \neq \sigma_J{}^2,$ dimana $i \neq j$ (Heterokedastisitas)

Statistik uji yang digunakan pada uji *Breusch-Pagan* adalah sebagai berikut (Anselin, 1988):

$$BP = \left(\frac{1}{2}\right) f^T Z (Z^T Z)^{-1} Z^T f \qquad (3.15)$$

Dengan f merupakan vektor berukuran $n \times 1$ dengan elemennya adalah $(\varepsilon_i{}^2 / \sigma^2) - 1$; ε_i merupakan *error* observasi ke$-i$ dari hasil estimasi regresi dengan menggunakan ols; σ^2 merupakan varians yang diperoleh berdasarkan *error* ols; dan Z merupakan matriks berukuran $n \times (p+1)$ dengan elemennya merupakan variabel perdiktor yang telah dinormalstandarkan.

Kriteria pengujian pada–uji *breusch-pagan* (bp *test*) adalah menolak H_0, apabila $BP > \chi^2{}_{(P_j+1,\alpha)}$ atau $p - value < \alpha$.

3.2.4. Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot spasial (W) adalah unsur penting dalam menggambarkan kedekatan antara suatu area dengan area lain dan ditentukan berdasarkan informasi atau kedekatan antara suatu area dengan area lain (neighborhood). Matriks pembobot spasial (W) dapat diketahui berdasarkan jarak atau persinggungan (*contiguity*) antara satu area ke area yang lain. (LeSage, 1999). Terdapat beberapa macam persinggungan (*contiguity*) antara lain sebagai berikut.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{13} & w_{23} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & w_{ij} & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & w_{n3} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

1. *Linear Contiguity* (Persinggungan Tepi)

   Metode ini mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk area yang berada di tepi kiri maupun kanan dari area yang mendapatkan perhatian dan $W_{ij} = 0$ untuk area lainnya.
2. *Rook Contiguity* (Persinggungan Sisi)

   Metode ini mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk area yang bersinggungan sisi dengan area yang mendapatkan perhatian dan $W_{ij} = 0$ untuk area lainnya.
3. *Bhisop Contiguity* (Persinggungan Sudut)

   Metode ini mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk area yang titik sudutnya bertemu dengan area yang mendapatkan perhatian dan $W_{ij} = 0$ untuk area lainnya.
4. *Double Linear Contiguity* (Persinggungan Dua Tepi)

   Metode ini mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk dua entity area yang berada di tepi kiri maupun kanan dari area yang mendapatkan perhatian dan $W_{ij} = 0$ untuk area lainnya.
5. *Double Rook Contiguity* (Persinggungan Dua Sisi)

   Metode ini mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk dua entity area yang berada di tepi kiri, kanan, selatan, maupun utara dari area yang mendapatkan perhatian dan $W_{ij} = 0$ untuk area lainnya.
6. *Queen Contiguity* (Persinggungan Sisi-Sudut)

   Metode ini mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk area yang bersisian atau titik sudutnya bertemu dengan area yang mendapatkan perhatian dan $W_{ij} = 0$ untuk lokasi lainnya
7. *Customize Contiguity*

Metode ini mendefinisikan $W_{ij} = 1$ untuk area yang bersisian atau area dengan karakterisrik yang sama dengan area yang mendapatkan perhatian dan $W_{ij} = 0$ untuk lokasi lainnya.

3.3. *Seemingly Unrelated Regression* (SUR) Spasial

SUR spasial pada dasarnya memiliki kesamaan spesifikasi dengan model SUR yang ditambahkan efek spasial pada setiap persamaannya (Mur dan Lopez, 2010). Istilah SUR spasial diperkenalkan pertama kali oleh Anselin (1988) dengan mengacu pada model *space-time.* Karakteristik model SUR spasial ini yaitu adanya heterogenitas yang terbatas, sehingga koefesien regresi diasumsikan sama untuk setiap individu.

Model umum SUR spasial adalah sebuah model dengan struktur autoregresif yang terdapat pada persamaan utama ataupun *error*. Model SUR yang struktur *autoregresif*nya terdapat pada persamaan model dan komponen *error*nya disebut model SUR-SARAR (*spasial autoregresif autoregresif*). Model SUR spasial yang struktur *autoregresif*nya hanya terdapat pada persamaan modelnya saja disebut model SUR-SLM (*spatial lag model*), sedangkan model SUR spasial yang struktur *autoregresif*nya hanya terdapat pada komponen *error*nya saja disebut model SUR-SEM (*spatial error model).*

3.3.1. Model SUR-SARAR

Model SUR-SARAR merupakan suatu bentuk pengembangan dari model SUR yang mengakomodasi adanya efek spasial yang terdapat pada model. Model SUR-SARAR merupakan model SUR dimana struktur *autoregresif*nya terdapat pada persamaan model dan juga pada komponen *error*. Model umum SUR-SARAR adalah sebagai berikut (Mur dan Lopez, 2010) :

$$y = \rho_j \boldsymbol{W_1 y_j} + \boldsymbol{\beta X_j} + \boldsymbol{u_j} \qquad (3.16)$$

$$\boldsymbol{u_j} = \lambda_j \boldsymbol{W_2 u_j} + \boldsymbol{\varepsilon_j} \qquad (3.17)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

Persamaan (3.16) dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

$$y \quad = \rho_j \boldsymbol{W_1 y_j} + \boldsymbol{\beta X_j} + \boldsymbol{u_j}$$

$$\boldsymbol{y} - \rho_j \boldsymbol{W_1} \boldsymbol{y_j} \quad = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{X_j} + \boldsymbol{u_j}$$

$$(\boldsymbol{I} - \rho_j \boldsymbol{W_1}) \boldsymbol{y_j} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{X_j} + \boldsymbol{u_j}$$

$$\boldsymbol{A} \boldsymbol{y_j} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{X_j} + \boldsymbol{u_j} \qquad ; \ \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{I} - \rho_j \boldsymbol{W_1}\right) \tag{3.18}$$

Persamaan (3.17) dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{u_j} = \lambda_j \boldsymbol{W_2} \boldsymbol{u_j} + \boldsymbol{\varepsilon_j}$$

$$\boldsymbol{u_j} - \lambda_j \boldsymbol{W_2} \boldsymbol{u_j} = \boldsymbol{\varepsilon_j}$$

$$(\boldsymbol{I} - \lambda_j \boldsymbol{W_2}) \boldsymbol{u_j} = \boldsymbol{\varepsilon_j}$$

$$\boldsymbol{B} \boldsymbol{u_j} = \boldsymbol{\varepsilon_j} \qquad ; \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{I} - \lambda_j \boldsymbol{W_2}\right) \tag{3.19}$$

Persamaan (3.18) dan persamaan (3.19) dapat dinyatakan sebagai persamaan tunggal berikut ini.

$$\boldsymbol{A} \boldsymbol{y_j} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{X_j} + \boldsymbol{u_j}$$

$$\boldsymbol{B} \boldsymbol{u_j} = \boldsymbol{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I}) \tag{3.20}$$

dengan keterangan bentuk-bentuk matriks sebagai berikut:

- $y = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$
- $\boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T$
- $\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1 \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n]^T$
- $X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nm} \end{bmatrix}$
- $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \\ \vdots \\ \beta_l \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{A} = [I_{mn} - \Gamma \otimes \boldsymbol{W}]$
- $\boldsymbol{B} = [I_{mn} - \Lambda \otimes \boldsymbol{W}]$

dimana Γ dan Λ merupakan matriks diagonal berukuran $m \times n$ yang masing-masing berisi parameter ρ dan λ. Seperti halnya pada model SUR nilai Ω pada model SUR spasial ditentukan dalam perumusan berikut ini.

$$\Omega = \Sigma \otimes I = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nm} \end{bmatrix} \otimes I \tag{3.21}$$

Estimasi parameter pada model SUR-SARAR dilakukan dengan menggunakan pendekatan *maximum likelihood* (ML) (Mur dan Lopez, 2010). Fungsi $ln-likelihood$ dari *error* pada persamaan (3.20) sebagai berikut.

$$\ln \mathrm{L}(y;\theta) = -\frac{MN}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2} ln|\Sigma| + \sum_{j=1}^{m} ln|\boldsymbol{A_j}| + \sum_{j=1}^{m} ln|\boldsymbol{B_j}| - \frac{(Ay-\beta X)^T B^T \Omega^{-1} \mathrm{B}(Ay-\beta X)}{2} \quad (3.22)$$

dengan $\theta = \{\beta, \Sigma, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ merupakan vektor dari parameter dan $\Omega^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes I$.

3.3.2. Model SUR-SLM

Model SUR-SLM (*Spatial error model*) merupakan bentuk khusus dari SUR-SARAR dimana struktur *autoregresif*nya hanya terdapat pada persamaan utamanya saja dan model SUR-SLM dipilih pada saat nilai $\lambda_j = 0$. Model SUR-SLM secara umum dirumuskan sebagai berikut (Mur dan Lopez,2010)

$$\boldsymbol{Ay_j} = \boldsymbol{\beta X_j} + \boldsymbol{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I}) \quad (3.23)$$

dengan struktur komponen seperti yang telah dikemukakan pada pembahasan sebelumnya. Fungsi $ln-likelihood$ dari *error* persamaan (3.23) sebagai berikut

$$\ln \mathrm{L}(y;\theta) = -\frac{MN}{2}\ln(2\pi) - \frac{M}{2} ln|\Sigma| + \sum_{j=1}^{m} ln|\boldsymbol{A_j}| - \frac{(Ay-\beta X)^T \Omega^{-1} \mathrm{B}(Ay-\beta X)}{2} \quad (3.24)$$

dengan $\theta = \{\beta, \Sigma, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m\}$ merupakan vektor dari parameter dan $\Omega^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes I$

3.3.3. Model SUR-SEM

MODEL SUR-SEM merupakan bentuk khusus dari SUR-SARAR dimana struktur autoregresif hanya terdapat pada komponen *error*nya saja. Model SUR-SEM secara umum Dirumuskan sebagai berikut (Mur dan Lopez, 2010)

$$\boldsymbol{y_j} = \boldsymbol{\beta X_j} + \boldsymbol{u_j}$$

$$\boldsymbol{Bu_j} = \boldsymbol{\varepsilon_j}, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I}) \quad (3.25)$$

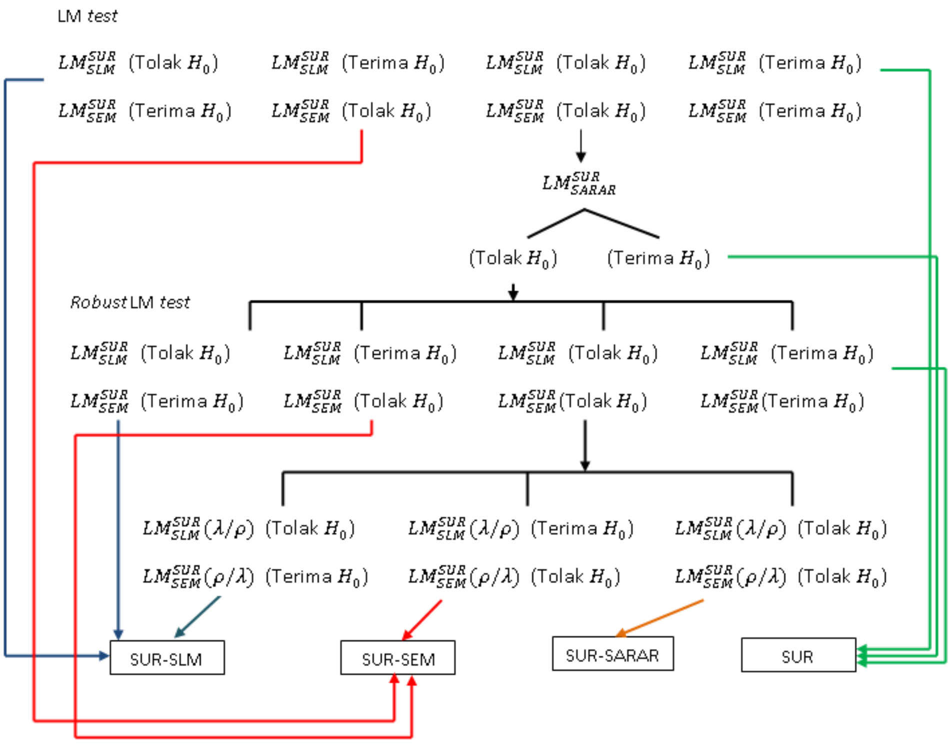
dengan struktur komponennya seperti yang telah dikemukakan pada pembahasan sebelumnya. Fungsi $ln-likelihood$ dari *error* persamaan (3.25) sebagai berikut.

$$\ln \mathrm{L}(y;\theta) = -\frac{MN}{2}\ln(2\pi) - \frac{N}{2} ln|\Sigma| + \sum_{j=1}^{m} ln|\boldsymbol{B_j}| - \frac{(Ay-\beta X)^T B^T \Omega^{-1} \mathrm{B}(Ay-\beta X)}{2} \quad (3.26)$$

dengan $\theta = \{\beta, \Sigma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ merupakan vektor dari parameter dan $\Omega^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes I$

3.4. Pengujian Efek Spasial pada Model SUR

Perbedaan dari ketiga jenis model SUR spasial tersebut terletak pada bagian efek spasialnya, apakah bagian pengamatan efek spasialnya tersebut terdapat pada persamaan utama, ataukah terdapat pada komponen *error*, atau terdapat pada keduanya yaitu pada persamaan utama dan komponen *error*nya. Untuk mengetahui apakah efek spasial pada model SUR tersebut terletak pada persamaan utama, ataukah terletak pada komponen *error*, atau terletak pada keduanya perlu dilakukan pengujian terhadap model SUR dengan menggunakan uji *lagrange multiplier* (LM), uji *robust lagrange multiplier* dan uji *marginal lagrange* (mur dan lopez, 2010). Adapun prosedur pengujian sur-spasial ditunjukan dalam diagram berikut.



Gambar 3.3 Alur pengujian SUR-Spasials

Tahapan pengujian yang pertama kali dilakukan pada prosedur pengujian SUR-spasial ini adalah pengujian untuk mengetahui keberadaan efek spasial. Uji yang digunakan pada pengujian ini adalah uji *lagrange multiplier* (LM) untuk penentuan model SUR-SLM dan model SUR-SEM .

Berikut ini adalah uji *lagrange multiplier* (LM) untuk SUR-SLM (LM_{SLM}^{SUR}) (Mur dan Lopez, 2010)

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   H_0 : $\rho = 0$ (tidak ada efek spasial lag)

   H_1 : $\rho \neq 0$ (ada efek spasial lag)

2. STATISTIK UJI

$$LM_{SLM}^{SUR} = g^T{}_{(\rho|H_0)}\left[I_{\rho\rho} - I_{\rho\beta}I^{-1}{}_{\beta\beta}I_{\beta\rho}\right]^{-1} g^T{}_{(\rho|H_0)} \sim \chi^2(2M) \qquad (3.27)$$

3. KRITERIA PENGUJIAN

   Persamaan (3.27) asimtotik dengan distribusi $\chi^2(2M)$ sehingga H_0 ditolak jika $LM_{SLM}^{SUR} > \chi^2(2M)$.

Berikut ini adalah uji *lagrange multiplier* (LM) untuk SUR-SEM (LM_{SEM}^{SUR}) (Mur dan Lopez, 2010)

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   H_0 : $\lambda = 0$ (tidak ada efek spasial pada komponen *error*)

   H_1 : $\lambda \neq 0$ (ada efek spasial pada komponen *error*)

2. STATISTIK UJI

$$LM_{SEM}^{SUR} = g^T{}_{(\lambda|H_0)}[I_{\lambda\lambda}]^{-1} g^T{}_{(\lambda|H_0)} \sim \chi^2(2M) \qquad (3.28)$$

3. KRITERIA PENGUJIAN

   Persamaan (3.28) asimtotik dengan distribusi $\chi^2(2M)$ sehingga H_0 ditolak jika $LM_{SEM}^{SUR} > \chi^2(2M)$.

Apabila pada pengujian LM_{SLM}^{SUR} dan LM_{SEM}^{SUR} memperoleh hasil hipotesis H_0 nya diterima, yang mempunyai makna bahwa tidak terdapat efek spasial pada model SUR dan apabila pada pengujian LM_{SLM}^{SUR} dan LM_{SEM}^{SUR} memperoleh hasil hipotesis H_0 nya ditolak maka pengujian dilanjutkan dengan pengujian LM_{SARAR}^{SUR}.

Berikut ini adalah uji *lagrange multiplier* (LM) untuk SUR-SARAR (LM_{SARAR}^{SUR}) (Mur dan Lopez, 2010)

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   H_0 : $\lambda = 0$ dan $\rho = 0$ (tidak ada efek spasial pada komponen *error* dan lag)

   H_1 : $\lambda \neq 0$ dan $\rho \neq 0$ (ada efek spasial pada komponen *error* dan lag)

2. STATISTIK UJI

$$LM_{SARAR}^{SUR} = \left[g^T{}_{(\lambda|H_0)} \quad g^T{}_{(\lambda|H_0)}\right] \begin{bmatrix} I_{\rho\rho} - I_{\rho\beta} I^{-1}{}_{\beta\beta} I_{\beta\rho} & I_{\rho\lambda} \\ I_{\lambda\rho} & I_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g^T{}_{(\lambda|H_0)} \\ g^T{}_{(\rho|H_0)} \end{bmatrix} \sim \chi^2(2M) \quad (3.29)$$

Dengan

$g_{(\lambda|H_0)} = \varepsilon^T \left[\left(\Sigma^{-1} E^{mm}\right) \otimes \boldsymbol{W}\right] \boldsymbol{y}$ dimana $m = 1,2, \dots M$

$g_{(\rho|H_0)} = \varepsilon^T \left[\left(\Sigma^{-1} E^{mm}\right) \otimes \boldsymbol{W}\right] \boldsymbol{\varepsilon}$ dimana $m = 1,2, \dots M$

dimana $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan vektor *error* model SUR tanpa efek spasial berukuran $mn \times 1$ dan $\boldsymbol{I}$ merupakan matriks identitas berukuran $m \times m$.

3. KRITERIA PENGUJIAN

   Persamaan (3.29) asimtotik dengan distribusi $\chi^2(2M)$ sehingga H_0 ditolak jika $LM_{SARAR}^{SUR} > \chi^2(2M)$.

Apabila pada pengujian LM_{SARAR}^{SUR} H_0 diterima, maka hal ini mempunyai makna bahwa model yang sesuai adalah SUR dengan efek spasial yang dapat diabaikan. Sedangkan apabila diperoleh hasil pengujian LM_{SARAR}^{SUR} yaitu H_0 ditolak, maka tahapan selanjutnya yaitu melakukan pengujian *robust LM*.

Berikut ini adalah uji *robust lagrange multiplier* (LM) untuk SUR-SLM ($LM^{*}{}_{SLM}^{SUR}$) (Mur dan Lopez, 2010)

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   H_0 : $\rho = 0$ (tidak ada efek spasial lag)

   H_1 : $\rho \neq 0$ (ada efek spasial lag)

2. STATISTIK UJI

$$LM_{SLM}^{SUR} = \left[g_{(\lambda|H_0)} - I_{\lambda\rho\cdot\varphi} I^{-1}{}_{\rho\cdot\varphi} g_{(\rho|H_0)}\right]^T \left[I_{\rho\cdot\varphi} - I_{\lambda\rho\cdot\varphi} I^{-1}{}_{\rho\cdot\varphi} I_{\lambda\rho\cdot\varphi}\right]^{-1} \left[g_{(\lambda|H_0)} - I_{\lambda\rho\cdot\varphi} I^{-1}{}_{\rho\cdot\varphi} g_{(\rho|H_0)}\right] \sim \chi^2(M) \quad (3.30)$$

3. KRITERIS PENGUJIAN

   Persamaan (3.30) asimtotik dengan distribusi $\chi^2(M)$ sehingga H_0 ditolak jika $LM^{*}{}_{SLM}^{SUR} > \chi^2(M)$.

Berikut ini adalah uji *robust lagrange multiplier* (LM) untuk SUR-SEM ($LM^{*}{}_{SEM}^{SUR}$) (Mur dan Lopez, 2010)

1. PERUMUSAN HIPOTESIS

   H_0 : $\lambda = 0$ (tidak ada efek spasial pada komponen *error*)

   H_1 : $\lambda \neq 0$ (ada efek spasial pada komponen *error*)

2. STATISTIK UJI

$$LM^{*SUR}_{SEM} = \left[g_{(\rho|H_0)} - I_{\lambda\rho\cdot\varphi}I^{-1}{}_{\rho\cdot\varphi}g_{(\lambda|H_0)}\right]^T \left[I_{\lambda\cdot\varphi} - I_{\lambda\rho\cdot\varphi}I^{-1}{}_{\lambda\cdot\varphi}I_{\lambda\rho\cdot\varphi}\right]^{-1} \left[g_{(\rho|H_0)} - I_{\lambda\rho\cdot\varphi}I^{-1}{}_{\lambda\cdot\varphi}g_{(\lambda|H_0)}\right] \sim \chi^2(M) \qquad (3.31)$$

3. KRITERIA PENGUJIAN

   Persamaan (3.31) asimtotik dengan distribusi $\chi^2(M)$ sehingga H_0 ditolak jika $LM_{SEM}^{SUR} > \chi^2(M)$.

Dimana

$$I_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} X^T\Omega^{-1}X & 0 \\ 0 & \frac{N}{2}tr\left[\Sigma^{-1}E^{ij}E^{sr}\right] \end{bmatrix} \text{ dimana } i, j, s, r = 1,2, \dots M$$

$$I_{\varphi\lambda} = \begin{bmatrix} X^T\left[I_T \otimes \Sigma^{-1}E^{mm} \otimes W\right]X\beta \text{ dimana } m = 1,2, \dots, M \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{\varphi\rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{\lambda\lambda} = [\sigma^{ms}(\beta^T X^T[I_T \otimes E^{ms} \otimes (W^T W)]\sigma_{ms} tr(W^T W)] + (N\ trW^2)I_m \text{ dimana } g, s = 1,2, \dots, M$$

$$I_{\rho\rho} = N\ tr(W^T W)[\{\sigma^{ms}\sigma_{ms}\} + I_m]$$

$$I_{\rho\lambda} = N\left(tr(W^T W\right) + tr(WW))[\sigma^{ms}\sigma_{ms}] \text{ dimana } m, s = 1,2, \dots, M$$

3.5. Metode Analisis

Adapun metode dan tahapan analisis yang digunakan dalam memodelkan kemiskinan di Provinsi Jawa Barat adalah sebagai berikut.

1. Melakukan deskripsi variabel sebagai gambaran awal kemiskinan di Provinsi Jawa Barat beserta dengan faktor- faktor yang diduga mempengaruhi kemiskinan di provinsi jawa barat.
2. Mengidentifikasi pola hubungan antara variabel dependen dan variabel independen.
3. Melakukan standarisasi data.
4. Melakukan pemodelan dengan regresi linear berganda.
5. Menentukan matriks pembobot spasial dengan menggunakan pembobot *costumsize contiguity*.
6. Melakukan pengujian aspek spasial (heterogenitas spasial dan dependensi spasial)
7. Melakukan pemodelan spasial dengan menggunakan uji *Lagrange Multiplier* (LM).
8. Melakukan pemodelan dengan pendekatan SUR-Spasial

9. Menginterpretasikan model SUR-Spasial.