BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Pada tahun 1886, Marcell Riesz memperkenalkan salah satu operator fungsi yang dikenal dengan operator integral fraksional I_α yaitu :

Misalkan f fungsi bernilai real pada $\mathbb{R}^n$. Untuk suatu, $0 < \alpha < n$ dan $x \in \mathbb{R}^n$, operator integral fraksional I_α didefinisikan sebagai berikut:

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

Selanjutnya operator integral fraksional ini sering dikenal sebagai potensial Riesz. Permasalahan yang diteliti terkait dengan operator integral fraksional diatas adalah masalah keterbatasan. Sebagaimana diketahui, operator T dari ruang X ke ruang Y dikatakan terbatas, jika terdapat $M > 1$ sedemikian sehingga $\|Tx:Y\| \leq M\|x\|$ dengan $\|x:X\|$ menotasikan norma x di ruang X . Selanjutnya operator T dikatakan terbatas di ruang X , jika T terbatas dari ruang X ke ruang X .

Keterbatasan suatu operator adalah sifat yang diharapkan untuk dipenuhi, karena sifat ini membawa kepada kondisi yang menarik untuk diteliti. Misalnya ketika bekerja dengan persamaan diferensial atau persamaan integral, keterbatasan suatu operator dapat memberikan pemahaman akan fenomena fisis tertentu. Sementara itu pada bidang komputasi, pengerjaan komputasi akan jauh lebih mudah jika bekerja dengan suatu operator yang terbatas.

Untuk pertama kalinya keterbatasan operator integral fraksional pada $\mathbb{R}$ dibuktikan oleh Hardy G.H dan Littlewood J.E (1928). Dalam pembuktiannya, Hardy dan Littlewood menggunakan operator (fungsi) maksimal yang kemudian dikenal dengan ketaksamaan Hardy–Littlewood.

Selanjutnya keterbatasan operator integral fraksional I_α dibuktikan oleh mereka pada salah satu ruang homogen yaitu dari ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^q(\mathbb{R}^n)$ dengan $0 \leq \alpha \leq n$ dan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$. Hubungan p dan q selalu digunakan dalam pembuktian keterbatasan operator integral fraksional. Selanjutnya, pada tahun 1930 keterbatasannya di ruang Lebesgue itu disempurnakan oleh Sobolev, sehingga hasil penting yang didapatkannya itu disebut sebagai ketaksamaan Hardy–Littlewood–Sobolev. Beberapa tahun setelah itu, pada tahun 1937 N. Wiener kembali memperkenalkan operator maksimal, namun untuk kasus ruang Euclid yang lebih tinggi dimensinya.

Pada tahun 1938, seorang ahli matematika bernama C.B. Morrey memperkenalkan salah satu ruang yang terkenal sampai saat ini yaitu ruang Morrey yang dinotasikan dengan $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (Lina, 2013 hal 1). Ruang ini banyak dijumpai ketika mempelajari operator Schrodinger dan teori potensial dimana ruang Morrey tersebut merupakan perluasan dari ruang Lebesgue. Setelah Hardy–Littlewood–Sobolev, keterbatasan operator integral fraksional I_α dikembangkan lagi oleh D.R. Adams pada ruang Morrey. Hasil ini kemudian dibuktikan kembali oleh Chiarenza–Frasca dengan menggunakan ketaksamaan Fefferman–Stein. Chiarenza–Frasca berhasil membuktikan keterbatasan operator integral fraksional dari ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Berdasarkan uraian diatas, pada tulisan ini dibahas, apakah operator integral fraksional memiliki sifat keterbatasan yang sama pada ruang fungsi sebelumnya yaitu ruang Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$. Selanjutnya syarat apa saja yang harus dipenuhi agar operator integral fraksional tersebut terbatas pada ruang Morrey tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan diatas, maka yang menjadi masalah utama dalam skripsi ini adalah bagaimana karakteristik operator

integral fraksional pada ruang Morrey. Secara khusus, permasalahan tersebut dirumuskan sebagai berikut :

1. Sifat-sifat apa saja yang berlaku pada ruang Morrey?
2. Sifat-sifat keterbatasan apa saja yang berlaku pada operator integral fraksional di ruang Morrey?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang dan rumusan masalah, terlihat bahwa banyak hal menarik yang dapat diteliti, namun penulis membatasi hanya pada sifat-sifat yang berlaku pada ruang Morrey dan keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey.

1.4 Tujuan Penelitian

Secara khusus, penelitian ini bertujuan untuk mencari karakteristik operator integral fraksional di ruang Morrey yaitu dengan cara mengkaji lebih dalam tentang :

1. Sifat-sifat yang berlaku pada ruang Morrey
2. Sifat keterbatasan operator integral fraksional di ruang Morrey klasik

1.5 Manfaat Penelitian

Melalui penelitian ini diharapkan memberikan kontribusi yang berarti baik bagi pengembangan matematika, bagi penulis, bagi mahasiswa lainnya bahkan bagi peneliti lainnya.

1. Memperluas dan memperdalam pengetahuan tentang materi ruang Morrey khususnya tentang operator integral fraksional yang terbatas di ruang Morrey
2. Memberikan inspirasi bagi mahasiswa dan peneliti lainnya agar tertarik membahas dan meneliti lebih dalam tentang ruang Morrey dan karakteristik operator integral fraksional

3. Memperkaya hasil temuan khususnya tentang ruang fungsi yang berguna sebagai bacaan ataupun pedoman bagi mahasiswa pada mata kuliah integral atau ruang fungsi ataupun kalangan lain yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terbagi menjadi empat bab.

BAB 1 merupakan bab pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

BAB 2 berisi landasan teori sebagai konsep dasar untuk pembahasan bab selanjutnya, yaitu pemaparan definisi dan teorema yang diperlukan untuk meneliti, diantaranya yaitu keterbatasan pada bilangan real, barisan bilangan dan kekonvergenannya, kekontinuan fungsi, barisan fungsi, fungsi konveks, himpunan dan fungsi terukur, integral Lebesgue, ruang Banach, pertidaksamaan Hölder–Minskowski.

BAB 3 merupakan isi dari pengkajian, diawali dengan membahas ruang Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$, ruang Lebesgue lokal $L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ruang Morrey $L^{q,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, ruang Morrey klasik $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$, sifat-sifat ruang Morrey klasik $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$, operator integral, operator maksimal Hardy–Littlewood M , operator integral fraksional I_α , membahas keterbatasan I_α pada ruang Lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$, serta yang terakhir membahas keterbatasan I_α pada ruang Morrey klasik $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

BAB 4 merupakan bab penutup dari skripsi ini yang berisi kesimpulan pengkajian dan saran.