BAB III

FUNGSI KUASIKONVEKS

Bab ini akan membahas tentang fungsi kuasikonveks, di mana fungsi ini adalah salah satu generalisasi dari fungsi konveks. Fungsi kuasikonveks yang dibahas pada bab ini didefinisikan pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Pembahasan fungsi kuasikonveks ini lebih banyak mengacu kepada Cambini dan Martein (2009).

Selain membahas definisi fungsi kuasikonveks di $\mathbb{R}^n$, bab ini juga akan membahas sifat-sifat yang berlaku dalam fungsi kuasikonveks. Sebagai generalisasi dari fungsi konveks, fungsi kuasikonveks tentunya memiliki sifat-sifat yang memiliki kemiripan dengan fungsi konveks. Dengan kata lain, terdapat sifat-sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Kategori sifat-sifat yang akan dibahas pada bab ini mengacu kepada Greenberg dan Pierskalla (1970).

3.1 Hubungan Fungsi Konveks, *Epigraph*, dan Himpunan Level Bawah

Sebelum membahas fungsi kuasikonveks, kita ingat kembali definisi dari fungsi konveks yang telah dibahas pada bab sebelumnya. Yaitu fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

untuk semua $\lambda \in [0,1]$ dan $x, y \in S$.

Terkait dengan fungsi konveks, berikut ini akan disajikan definisi mengenai *epigraph* sebagai berikut.

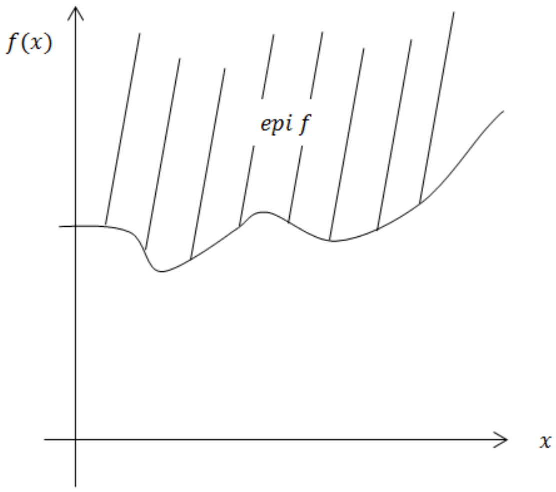
Definisi 3.1.1 (Boyd, Vandenberghe, 2002, hlm. 61)

Epigraph dari fungsi $f: S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ himpunan konveks, didefinisikan sebagai

$$epi\ f = \{(x,z) | f(x) \leq z\}$$

dengan $x \in S$ dan $z \in \mathbb{R}$.

Dalam bahasa Yunani 'Epi' berarti 'di atas'. Jadi, *epigraph* berarti 'di atas grafik'. Dengan kata lain, *epigraph* dari fungsi f adalah himpunan dari semua titik yang berada di atas f.



Gambar 3.1 Epigraph dari $f(x)$.

Fungsi konveks dapat ditandai oleh *epigraph* yang konveks, seperti ditunjukkan oleh teorema berikut ini.

Teorema 3.1.1 (Cambini, Martein, 2009, hlm. 12)

Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika $epi\ f$ himpunan konveks.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui f konveks.

Misal $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in epi\ f$, maka $f(x_1) \leq z_1$ dan $f(x_2) \leq z_2$.

Karena f konveks, maka

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$\leq \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2$$

untuk setiap $\lambda \in [0,1]$.

Dari ketaksamaan di atas, dapat dilihat bahwa

$$\lambda(x_1, z_1) + (1 - \lambda)(x_2, z_2) \in epi\ f.$$

Jadi, terbukti $epi\ f$ himpunan konveks.

(⇐) Diketahui $epi\ f$ himpunan konveks dan misalkan $x_1, x_2 \in S$.

Misal $\big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_2)\big) \in epi\ f$, maka

$$\lambda\big(x_1, f(x_1)\big) + (1 - \lambda)\big(x_2, f(x_2)\big)$$

$$= \big(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)\big) \in epi\ f$$

untuk setiap $\lambda \in [0,1]$.

Karena

$$\big(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)\big) \in epi\ f,$$

maka

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

untuk setiap $\lambda \in [0,1]$.

Artinya, f konveks. ■

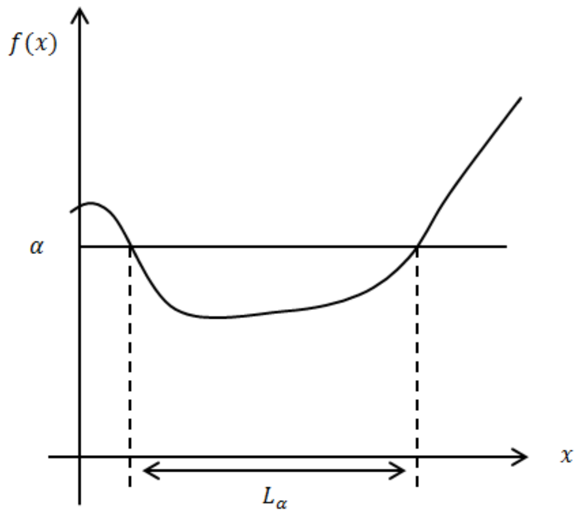
Selain *epigraph*, terkait dengan fungsi konveks juga didefinisikan himpunan level bawah sebagai berikut.

Definisi 3.1.2 (Giorgi, Guerraggio, dan Thierfelder, 2004, hlm. 118)

Himpunan level bawah dari fungsi $f: S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ himpunan konveks, didefinisikan sebagai

$$L_\alpha = \{x | x \in S, f(x) \leq \alpha\},$$

untuk sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$.



Gambar 3.2 Himpunan level bawah.

Sehubungan dengan himpunan level bawah dari fungsi konveks, diberikan teorema berikut ini.

Teorema 3.1.2 (Cambini, Martein, 2009, hlm. 12)

Jika $f: S \to \mathbb{R}$ adalah fungsi konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, maka L_α konveks untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Diketahui f konveks. Misalkan $x, y \in L_\alpha$, artinya $f(x) \leq \alpha$ dan $f(y) \leq \alpha$.

Berdasarkan Definisi 2.6.2 jika f konveks, maka kita punya

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \\
&\leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha \\
&= \alpha.
\end{aligned}
$$

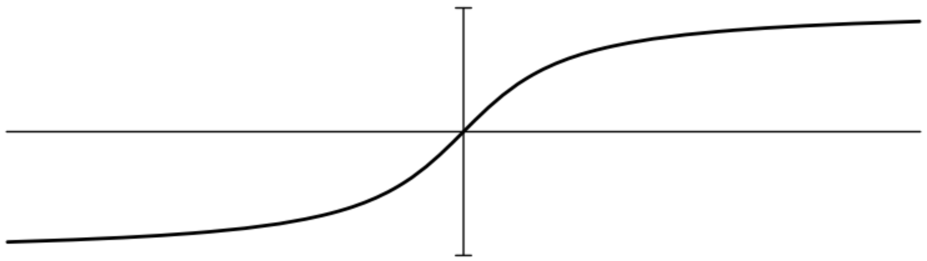
Dari ketaksamaan di atas, didapat bahwa $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in L_\alpha$.

Jadi, terbukti L_α konveks. ■

Teorema 3.1.2 tidak berlaku sebaliknya. Kondisi yang diperlukan agar fungsi f menjadi konveks di Teorema 3.1.2 pada umumnya tidak cukup. Berikut adalah contoh fungsi tidak konveks yang memiliki himpunan level bawah yang konveks.

Contoh 3.1.1

$f(x) = \tan^{-1} x = \arctan x$ bukan fungsi konveks (dapat dilihat dari grafik fungsinya),



Gambar 3.3 Grafik fungsi $f(x) = \tan^{-1} x = \arctan x$.

tetapi himpunan level bawahnya

$$L_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \alpha \leq -\frac{\pi}{2}, \\ (-\infty, \tan\alpha], & \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \mathbb{R}, & \alpha \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

semua konveks.

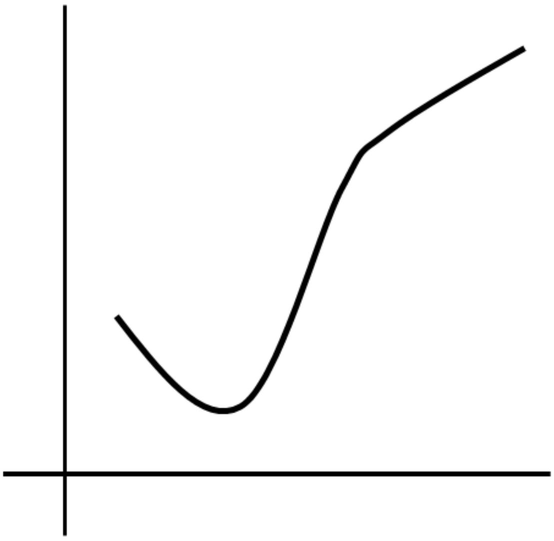
Jadi, fungsi konveks tidak dapat ditandai oleh himpunan level bawah yang konveks. Himpunan level bawah yang konveks menspesifikasikan kelas fungsi yang lebih luas, yaitu fungsi kuasikonveks.

3.2 Fungsi Kuasikonveks

Berikut ini akan dibahas salah satu fungsi yang merupakan generalisasi dari fungsi konveks, yaitu fungsi kuasikonveks. Fungsi ini akan dibahas secara geometri dan aljabar sebagai berikut.

Definisi 3.2.1 (Cambini, Martein, 2009, hlm. 23)

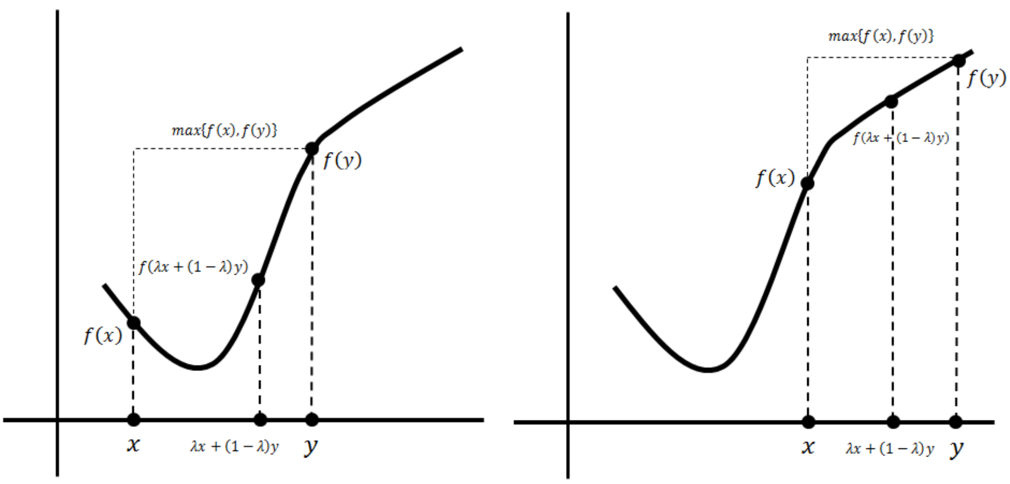
Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika grafik dari fungsinya selalu berada di bawah maksimum dari sebarang dua titik di fungsinya.



Gambar 3.4 Grafik fungsi kuasikonveks.

Definisi di atas dapat diterjemahkan secara aljabar seperti yang akan dijelaskan sebagai berikut.

Salah satu cara untuk menggeneralisasi fungsi konveks adalah dengan memperlonggar kondisi yang dibutuhkan fungsi tersebut agar menjadi konveks. Ingat kembali definisi fungsi konveks secara geometri, fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika setiap segmen garis di antara dua titik di grafiknya selalu berada di atas grafik fungsi tersebut. Jika kita perlonggar definisi fungsi konveks tersebut untuk $f: S \to \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$, dengan hanya membutuhkan grafik dari fungsinya berada di bawah nilai maksimum dari sebarang dua titik di fungsinya, seperti ilustrasi di bawah ini.



Gambar 3.5 Grafik fungsi kuasikonveks.

Misal kita ambil sebarang titik x dan y, $f(x)$ adalah nilai fungsi f di titik x dan $f(y)$ adalah nilai fungsi f di titik y dengan $f(x) \leq f(y)$, artinya $f(y)$ adalah nilai maksimum fungsinya. $\lambda x + (1-\lambda)y$ adalah kombinasi linear dari titik x dan y, di mana λ adalah bilangan riil dari 0 sampai 1. $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ adalah nilai fungsi f di titik $\lambda x + (1-\lambda)y$.

Berdasarkan gambar di atas, f kuasikonveks jika nilai fungsi dari kombinasi linear titik x dan y lebih kecil sama dengan nilai maksimumnya. Dengan demikian definisi fungsi kuasikonveks dapat ditulis ulang sebagai berikut.

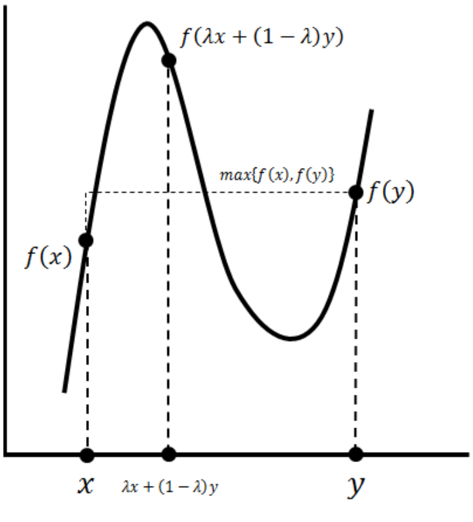
Definisi 3.2.2 (Cambini dan Martein, 2009, hlm. 24)

Misal $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq maks\{f(x), f(y)\}$$

untuk setiap $x, y \in S$ dan $\lambda \in [0,1]$.

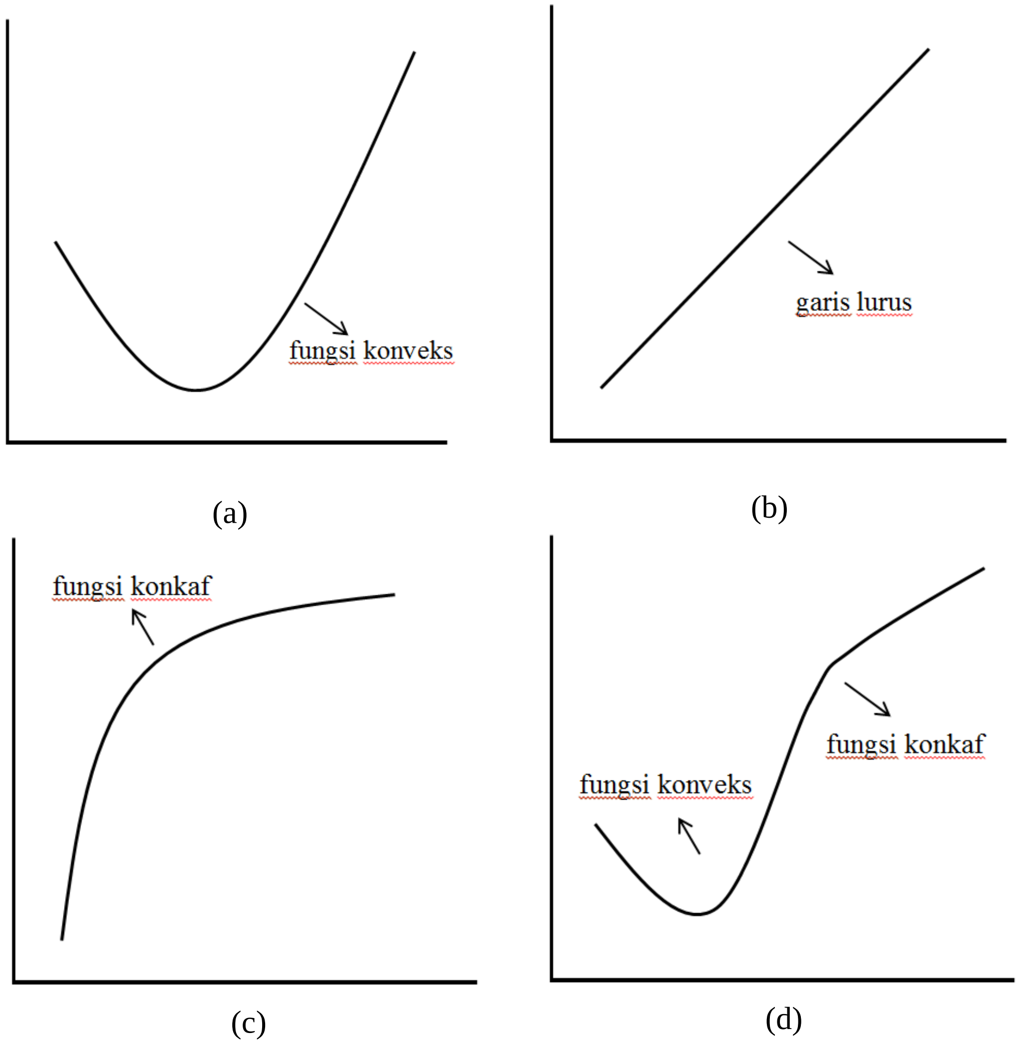
Gambar di bawah ini merupakan contoh fungsi yang bukan kuasikonveks karena nilai fungsi dari kombinasi linear dari x dan y, $f(\lambda x + (1-\lambda)y)$, ada yang melebihi nilai maksimumnya, yaitu $f(y)$.



Gambar 3.6 Grafik fungsi bukan kuasikonveks.

f dikatakan kuasikonkaf jika $-f$ kuasikonveks. Jika f adalah kuasikonveks dan kuasikonkaf, maka f adalah kuasilinear. (Boyd dan Vandenberghe, 2002, hlm. 95)

Dari dua definisi di atas, kita dapat menggambarkan macam-macam grafik fungsi kuasikonveks sebagai berikut.



Gambar 3.7 Berbagai macam bentuk grafik fungsi kuasikonveks.

Ke empat gambar di atas merupakan grafik fungsi kuasikonveks. Dapat kita lihat di gambar (a), grafik fungsi kuasikonveksnya juga merupakan grafik dari fungsi konveks. Gambar (b) menunjukkan bahwa grafik fungsi berbentuk garis lurus juga merupakan fungsi kuasikonveks. Dari gambar (c), dapat dilihat bahwa grafik fungsi kuasikonveksnya juga merupakan grafik dari fungsi konkaf. Dan dari gambar (d), grafik fungsi kuasikonveknya menunjukkan bahwa fungsi kuasikonveks dapat mengandung fungsi konveks dan fungsi konkaf.

Jadi, fungsi kuasikonveks dapat berupa fungsi konveks, garis lurus, fungsi konkaf, atau pun gabungan dari fungsi konveks dan konkaf. Itu adalah keistimewaan dari fungsi kuasikonveks.

Berikut ini akan dijelaskan lebih lanjut mengenai hubungan fungsi kuasikonveks dengan fungsi konveks. Hubungan antara ke dua fungsi tersebut akan dijelaskan melalui teorema di bawah ini.

Teorema 3.2.1 (Cambini dan Martein, 2009, hlm. 25)

Jika fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ konveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$, maka f kuasikonveks di S.

Bukti:

Diketahui f konveks, artinya

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Ketaksamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\, max\{f(x), f(y)\} + (1-\lambda)\, max\{f(x), f(y)\}.$$

Misal

$$f(x) \geq f(y) \text{ atau } max\{f(x), f(y)\} = f(x),$$

maka

$$\begin{aligned}\lambda\, max\{f(x), f(y)\} + (1-\lambda)\, max\{f(x), f(y)\} &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) \\ &= \lambda f(x) + f(x) - \lambda f(x) \\ &= f(x) \\ &= max\{f(x), f(y)\}.\end{aligned}$$

Artinya

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

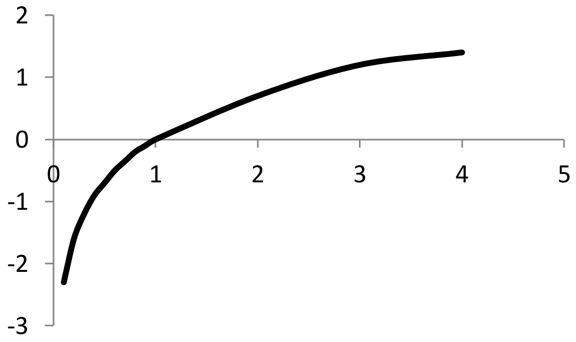
untuk setiap $\lambda \in [0,1]$.

Jadi, terbukti fungsi f kuasikonveks.■

Berdasarkan Teorema 3.2.1, diketahui bahwa jika f konveks maka f kuasikonveks. Teorema ini tidak berlaku sebaliknya, karena terdapat fungsi kuasikonveks yang tidak konveks. Berikut ini adalah salah satu contoh fungsi kuasikonveks yang bukan merupakan fungsi konveks.

Contoh 3.2.1

$f(x) = \ln x$ dengan $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kuasikonveks, namun bukan fungsi konveks.



Gambar 3.9 Grafik fungsi $f(x) = \ln x$.

Dari gambar di atas terlihat jelas bahwa fungsi $f(x) = \ln x$ merupakan fungsi kuasikonveks namun bukan fungsi konveks.

3.3 Hubungan Fungsi Kuasikonveks dengan Himpunan Level Bawah

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa fungsi konveks dapat ditandai oleh *epigraph* yang konveks. Berikut ini akan dijelaskan bahwa fungsi kuasikonveks dapat ditandai oleh himpunan level bawah yang konveks. Seperti yang akan ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema 3.3.1 (Cambini, Martein, 2009, hlm. 26)

Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dikatakan kuasikonveks pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika himpunan level bawahnya, yaitu

$$L_\alpha = \{x | f(x) \leq \alpha\},$$

konveks untuk setiap $x \in S$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui f kuasikonveks.

Misal $x, y \in L_\alpha$, artinya $f(x) \leq \alpha$ dan $f(y) \leq \alpha$, maka kita punya

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha.$$

Sehingga, $\lambda x + (1-\lambda)y \in L_\alpha$.

Jadi, terbukti L_α himpunan konveks.

($\Leftarrow$) Diketahui L_α konveks.

Tanpa menghilangkan keumuman, asumsikan $max\{f(x), f(y)\} = f(x)$ dan pandang bentuk himpunan level bawah L_α dengan $\alpha = f(x)$, yaitu

$$L_{f(x)} = \{u | f(u) \leq f(x)\}.$$

Jelas, $y \in L_{f(x)}$.

Karena $L_{f(x)}$ konveks,

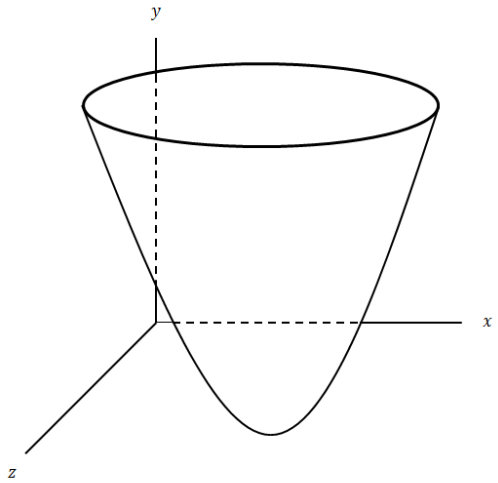
$$x + \lambda(y - x) \in L_{f(x)}$$

untuk semua $\lambda \in [0,1]$, yaitu

$$f\big(x + \lambda(y - x)\big) \leq f(x) = max\{f(x), f(y)\}.$$

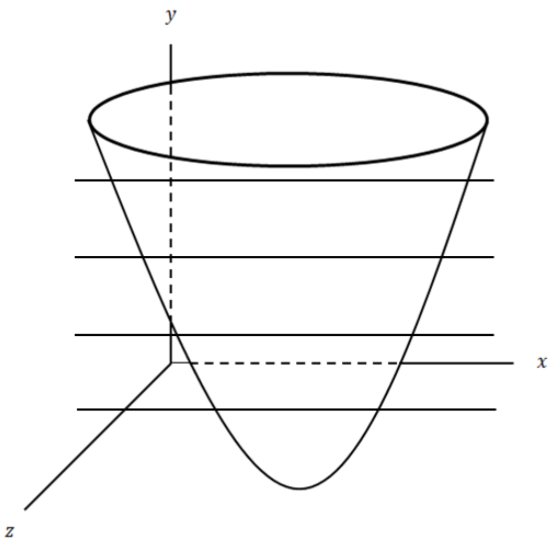
Jadi, terbukti fungsi f kuasikonveks.■

Secara geometri, Teorema 3.3.1 dapat digambarkan sebagai berikut. Misalkan terdapat sebuah bentuk gunung terbalik yang merupakan himpunan level bawah yang terdefinisi di ruang berdimensi tiga seperti gambar di bawah ini.



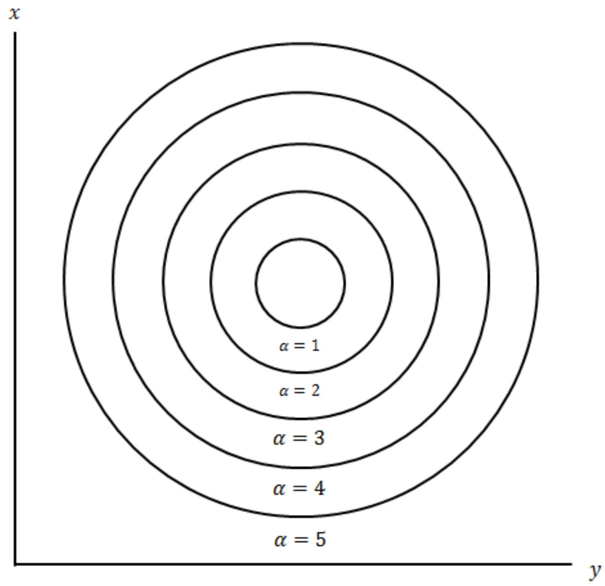
Gambar 3.10 *Contour Map* himpunan level bawah di ruang berdimensi tiga.

Bentuk di atas jelas merupakan fungsi kuasikonveks. Kemudian, kita potong bentuk di atas secara horizontal dimulai dari bagian yang paling rendah seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.11 Membagi menjadi 5 bagian sama besar secara horizontal.

Lalu, jika kita melihat bentuk gunung terbalik yang telah dipotong dari atas, maka bentuk tersebut dapat digambarkan di ruang berdimensi dua seperti gambar di bawah ini.



Gambar 3.12 *Level Curve* himpunan level bawah di ruang berdimensi dua.

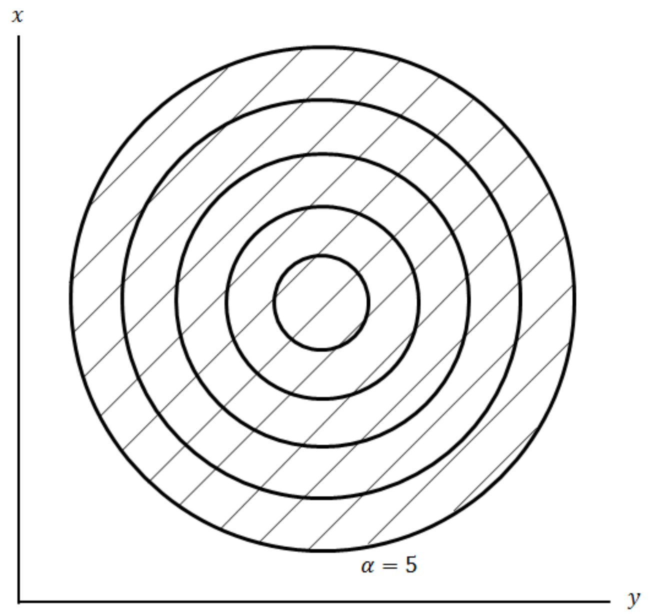
Berdasarkan gambar di atas, kita lihat kurva yang digambarkan pertama adalah kurva dengan $\alpha = 1$, kurva tersebut merupakan kurva yang memiliki ketinggian paling rendah dari himpunan level bawah. Sedangkan, kurva dengan $\alpha = 5$ merupakan kurva yang memiliki ketinggian paling tinggi dari himpunan level bawah. Kurva dengan $\alpha = 1, \dots, 5$ disebut *level curve*.

Kita ingat kembali Teorema 3.3.1, Fungsi $f: S \to \mathbb{R}$ dengan $S \subseteq \mathbb{R}^n$, disebut kuasikonveks di S jika dan hanya jika himpunan level bawahnya, yaitu

$$L_\alpha = \{x | f(x) \leq \alpha\},$$

konveks untuk setiap $x \in S$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Maksud dari $L_\alpha = \{x | f(x) \leq \alpha\}$ konveks, yaitu himpunan yang berada di dalam *level curve* lebih kecil atau sama dengan α, adalah himpunan konveks. Kita lihat gambar di bawah ini. Himpunan yang diarsir adalah himpunan yang berada di dalam *level curve* terluar dengan $\alpha = 5$. Himpunan tersebut berbentuk daerah yang dibatasi oleh lingkaran. Oleh karena itu, jelas bahwa himpunan tersebut konveks. Begitu juga dengan himpunan yang berada di dalam *level curve* dengan $\alpha = 4,3,2,$ dan 1.



Gambar 3.13 Himpunan di dalam *level curve* dengan $\alpha = 5$.

3.4 Sifat-Sifat Fungsi Konveks yang Dapat Digeneralisasi Menjadi Sifat-Sifat Fungsi Kuasikonveks

Dari teorema yang telah dibahas sebelumnya, diketahui bahwa fungsi kuasikonveks merupakan generalisasi dari fungsi konveks. Sehingga dapat diduga bahwa fungsi kuasikonveks memiliki beberapa sifat khusus yang memiliki kemiripan dengan sifat-sifat fungsi konveks. Dengan kata lain, terdapat sifat-sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks.

Berikut ini adalah karakterisasi sifat-sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Sifat-sifat ini mengacu pada karakterisasi yang dilakukan Greenberg dan Pierskalla (1971), dengan karakterisasi sebagai berikut:

1. Hubungan dengan himpunan konveks,
2. Kekontinuan,
3. Keterbatasan,
4. Keterdiferensialan,
5. Nilai ekstrem,
6. Ketaksamaan,
7. Transformasi.

Selanjutnya akan dibahas beberapa sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks dengan karakterisasi keterdiferensialan, nilai ekstrem, ketaksamaan, dan transformasi.

3.4.1 Keterdiferensialan Fungsi Kuasikonveks

Selanjutnya, akan dibahas sifat fungsi kuasikonveks yang melibatkan konsep diferensial. Teorema di bawah ini lebih dikenal sebagai kondisi urutan pertama untuk fungsi kuasikonveks yang terdiferensialkan.

Teorema 3.4.1.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)

Misal f terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f kuasikonveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika $f(y) \leq f(x)$ menunjukkan bahwa $\nabla f(x)^T(y-x) \leq 0$.

Bukti:

∇f adalah gradien dari f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla f(x)^T = f'(x)$$

($\Rightarrow$) Diketahui f terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$ dan f kuasikonveks.

Misalkan $f(x) \geq f(y)$, karena f kuasikonveks artinya f memenuhi ketaksamaan berikut ini.

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \leq f(x)$$

untuk setiap $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $\lambda \in [0,1]$.

Atau ekuivalen dengan

$$f\big(x + \lambda(y-x)\big) \leq f(x)$$

untuk setiap $x, y \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $\lambda \in [0,1]$.

Bagi kedua sisi dengan λ

$$\frac{f\big(x+\lambda(y-x)\big)-f(x)}{\lambda} \leq 0$$

Ambil limit $\lambda \to 0$, didapat

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\big(x+\lambda(y-x)\big)-f(x)}{\lambda} = f'(x)(y-x) \leq 0$$

Jadi, terbukti

$$\nabla f(x)^T(y-x) \leq 0.$$

($\Leftarrow$) Diketahui f adalah fungsi yang terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$ dan memenuhi $f(y) \leq f(x)$ sedemikian sehingga

$$f'(x)(y-x) \leq 0 \qquad (*)$$

Karena f adalah fungsi yang terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$, artinya ketaksamaan $(*)$ dapat ditulis menjadi

$$f'(x)(y-x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0}\frac{f\big(x+\lambda(y-x)\big)-f(x)}{\lambda} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f\big(x+\lambda(y-x)\big)-f(x)}{\lambda} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f\big(x+\lambda(y-x)\big)-f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f\big(x+\lambda(y-x)\big) \leq f(x)$$

Karena $f(x) \geq f(y)$, maka

$$f\big(x+\lambda(y-x)\big) \leq maks\{f(x), f(y)\}$$

Jadi, terbukti fungsi f kuasikonveks. ■

3.4.2 Nilai Ekstrem Fungsi Kuasikonveks

Berikut ini akan dibahas sifat dari fungsi kuasikonveks yang melibatkan konsep nilai ekstrem dan himpunan konveks yang kompak.

Teorema 3.4.2.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)

Jika S adalah kompak maka $Sup_{x\in S} f(x) = sup_{x\in Eks(S)} f(x)$.

Bukti:

Pertama akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa

$$sup_{x\in convh\,(Eks(S))} f(x) = sup_{x\in Eks(S)} f(x).$$

Misal $x \in convh\,\big(Eks(S)\big)$, artinya x merupakan kombinasi konveks dari titik-titik di $Eks(S)$.

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

dengan $x_i \in Eks(S)$, $\lambda_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Aplikasikan ketaksamaan Jensen, maka diperoleh

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, sup_{x\in convh\,(Eks(S))} f(x)$$

$$= sup_{x\in convh\,(Eks(S))} f(x)$$

$$\therefore sup_{x\in convh\,(Eks(S))} f(x) \leq sup_{x\in Eks(S)} f(x).$$

Kebalikannya jelas, $Eks(S) \subset convh\,\big(Eks(S)\big)$.

$$\therefore sup_{x\in convh\,(Eks(S))} f(x) \geq sup_{x\in Eks(S)} f(x).$$

Jadi, terbukti bahwa

$$sup_{x\in convh\,(Eks(S))} f(x) = sup_{x\in Eks(S)} f(x).$$

Sekarang akan ditunjukkan

$$Sup_{x\in S} f(x) = sup_{x\in Eks(S)}\ f(x).$$

Ingat kembali Teorema Klein-Milman, untuk himpunan $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks yang kompak dan tidak kosong,

$$S = convh\,\big(Eks(S)\big).$$

Dengan mengaplikasikan teorema Krein-Milman, diperoleh

$$Sup_{x\in S} f(x) = sup_{x\in convh\,(Eks(S))} f(x)$$

Jadi, terbukti bahwa

$$Sup_{x\in S} f(x) = sup_{x\in Eks(S)} f(x). \blacksquare$$

3.4.3 Ketaksamaan Fungsi Kuasikonveks

Pada subbab ini akan dibahas sifat dari fungsi kuasikonveks yang melibatkan konsep ketaksamaan.

Teorema 3.4.3.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)

$f(\lambda x) \leq f(x)$ untuk $\lambda \in [0,1]$ jika $f(x) \geq f(0)$.

Bukti:

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + (1-\lambda)0)$$

Karena f kuasikonveks, maka f juga konveks. Jadi, kesamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut.

$$f(\lambda x) = f(\lambda x + (1-\lambda)0)$$

$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(0)$$

$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x)$$

$$= \lambda f(x) + f(x) - \lambda f(x)$$

$$= f(x)$$

Jadi, terbukti $f(\lambda x) \leq f(x)$.■

3.4.4 Transformasi Fungsi Kuasikonveks

Selanjutnya akan dibahas sifat dari fungsi kuasikonveks yang melibatkan konsep transformasi.

Teorema 3.4.4.1 (Greenberg dan Pierskalla, 1970, hlm. 1560)

$g(\alpha) = f[\alpha x + (1-\alpha)y]$ kuasikonveks untuk sebarang $x, y \in S$ dan $\alpha \in [0,1]$, jika dan hanya jika f kuasikonveks.

Bukti:

Misal $g(u,v) = f(ux + vy)$, $u, v \geq 0$.

Catat bahwa,

$$v = 1 - u, u = \alpha \text{ atau } g(\alpha) = [f(\alpha x + (1-\alpha)y]$$

($\Rightarrow$) Diketahui $g(\alpha)$ kuasikonveks, maka secara khusus, untuk $0 \leq \lambda \leq 1$ kita punya

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] = g(\lambda, 1-\lambda)$$

$$\leq maks[g(0,1), g(1,0)]$$

$$= maks[f(x), f(y)]$$

Jadi, terbukti fungsi f kuasikonveks.

($\Leftarrow$) Diketahui f kuasikonveks, maka

$$f[\alpha x + (1-\alpha)y] \leq maks[f(x), f(y)]$$

atau

$$maks[f(x), f(y)] \geq f[\alpha x + (1-\alpha)y] = \mathrm{g}(\alpha).$$

Jelas bahwa $g(\alpha)$ juga kuasikonveks. ■

Berdasarkan sifat-sifat fungsi kuasikonveks yang telah dibuktikan di atas dan sifat-sifat fungsi konveks yang telah dibahas pada bab sebelumnya, serta berdasarkan sifat-sifat yang telah dikarakterisasi oleh Greenberg dan Pierskalla (1971), berikut ini akan disajikan tabel yang berisi sifat-sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Tabel di bawah ini berlaku untuk $f: S \to \mathbb{R}$ terdefinisi pada himpunan konveks $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Tabel 3.1 Sifat-sifat fungsi konveks yang dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks.

Konveks		Kuasikonveks	
1a.	f konveks jika dan hanya jika $epi\ f$ adalah himpunan konveks.	1b.	f kuasikonveks jika dan hanya jika L_α adalah himpunan konveks.
2a.	f linear jika dan hanya jika $epi\ f$ dan $epi - f$ adalah himpunan konveks.	2b.	f kuasilinear jika dan hanya jika L_α dan $L_{-\alpha}$ adalah himpunan konveks untuk semua α.
3a.	f linear jika dan hanya jika $\{(x,z) \mid x \in S, z \in \mathbb{R}, f(x) = z\}$ adalah himpunan konveks.	3b.	Misal $Y = \{x \in S: f(x) = \alpha\}$. Jika f kuasilinear, maka Y adalah himpunan konveks untuk semua α. Jika Y adalah himpunan konveks

			untuk semua α dan jika f kontinu, maka f kuasilinear.
4a.	L_α terbatas untuk semua α jika dan hanya jika terdapat α^* sedemikian sehingga L_{α^*} tidak kosong dan terbatas.	4b.	Jika L_α tidak kosong dan terbatas, maka terdapat $\alpha^* > \alpha$ sedemikian sehingga L_{α^*} terbatas.
5a.	f kontinu di $relint\ (S)$.	5b.	f kontinu hampir di semua $relint\ (S)$.
6a.	Turunan parsial satu sisi ada di seluruh $relint\ (S)$.	6b.	Turunan parsial satu sisi ada hampir di semua $relint\ (S)$.
7a.	Misalkan f terdiferensialkan dua kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f konveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika *hessian* $H(\cdot)$ adalah positif setengah terbatas di sepanjang $\mathbb{R}^n$.	7b.	Misal f terdiferensialkan dua kali di $\mathbb{R}^n$. Jika f kuasikonveks di ${\mathbb{R}_+}^n$, maka $\lvert D_j \rvert \leq 0$ untuk $j = 1, \dots, n$. Jika $\lvert D_j \rvert < 0$ untuk $j = 1, \dots, n$, maka f kuasikonveks di ${\mathbb{R}_+}^n$.
8a.	Misalkan f terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f konveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika $f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T(y - x)$.	8b.	Misal f terdiferensialkan satu kali di $\mathbb{R}^n$. Maka f kuasikonveks di $\mathbb{R}^n$ jika dan hanya jika $f(y) \leq f(x)$ menunjukkan bahwa $\nabla f(x)^T(y - x) \leq 0$.
9a.	$Sup_{x \in Eks(S)} f(x) < +\infty$ jika x kompak.	9b.	$Sup_{x \in Eks(S)} f(x) < +\infty$ jika x kompak.
10a.	Jika S adalah kompak maka	10b.	Jika S adalah kompak maka $Sup_{x \in S} f(x) =$

	$Sup_{x \in S} f(x) = sup_{x \in Eks(S)} f(x)$.		$sup_{x \in Eks(S)} f(x)$.
11a.	Setiap minimum lokal adalah minimum global.	11b.	Setiap minimum lokal adalah minimum global atau f konstan di lingkungan minimum lokal.
12a.	Himpunan minimum global adalah konveks.	12b.	Himpunan minimum global adalah konveks.
13a.	Kualifikasi batas Kuhn-Tucker terpenuhi untuk $\{x; f_i(x) \leq 0, i = 1,2, \dots, m\}$ jika terdapat $x: f_i(x) < 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, m$.	13b.	Kualifikasi batas Kuhn-Tucker terpenuhi untuk $\{x; f_i(x) \leq 0, i = 1,2, \dots, m\}$ jika $\nabla f_i(x) \neq 0$ untuk $i \ni f_i(x) = 0, i = 1,2, \dots, m$.
14a.	Misal X, Y subset kompak di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$, berturut-turut, dan misalkan $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1 \ni$ untuk setiap $y \in Y, f(x,\cdot)$ adalah konkaf dan untuk setiap $x \in X, f(x,\cdot)$ adalah konveks. Lebih jauh lagi, misal $f(x,y)$ kontinu. Maka $f(x,y)$ memiliki titik *saddle*, katakanlah $(x^*, y^*) \in X \times Y$.	14b.	Misal X, Y himpunan kompak di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{R}^m$, berturut-turut, dan misalkan $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^1 \ni$ untuk setiap $y \in Y, f(x,\cdot)$ adalah kuasikonkaf dan *upper semi-continuous* serta untuk setiap $x \in X, f(\cdot, y)$ adalah kuasikonveks dan *lower semi-continuous*. Maka terdapat titik *saddle* dari $f(x,y)$, katakanlah $(x^*, y^*) \in X \times Y$.
15a.	$f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ untuk $\lambda \in [0,1]$ jika $f(0) \leq 0$.	15b.	$f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$ untuk $\lambda \in [0,1]$ jika $f(x) \leq f(0)$.

16a.	$g(\lambda) = f(\lambda x)/\lambda$ adalah monoton naik untuk $\lambda > 0$ jika $F(0) = 0, \lambda \in \mathbb{R}^1$	16b.	$g(\lambda) = f(\lambda x)$ adalah monoton naik untuk $\lambda \geq 0$ jika $f(x) \geq f(0), \lambda \in \mathbb{R}^1$
17a.	$g(\alpha) = f[\alpha x + (1-\alpha)y]$ konveks, dengan $\alpha \in [0,1]$ untuk sebarang $x, y \in S \Leftrightarrow f$ konveks.	17b.	$g(\alpha) = f[\alpha x + (1-\alpha)y]$ kuasikonveks, dengan $\alpha \in [0,1]$ untuk sebarang $x, y \in S \Leftrightarrow f$ kuasikonveks.
18a.	$g(x) = sup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$ konveks, dimana r adalah sebarang himpunan indeks.	18b.	$g(x) = sup_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$ kuasikonveks, dimana r adalah sebarang himpunan indeks
19a.	$g(x) = F[f(x)]$ konveks jika F konveks dan tidak turun.	19b.	$g(x) = F[f(x)]$ kuasikonveks jika F tidak turun.

Dari tabel 3.1 terlihat bahwa sebagai fungsi yang merupakan generalisasi dari fungsi konveks, fungsi kuasikonveks memiliki sifat-sifat yang memiliki kemiripan dengan sifat-sifat fungsi konveks. Namun, karena fungsi kuasikonveks merupakan generalisasi dari fungsi konveks, kita dapat menduga bahwa terdapat sifat-sifat fungsi konveks yang tidak memiliki kemiripan dengan fungsi kuasikonveks atau dengan kata lain, terdapat sifat-sifat fungsi konveks yang tidak dapat digeneralisasi menjadi sifat-sifat fungsi kuasikonveks. Sifat-sifat ini akan dibahas pada bab selanjutnya.