BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Penelitian

Aljabar- C^* merupakan objek utama dalam aljabar operator. Aljabar graf adalah salah satu bentuk aljabar- C^* yang terkait dengan keluarga Cuntz-Krieger dari suatu graf berarah. Kajian aljabar graf merupakan topik yang cukup menarik dan memberi nuansa berbeda dalam perkembangan teori aljabar operator. Hal ini ditandai dengan banyaknya peneliti yang mengkaji masalah aljabar graf dengan bermacam fokus kajian, diantaranya Kumjian dan Pask (1997), Kumjian, Pask dan Raeburn (1998), Raeburn (2004), Rosjanuardi dan Albania (2012) dan lain-lain.

Graf berarah $E = \{E^0, E^1, r, s\}$ terdiri dari himpunan *countable* E^0, E^1 dan fungsi $r, s : E^1 \rightarrow E^0$. Unsur-unsur di E^0 disebut *vertex* dan unsur-unsur di E^1 disebut sisi. Suatu graf berarah dapat direpresentasikan oleh operator-operator pada ruang Hilbert H , di mana setiap titiknya direpresentasikan sebagai proyeksi yang saling ortogonal pada subruang dari H , dan setiap sisinya direpresentasikan sebagai isometri parsial. Keluarga dari semua proyeksi ortogonal dan isometri parsial dari suatu graf berarah disebut keluarga Cuntz-Krieger- E .

Untuk sebarang graf berhingga baris E , suatu aljabar- C^* $C^*(E)$ yang dibangun oleh keluarga Cuntz-Krieger- E disebut aljabar- C^* dari graf E atau aljabar Cuntz-Krieger dari E . Selanjutnya, aljabar- C^* dari graf E , yaitu $C^*(E)$ memiliki sifat universal yang terkait dengan keluarga Cuntz-Krieger dari graf E .

Misalkan E dan F adalah graf. Homomorfisma graf $\psi : E \rightarrow F$ adalah pemetaan $\psi = (\psi^0, \psi^1)$ sedemikian sehingga $\psi^0(r(e)) = r(\psi^1(e))$ dan $\psi^0(s(e)) = s(\psi^1(e))$. Terkait dengan graf E dan F , kita peroleh aljabar graf $C^*(E)$ dan $C^*(F)$. Homomorfisma pada aljabar graf adalah suatu pemetaan θ dari $C^*(E)$ ke $C^*(F)$ yang mengawetkan struktur aljabar- C^* .

Pada dasarnya, homomorfisma pada graf dan homomorfisma pada aljabar graf tidak berkaitan satu sama lain. Namun, untuk beberapa kasus tertentu, dapat diperoleh gambaran bahwa kedua konsep ini memiliki kaitan yang sangat erat. Rosjanuardi dan Albania (2012) menyatakan bahwa automorfisma pada graf E dapat menginduksi automorfisma pada aljabar graf $C^*(E)$. Lebih dari itu diperoleh fakta bahwa aksi $\lambda : G \rightarrow \text{Aut } E$ dapat menginduksi suatu aksi $\tilde{\lambda} : G \rightarrow \text{Aut } C^*(E)$.

Berdasarkan uraian di atas, penulis termotivasi untuk mengkaji lebih jauh mengenai bagaimana konsep homomorfisma pada graf dan homomorfisma pada aljabar graf serta kaitan di antara keduanya.

1.2 Rumusan Masalah Penelitian

Berdasarkan latar belakang penelitian di atas, rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana kaitan antara aljabar- C^* dengan graf?
2. Bagaimana konsep homomorfisma pada graf dan homomorfisma pada aljabar graf?
3. Bagaimana kaitan homomorfisma pada graf dan homomorfisma pada aljabar graf?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah penelitian di atas, maka tujuan dari penelitian dalam skripsi ini adalah:

1. untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang kaitan antara aljabar- C^* dengan graf,
2. untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang konsep homomorfisma graf,
3. untuk memperoleh informasi menyeluruh tentang kaitan homomorfisma graf dengan homomorfisma pada aljabar graf.

1.4 Manfaat Penelitian

Memperoleh gambaran menyeluruh tentang keterkaitan aljabar- C^* dengan graf dan homomorfisma aljabar pada aljabar graf.

1.5 Sistematika Penulisan

Skripsi ini dibagi menjadi lima bab. Sebagaimana yang telah diuraikan di atas, BAB I merupakan pendahuluan yang berisi latar belakang penelitian, rumusan masalah penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Berikutnya BAB II berisi konsep dasar aljabar operator dan keluarga Cuntz-Krieger- E yang menjadi landasan teoritis pada skripsi ini. Konsep dasar aljabar operator meliputi ruang vektor, ruang vektor bernorm, ruang Banach, ruang Hilbert, aljabar- C^* , aljabar operator dan beberapa unsur di aljabar operator.

BAB III merupakan metode yang digunakan dalam penelitian ini. Bagian ini merupakan bagian yang bersifat prosedural, yaitu bagian di mana pembaca dapat mengetahui tahapan penelitian pada skripsi ini.

Selanjutnya BAB IV merupakan inti dari skripsi ini. Diawali dengan pembahasan mengenai homomorfisma pada graf. Selanjutnya dijelaskan cara mengkontruksi aljabar graf dan dilanjutkan dengan pembahasan homomorfisma aljabar pada aljabar graf serta kaitan antara pembahasan homomorfisma aljabar pada graf dan pembahasan homomorfisma aljabar pada aljabar graf.

Pada bagian akhir, BAB V memuat penutup dari skripsi ini. Bab ini memuat kesimpulan dari skripsi ini, kemudian diakhiri dengan saran untuk penelitian lebih lanjut.